

# Riemannovská geometrie

David Krejčířík

<http://nsa.fjfi.cvut.cz/david>

13. prosince 2024

Jednosemestrální přednáška *Úvod do riemannovské geometrie*  
přednášená autorem na FJFI ČVUT na podzim 2024.

Tento text je neúplný,  
postupně zúplňovaný a opravovaný autorem  
každý týden během semestru.  
Aktuální verzi textu lze najít na tomto odkazu:

<http://nsa.fjfi.cvut.cz/david/other/urg.pdf>



# Obsah

<b>0</b>	<b>Úvod</b>	<b>1</b>
0.1	Motivace: Prostorové plochy . . . . .	1
0.2	Topologické variety . . . . .	2
0.3	Diferencovatelné variety . . . . .	3
0.4	Funkce . . . . .	4
0.5	Vnoření a vložení . . . . .	5
0.6	Vektory a tečný prostor . . . . .	8
0.7	Tečné zobrazení . . . . .	9
0.8	Křivky . . . . .	10
0.9	Tečný svazek a vektorová pole . . . . .	11
0.10	Vektorové svazky * . . . . .	12
0.11	Kovektory a kotečný prostor . . . . .	13
0.12	Kotečné zobrazení . . . . .	14
0.13	Tenzory . . . . .	14
0.14	Orientovatelnost . . . . .	15
0.15	Lieova závorka . . . . .	16
0.16	Rozklad jednotky . . . . .	19
<b>1</b>	<b>Metrika</b>	<b>20</b>
1.1	Definice . . . . .	20
1.2	Příklady . . . . .	21
1.3	Měření . . . . .	27
1.4	Zvyšování a snižování indexů . . . . .	27
1.4.1	Gradient . . . . .	28
1.4.2	Stopa . . . . .	28
1.5	Integrovaní . . . . .	29
<b>2</b>	<b>Konexe</b>	<b>31</b>
2.1	Afinní konexe . . . . .	31
2.2	Kovariantní derivace podél křivek . . . . .	33
2.3	Geodetiky . . . . .	35
2.4	Paralelní přenos . . . . .	36
2.5	Kovariantní derivace tenzorů . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Riemannovská konexe</b>	<b>40</b>
3.1	Motivace: Tečná konexe podvariet . . . . .	40
3.1.1	Kompatibilita s metrikou . . . . .	41
3.1.2	Symetrie . . . . .	41
3.2	Definice a vlastnosti . . . . .	41
3.3	Fundamentální lemma riemannovské geometrie . . . . .	43
3.4	Geodetiky na modelových prostorech . . . . .	45
3.5	Laplacián . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Geodetiky a vzdálenost</b>	<b>50</b>
4.1	Geodetický tok . . . . .	50
4.2	Exponenciální zobrazení . . . . .	52
4.3	Normální souřadnice . . . . .	53
4.4	Minimalizující křivky . . . . .	55

4.5	Přípustné rodiny křivek . . . . .	57
4.6	Minimalizující křivky jsou geodetiky . . . . .	59
4.7	Gaussovo lemma . . . . .	61
4.8	Geodetiky jsou lokálně minimalizující křivky . . . . .	65
4.9	Úplnost . . . . .	67
<b>5</b>	<b>Křivost</b>	<b>69</b>
5.1	Tenzor křivosti . . . . .	69
5.2	Ploché variety . . . . .	70
5.3	Symetrie . . . . .	71
5.4	Ricciho a skalární křivosti . . . . .	74
5.5	Einsteinova metrika . . . . .	75
<b>6</b>	<b>Riemannovské podvariety</b>	<b>76</b>
6.1	Geometrie podvariet . . . . .	76
6.2	Druhá fundamentální forma . . . . .	77
6.3	Křivost křivek . . . . .	79
6.4	Nadplochy v eukleidovském prostoru . . . . .	80
6.5	Plochy v trojdimenzionálním eukleidovském prostoru . . . . .	81
6.5.1	Interpretace hlavních křivostí . . . . .	82
6.5.2	Theorema Egregium . . . . .	82
6.5.3	Praktické počítání . . . . .	85
<b>7</b>	<b>Gaussova–Bonnetova věta</b>	<b>87</b>
7.1	Rovinná geometrie . . . . .	87
7.2	Gaussova–Bonnetova formule . . . . .	88
7.3	Globalizace skrze triangulaci . . . . .	90
	<b>Reference</b>	<b>93</b>

*Zde odpočívá v Pánu  
Georg Friedrich Bernhard Riemann  
profesor v Göttingenu  
narozený v Breselenz 17. září 1826  
zesnulý v Selasca 20. července 1866*

*Těm, kteří milují Boha,  
všecko napomáhá k dobrému.*

[Římanům 8:28]

## 0 Úvod

Cílem této přednášky je úvod do teorie riemannovských variet. *Varieta* je objekt, jenž lokálně vypadá jako eukleidovský prostor. *Riemannovská varieta* je navíc vybavena skalárním součinem, jenž umožňuje měřit vzdálenosti a úhly. Máme tudíž tuto analogii:

<i>lineární algebra:</i>	vektorový prostor	⊃	vektorový prostor se skalárním součinem
<i>geometrie:</i>	varieta	⊃	riemannovská varieta

Naším primárním cílem je zodpovědět tuto otázku:

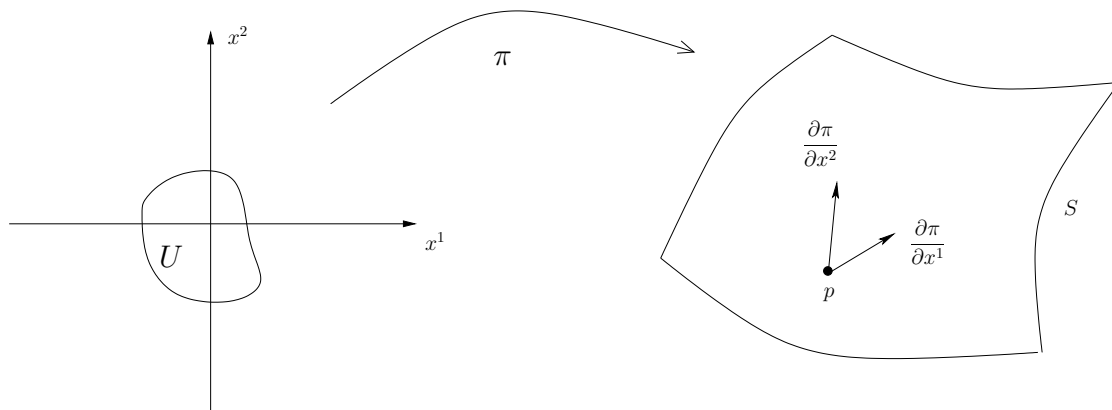
Co je křivost ?

Avšak naším prvním krokem, než se vrhneme na samotný koncept riemannovské geometrie, bude zobecnění prostorových ploch na abstraktní variety. Hlavní motivací je rychlé připomenutí některých pojmů a značení z teorie hladkých variet, jejichž znalost není od studenta vyžadována. Kapitoly označené hvězdičkou lze přeskočit.

Hlavním zdrojem této přednášky je vynikající kniha [1] brazilského matematika Manfredo do Carmo (1928–2018). Velká část těchto poznámek je pouhý (a neumělý) překlad vybraných partií této knihy do češtiny. V některých částech se alternativně inspiroji učebnicí amerického autora Johna M. Leea [3] (nyní je k dispozici i druhé vydání [5]), jež navazuje na [4]. Pro hlubší porozumění riemannovské geometrie doporučuji poněkud rozvláčnější, avšak velice instruktivní pojednání [11, 9, 7, 8, 10] od Michaela Spivaka (1940–2020).

### 0.1 Motivace: Prostorové plochy

Varieta je abstrakcí pojmu plochy v trojdimenzionálním eukleidovském prostoru, přičemž chceme zapomenout na ambientní prostor. Za tímto účelem připomeňme následující definici.



Obrázek 0.1: Lokální parametrizace plochy  $S$ .

**Definice 0.1.**  $S \subset \mathbb{R}^3$  je *regulární plocha*, pokud

$$\forall p \in S, \quad \exists \text{ okolí (bodu } p) V \subset \mathbb{R}^3 \quad \& \quad \pi : U(\text{otevřená}) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S \subset \mathbb{R}^3,$$

- (a)  $\pi$  je hladký homeomorfismus,
- (b)  $\forall x \in U, \text{rank } \pi'(x) = 2$ .

ad (a): V tomto kurzu budeme pod pojmem “hladký” či “diferencovatelný” vždy chápat  $C^\infty$ -hladkost. (Homeomorfismus je bijektivní zobrazení, jež je spojitě a jehož inverze je rovněž spojitá.)

ad (b): Zde  $\pi'(x)$  značí Jacobiho matici derivace  $\pi$  v bodě  $x$  vzhledem ke standardním bázím v  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^3$ . Připomeňme (viz [6]), že *derivace* zobrazení  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  v bodě  $x \in \mathbb{R}^n$  je lineární transformace  $D\pi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definovaná vztahem

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\pi(x+h) - \pi(x) - D\pi(x)h}{|h|} = 0.$$

Poněvadž  $2 = \dim \mathbb{R}^2 = \dim \ker D\pi(x) + \text{rank } D\pi(x)$ , vidíme, že podmínka (b) je splněna tehdy a jen tehdy, pokud  $D\pi(x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  je injektivní, což znamená (díky větě o inverzní funkci), že  $\pi$  je lokální difeomorfismus. (Difeomorfismus je bijektivní zobrazení, jež je hladké a jehož inverze je rovněž hladká.) V našem případě Jacobiho matice vypadá takto:

$$\pi'(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 \pi^1(x) & \partial_2 \pi^1(x) \\ \partial_1 \pi^2(x) & \partial_2 \pi^2(x) \\ \partial_1 \pi^3(x) & \partial_2 \pi^3(x) \end{pmatrix}.$$

Gometricky podmínka (b) znamená, že tečné vektory  $\partial_1 \pi$  a  $\partial_2 \pi$  jsou lineárně nezávislé, viz Obrázek 0.1.

Zobrazení  $\pi$  se nazývá *parametrizace* plochy  $S$  v bodě  $p$ . Důležitým důsledkem Definice 0.1 je fakt, že přechod od jedné parametrizace k druhé je difeomorfismus. Přesněji, pokud  $\pi_1 : U_1 \rightarrow S$  a  $\pi_2 : U_2 \rightarrow S$  jsou dvě parametrizace takové, že  $\pi_1(U_1) \cap \pi_2(U_2) =: W \neq \emptyset$ , potom přechodová zobrazení

$$\begin{aligned} \pi_2^{-1} \circ \pi_1 : \pi_1^{-1}(W) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \pi_1^{-1} \circ \pi_2 : \pi_2^{-1}(W) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \end{aligned} \quad \text{jsou } C^\infty. \quad (0.1)$$

Důsledkem této  *$C^\infty$ -kompatibility* je, že má smysl mluvit o diferencovatelných funkcích na ploše  $S$  a lze aplikovat metody diferenciálního počtu.

Intuitivně tedy regulární plochu dostaneme tak, že vezmeme kousky roviny, deformujeme je a pak je poskládáme dohromady tak, že výsledný objekt nemá hroty, ostré hrany, ani se neprotíná sám se sebou, tudíž má smysl mluvit o tečné rovině v každém bodě.

Nevýhodou definice regulární plochy je její závislost na ambientním prostoru  $\mathbb{R}^3$ . Co ve skutečnosti potřebujeme, je fakt, že plocha je dvojdimenzionální objekt, na němž lze aplikovat metody diferenciálního počtu. Zbytečná přítomnost ambientního prostoru  $\mathbb{R}^3$  je pouze důsledkem naší fyzikální přirozenosti. Zobecnění do vyšších dimenzí je pak rovněž přímočaré.

## 0.2 Topologické variety

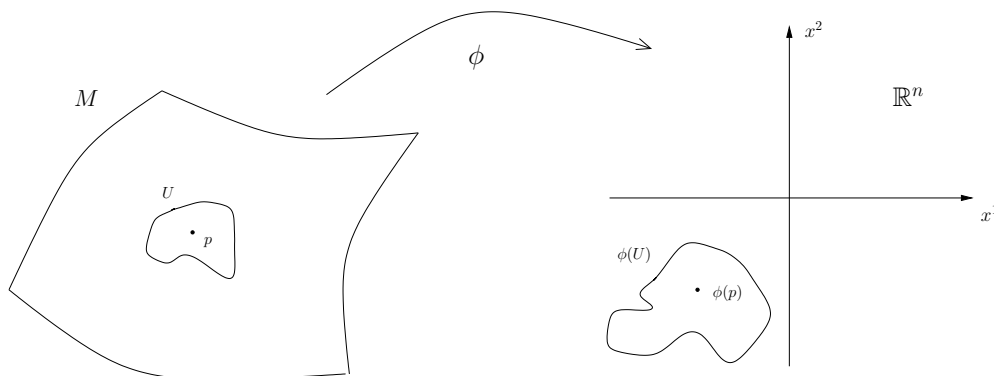
Formálně nazveme *varietou* metrický prostor  $M$ , jenž je lokálně homeomorfní eukleidovskému prostoru, tedy:

$$\forall p \in M, \quad \exists \text{ okolí (bodu } p) \ U \subset M \quad \& \quad n \in \mathbb{N}, \quad U \text{ je homeomorfní } \mathbb{R}^n.$$

*Homeomorfní* znamená, že existuje bijektivní zobrazení  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , jež je spojitě a jehož inverze  $\phi^{-1}$  je rovněž spojitá, viz Obrázek 0.2 Všimněte si, že v Definici 0.1 roli tohoto homeomorfismu hraje inverze parametrizace, tedy  $\phi = \pi^{-1}$ .

Okolí bodu  $p \in M$  je podmnožina  $U \subset M$ , jež obsahuje otevřenou podmnožinu obsahující bod  $p$ . Z vlastností bijektivních spojitých zobrazení plyne, že okolí  $U$  v definici výše musí být nezbytně otevřené.

Značíme  $\dim M =: n$  a říkáme, že  $M$  je  $n$ -dimenzionální (metrická) varieta; pokud chceme zdůraznit, jakou dimenzi varieta  $M$  má, píšeme  $M^n$ .



Obrázek 0.2: Varieta je objekt, jenž lokálně vypadá jako eukleidovský prostor.

Obecněji lze v definici variety zaměnit “metrický” za “topologický”, a tedy uvažovat, že  $M$  je topologický prostor. V tomto obecnějším případě je však nutné vyloučit skutečně patologické příklady a za tímto účelem předpokládat dvě extra vlastnosti:

1.  $M$  je *Hausdorffův* (pro libovolné dva odlišné body existují okolí, jež se navzájem neprotínají);
2.  $M$  je *úplně separabilní* (jeho topologie obsahuje spočetnou bázi).

Nejjednodušším příkladem variety je celý eukleidovský prostor  $\mathbb{R}^n$  či jakákoli jeho otevřená podmnožina. Jediné souvislé 1-dimenzionální variety jsou přímka  $\mathbb{R}$  (či jakýkoli otevřený interval) a kružnice  $\mathbb{S}^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ , kde  $|\cdot|$  značí eukleidovskou normu.

### 0.3 Diferencovatelné variety

Na obecné (metrické či topologické) varietě má pojem spojitě funkce  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  dobrý smysl, avšak pojem diferencovatelnosti není dobře definován (připomeňme, že “hladká” či “diferencovatelná” vždy znamená  $C^\infty$ -hladkost). Skutečně, uvažujme dva homeomorfismy  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  a  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  takové, že  $U \cap V \neq \emptyset$ . Potom funkce  $f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  může být diferencovatelná, zatímco funkce  $f \circ \psi^{-1}$  diferencovatelná být nemusí. Za účelem provádění diferenciálního počtu na varietách je nezbytné pojem variety obohatit o další strukturu. Naší motivací je  $C^\infty$ -kompatibilita pro regulární plochy (0.1).

*Atlas*  $\mathcal{A}$  variety  $M$  je soubor všech homeomorfismů, jejichž definiční obory pokrývají varietu  $M$  a libovolné dva elementy  $\phi, \psi \in \mathcal{A}$  jsou  $C^\infty$ -kompatibilní ve smyslu, že přechodová zobrazení

$$\begin{aligned} \psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) &\rightarrow \psi(U \cap V) \\ \phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) &\rightarrow \phi(U \cap V) \end{aligned} \quad \text{jsou } C^\infty. \quad (0.2)$$

Jednotlivý homeomorfismus  $\phi \in \mathcal{A}$  s definičním oborem  $U$  ( $\ni p$ ) se nazývá (lokální) *mapa* nebo *souřadnicový systém* na  $U$  (v bodě  $p$ ). Pokud chceme zdůraznit definiční obor  $U$  (jenž se někdy nazývá *souřadnicový obor*), píšeme  $(\phi, U)$ . Často používané (a občas matoucí)

značení pro jednotlivou mapu je písmenko  $x$ , a to za účelem identifikace bodu  $p \in M$  s bodem  $x(p) \in \mathbb{R}^n$ , jenž má “souřadnice”  $(x^1(p), \dots, x^n(p))$ .

Všimněte si moderní preference užívat  $\phi$  namísto  $\phi^{-1}$ , kde druhá volba je charakteristická pro starobylou diferenciální geometrii uvažovanou v Kapitole 0.1 ( $\phi^{-1}$  lze ztotožnit s lokální parametrizací  $\pi$  v případě, že  $M$  je vnořena do eukleidovského prostoru).

Zbývá se zamyslet nad (ne)jednoznačností volby atlasu: Obecně máme mnoho voleb různých atlasů, jež vedou ke stejné hladké struktuře na varietě  $M$ . Avšak každý atlas variety  $M$  je obsažen v jednoznačně určeném *maximálním* atlasu (jenž už není obsažen v žádném striktně větším atlasu).

*Hladká* (či *diferencovatelná*) varieta je topologická varieta vybavená maximálním hladkým atlasem. Schematicky:

diferencovatelná varieta := varieta + maximální atlas.

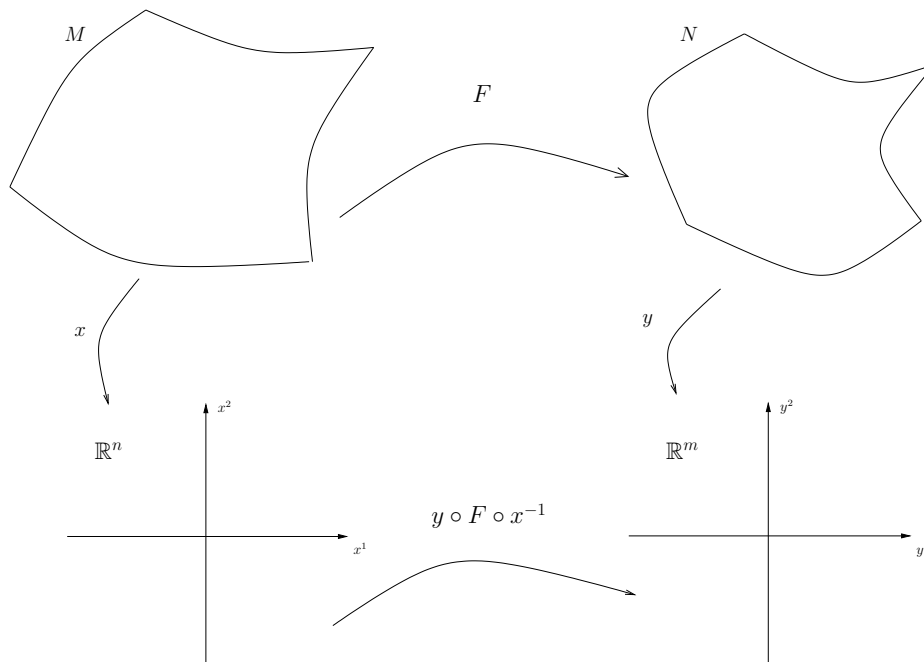
(Přívlastky “hladká” či “diferencovatelná” budeme obvykle vynechávat.)

## 0.4 Funkce

Nechť  $M, N$  jsou dvě variety,  $\dim M = n$  a  $\dim N = m$ . Funkce  $F : M \rightarrow N$  je *hladká* (nebo *diferencovatelná*) v bodě  $p \in M$ , pokud pro libovolný souřadnicový systém  $(x, U)$  v bodě  $p \in M$  a libovolný souřadnicový systém  $(y, V)$  v bodě  $F(p) \in N$  platí, že funkce

$$y \circ F \circ x^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

je diferencovatelná (viz Obrázek 0.3) v bodě  $x(p) \in \mathbb{R}^n$ . To, že je tato definice dobrá, t.j. nezávislá na volbě parametrizací, plyne z podmínky kompatibility (0.2). Hladká funkce  $F$  je nezbytně spojitá.



Obrázek 0.3: Funkce mezi varietami a jejich mapy.

V případě, že funkce  $F : M \rightarrow N$  je difeomorfismus, řekneme, že variety  $M, N$  jsou *difeomorfnní*.



Pro hladkou funkci  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  a souřadnicový systém  $(x, U)$  definujeme

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} := \partial_i(f \circ x^{-1}) \circ x, \quad (0.3)$$

kde  $\partial_i g$  značí obvyklou parciální derivaci podle  $i$ -té proměnné funkce  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Vztah (0.3) definuje funkci z  $U \subset M$  do  $\mathbb{R}$ . V libovolném bodě  $p \in M$  zřejmě máme

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p := \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \partial_i(f \circ x^{-1})(x(p)). \quad (0.4)$$

Funkce  $\hat{f} := f \circ x^{-1} : x(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se obvykle nazývá *souřadnicová reprezentace* funkce  $f$ . (Zmatky začínají, pokud se funkce  $f$  a  $\hat{f}$  začnou ztotožňovat, což je v diferenciální geometrii zcela běžné.)

Nechť nyní máme dva souřadnicové systémy  $(x, U)$  a  $(y, V)$  na varietě  $M$ . Potom na průniku  $U \cap V$  platí analogie pravidla o derivaci složené funkce (chain rule)

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} = \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \frac{\partial f}{\partial x^j}. \quad (0.5)$$

Zde i nadále užíváme Einsteinovo sumační pravidlo, kdy se automaticky počítá přes všechny hodnoty indexu, jenž se vyskytuje nahoře i dole; v tomto případě přes index  $j = 1, \dots, n$ .

Platí

$$(x \circ y^{-1})'(y(p)) = \left( \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(p) \right)_{j,i=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1}(p) & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial y^n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial y^1}(p) & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n}(p) \end{pmatrix},$$

kde na levé straně první rovnosti stojí Jacobiho matice zobrazení  $x \circ y^{-1}$  v bodě  $y(p)$  a na pravé straně je matice typu  $n \times n$  z formulky (0.5). Jedná se o regulární matici a platí

$$[(x \circ y^{-1})'(y(p))]^{-1} = \left( \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(p) \right)^{-1} = \left( \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(p) \right) = (y \circ x^{-1})'(x(p)).$$

## 0.5 Vnoření a vložení

Obecněji uvažujme hladkou funkci  $F : M^n \rightarrow N^m$ , souřadnicový systém  $(x, U)$  v bodě  $p \in M^n$  a souřadnicový systém  $(y, V)$  v bodě  $F(p) \in N^m$ . Potom definujeme *hodnotu* funkce  $F$  v bodě  $p$  coby hodnotu Jacobiho matice typu  $m \times n$  zobrazení  $y \circ F \circ x^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  v bodě  $x(p)$ :

$$\text{rank } F(p) := \text{rank } (y \circ F \circ x^{-1})'(x(p)), \quad (0.6)$$

jež nezávisí na volbě souřadnicových systémů. Připomenutím definice (0.3) dostáváme alternativní vztah

$$\begin{aligned} \text{rank } F(p) &= \text{rank} \left( \frac{\partial (y^j \circ F)}{\partial x^i}(p) \right)_{(j,i) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}} \\ &= \text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial (y^1 \circ F)}{\partial x^1}(p) & \dots & \frac{\partial (y^1 \circ F)}{\partial x^n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial (y^m \circ F)}{\partial x^1}(p) & \dots & \frac{\partial (y^m \circ F)}{\partial x^n}(p) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

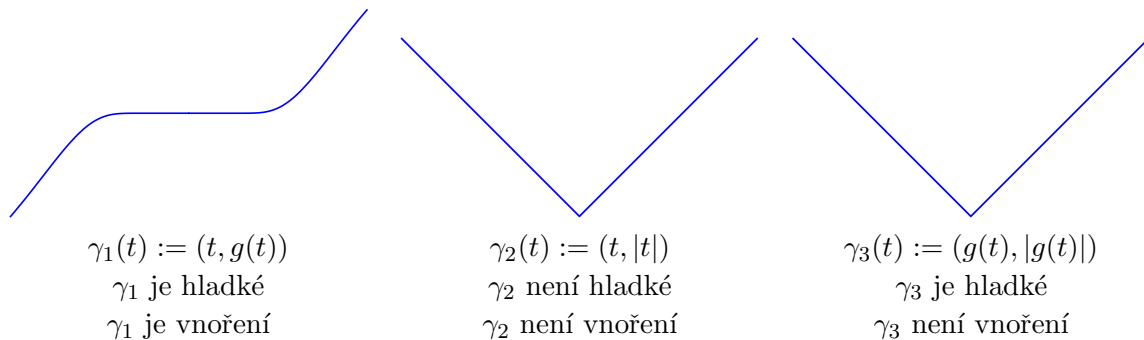
Bod  $p$  je *kritický bod* funkce  $F$  (a  $F(p)$  je *kritická hodnota* funkce  $F$ ), pokud  $\text{rank } F(p) < m$ ; jinak se bod  $p$  nazývá *regulární bod* funkce  $F$  (a  $F(p)$  je *regulární hodnota* funkce  $F$ ). Pokud  $M$  má nejvýše spočetné množství souvislých komponent, potom podle Sardovy věty kritické hodnoty funkce  $F$  tvoří množinu míry nula v  $N$ .

Nejzajímavější je případ  $n \leq m$ , kdy má smysl následující důležitá definice (*immersion*):

$$F : M^n \rightarrow N^m \text{ je vnoření} \iff \text{rank } F = n.$$

Poněvadž  $n = \dim M^n = \dim \ker F(p) + \text{rank } F(p)$ , kde  $\dim \ker F(p)$  definujeme analogicky jako hodnotu (0.6) (přesněji jako dimenzi jádra derivace  $D(y \circ F \circ x^{-1})$  v bodě  $x(p)$ ), vidíme, že  $F : M^n \rightarrow N^m$  je vnoření tehdy a jen tehdy, pokud je derivace  $D(y \circ F \circ x^{-1})(x(p)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  injektivní (či, ekvivalentně, Jacobiho matice  $(y \circ F \circ x^{-1})'(x(p))$  indukuje injektivní zobrazení z  $\mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R}^m$ ). Díky větě o inverzní funkci pak dostáváme, že funkce  $F$  je lokální difeomorfismus.

Pro ilustraci uvažujme případ křivky  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ , kde  $I \subset \mathbb{R}$  je otevřený interval. Potom  $\gamma$  je vnoření tehdy a jen tehdy, pokud  $\gamma$  je *regulární křivka* (t.j.  $|\gamma'(t)| \neq 0$  pro všechna  $t \in I$ ). Různé scénáře pro křivková vnoření v rovině lze shlédnout na Obrázku 0.4:  $\gamma_1$  je vnoření, poněvadž  $|\gamma_1'(t)| > 0$  pro všechna  $t \in \mathbb{R}$ ;  $\gamma_2$  není vnoření, poněvadž není ani hladké;  $\gamma_3$  zachraňuje hladkost přeparametrizováním, avšak  $|\gamma_3'(0)| = 0$ . Ještě jednodušší příklad hladkého zobrazení, jež není vnoření, je samotná funkce  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , poněvadž  $g'(0) = 0$ .



Obrázek 0.4: Zobrazení  $\gamma_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : \{t \mapsto \gamma_k(t)\}$  s  $g(t) := \begin{cases} -e^{-t^2} & \Leftrightarrow t < 0, \\ 0 & \Leftrightarrow t = 0, \\ e^{-t^2} & \Leftrightarrow t > 0. \end{cases}$

Silnější vlastnost je následující definice (*embedding*):

$$F : M^n \rightarrow N^m \text{ je vložení} \iff \begin{cases} F \text{ je injektivní vnoření,} \\ F : M \rightarrow F(N) \text{ je homeomorfismus.} \end{cases}$$

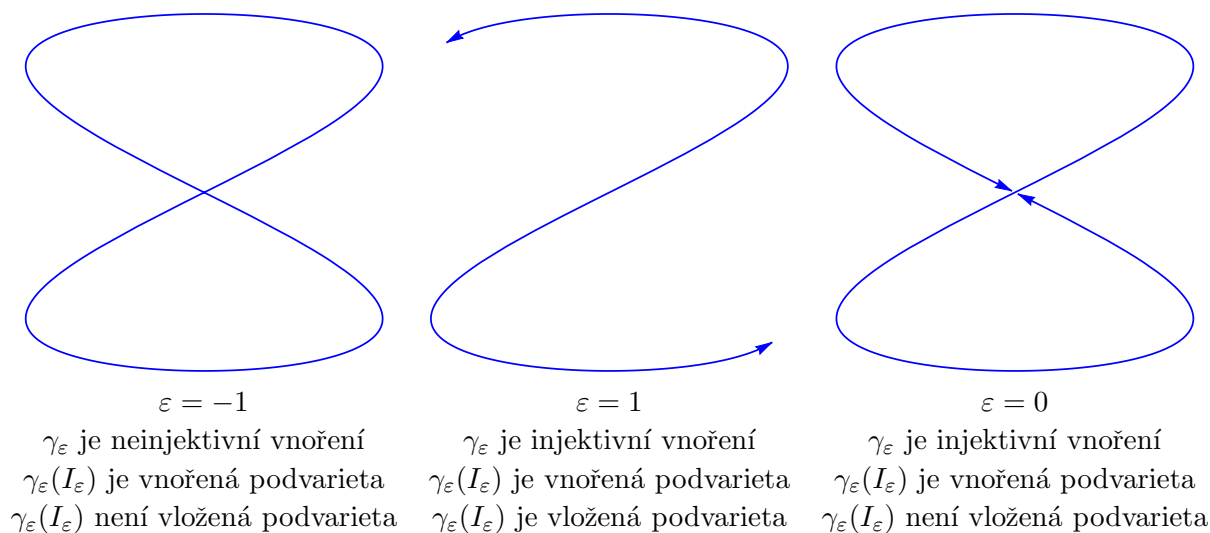
Zde druhá vlastnost znamená, že  $F$  je topologické vložení (homeomorfismus chápeme vzhledem k podprostorové topologii). Křivka  $\gamma_1$  na Obrázku 0.4 je vložení. Lokální parametrizace  $\pi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  z Kapitoly 0.1 je vložení. Díky větě o inverzní funkci dostáváme, že každé vnoření  $F$  je lokální vložení. Někdy (viz [2]) se vložním nazývá pouze injektivní vnoření a naši vlastnosti se pak říká *vlastní vložení*. Jak uvidíme níže, naše terminologie je konzistentnější.

Podmnožina  $M \subset N$  se nazývá *vnořená podvarieta* (*immersed submanifold*), pokud triviální identifikace (inclusion map)  $\iota : M \rightarrow N : \{p \mapsto p\}$  je vnoření. Zde je důležité, že  $M$

může být vybavena topologií a diferencovatelnou strukturou, které se liší od topologie a diferencovatelné struktury indukované nadmnožinou  $N$ .

Pokud je navíc  $\iota$  vložení, potom  $M \subset N$  se nazývá *vložená podvarieta* (*embedded submanifold*) či jednoduše *podvarieta*.

Regulární plocha z Kapitoly 0.1 je vložená podvarieta. Různé scénáře pro křivková vnoření v rovině lze shlédnout na Obrázku 0.5.



Obrázek 0.5: Zobrazení  $\gamma_\varepsilon : I_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^2 : \{t \mapsto (\sin(2t), \cos(t))\}$  s  $I_\varepsilon := (-\frac{\pi}{2} + \varepsilon, 3\frac{\pi}{2} - \varepsilon)$ .

Vnořené podvariety jsou v mnoha ohledech neintuitivní, avšak pro jisté aplikace jsou důležité (například pro uvažování rovinných křivek, jež se protínají). Vnořené podvariety se typicky objevují následujícím způsobem. Nechť  $I, N$  jsou hladké variety a nechť je dáno injektivní vnoření  $f : I \rightarrow N$  (například  $\gamma_0 : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$  z Obrázku 0.5). Na obrazu  $M := f(I) \subset N$  lze zavést topologii předpisem, že  $U \subset M$  je otevřená tehdy a jen tehdy, pokud  $f^{-1}(U) \subset I$  je otevřená. S takovou topologií je  $M$  jistě topologická varieta homeomorfní  $I$ . Navíc existuje jednoznačně určená diferencovatelná struktura taková, že  $f : I \rightarrow M$  je difeomorfismus (hladké souřadnicové mapy jsou tvaru  $\varphi \circ f^{-1}$ , kde  $\varphi$  je hladká souřadnicová mapa pro  $I$ ). S takovou topologií a diferencovatelnou strukturou je jistě identifikace  $\iota : M \rightarrow N$  hladké vnoření, jelikož ho lze realizovat jako složení difeomorfismu a vnoření:

$$\iota : M \xrightarrow{f^{-1}} I \xrightarrow{f} N.$$

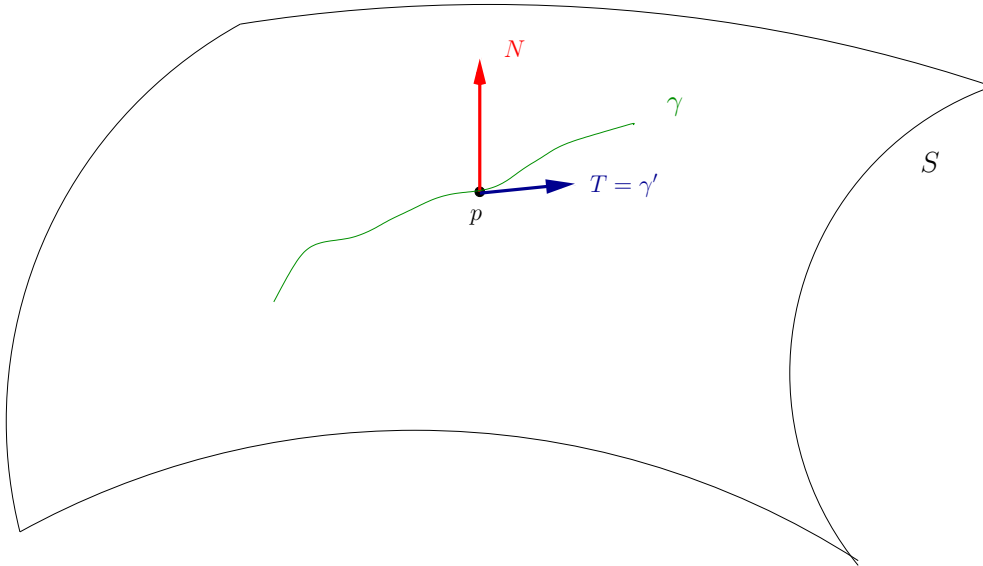
Tedy  $M$  je vnořená podvarieta  $N$ .

Pokud  $M$  je vnořená podvarieta, pak z postupu výše plyne, že triviální identifikace  $\iota : M \rightarrow N$  je injektivní vnoření. Vnořené variety lze tedy charakterizovat jako obrazy injektivních vnoření. Je evidentní, že každá vložená podvarieta je zároveň vnořená podvarieta. Obrácená implikace samořejmě neplatí: Vnořená podvarieta  $M$  je vložená tehdy a jen tehdy, pokud její topologie je indukovaná nadmnožinou  $N$ .

V jistém smyslu se lze vždy omezit na vložené variety v eukleidovském prostoru, poněvadž platí obecné tvrzení (Whitney embedding theorem), že jakoukoli hladkou *souvislou* varietu lze vložit do  $\mathbb{R}^N$  pro dostatečně velké  $N$ .

## 0.6 Vektory a tečný prostor

Dále bychom chtěli definovat pojem tečných vektorů na varietách. Za tímto účelem se opět inspirujeme regulárními plochami z Kapitoly 0.1. Zde lze tečný vektor v bodě  $p \in S$  chápat jako “rychlost”  $\gamma'$  křivky  $\gamma$  ležící na ploše  $S \subset \mathbb{R}^3$  a procházející bodem  $p$ , viz Obrázek 0.6. Poněvadž však nemáme k dispozici ambientní prostor, musíme najít charakteristickou vlastnost tečného vektoru, jež by nám umožnila nahradit pojem rychlosti na obecné varietě.



Obrázek 0.6: Tečný vektor coby rychlost křivky  $\gamma$  na ploše  $S$  vnořené v  $\mathbb{R}^3$ .

Nechť  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  s  $\varepsilon > 0$  je hladká křivka taková, že  $\gamma(0) = p$ . Pišme  $T := \gamma'(0) = (\gamma^1(0), \gamma^2(0), \gamma^3(0))$ . Nechť  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  je hladká funkce definovaná na okolí bodu  $p$ . Uvažujme-li restrikcí funkce  $f$  na křivku  $\gamma$ , pak pro směrovou derivaci vzhledem k  $T$  platí:

$$(f \circ \gamma)'(0) = (\partial_k f)(p) \gamma^{k'}(0) = (T^k \partial_k) \Big|_p f.$$

Směrovou derivaci ve směru  $T$  lze tedy chápat jako operátor na funkcích, jenž jednoznačně závisí na  $T$ . To je ta charakteristická vlastnost, kterou nyní využijeme pro definici tečných vektorů na obecné varietě  $M$ .

**Definice 0.2.** Nechť  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  s  $\varepsilon > 0$  je hladká křivka taková, že  $\gamma(0) = p$ . Tečný vektor ke křivce  $\gamma$  v bodě  $p$  je funkce  $\gamma'(0) : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná předpisem,  $\forall f \in C^\infty(M)$ ,

$$\gamma'(0)f := (f \circ \gamma)'(0)$$

Tečný vektor v bodě  $p \in M$  je tečný vektor k nějaké hladké křivce  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  s  $\varepsilon > 0$  v bodě  $p$  splňující  $\gamma(0) = p$ . Množina všech tečných vektorů v bodě  $p$  nazýváme *tečný prostor* variety  $M$  v bodě  $p$  a značíme  $T_p M$ .

Zvolme nyní souřadnicový systém  $(x, U)$  v bodě  $p$  a pišme  $(x \circ \gamma)(t) =: (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$ . Potom užitím definice (0.3) platí

$$\gamma'(0)f = (f \circ x^{-1} \circ x \circ \gamma)'(0) = \frac{\partial f}{\partial x^k}(p) \gamma^{k'}(0) = \gamma^{k'}(0) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p f.$$

Vynecháním funkce  $f$  pak dostáváme souřadnicové vyjádření tečného vektoru  $\gamma'(0)$ :

$$\gamma'(0) = \gamma^{k'}(0) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p. \quad (0.7)$$

Odtud je vidět, že  $\frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p$  je tečný vektor v bodě  $p$  k “souřadnicové křivce”

$$t \mapsto x^{-1}(0, \dots, t, \dots, 0),$$

kde  $t$  stojí na  $k$ -tém místě.

Ze vztahu (0.7) vidíme, že tečný vektor ke křivce  $\gamma$  v bodě  $p$  závisí pouze na derivacích  $\gamma$  v souřadnicovém systému. Užitím obvyklých operací na funkcích dostáváme, že  $T_p M$  je vektorový prostor. Poněvadž vektory

$$\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p$$

tvoří (*souřadnicovou*) bázi tečného prostoru  $T_p M$ , vidíme, že  $\dim T_p M = \dim M = n$ . Tato lineární struktura  $T_p M$  zřejmě nezávisí na volbě souřadnicového systému.

Ze vztahu (0.7) rovněž vidíme, že  $T_p M$  lze ztotožnit s množinou všech uspořádaných  $n$ -tic  $(\xi^1, \dots, \xi^n)$  vzhledem k nějakému souřadnicovému systému  $(x^1, \dots, x^n)$ , jež se transformují podle vzorečku

$$\tilde{\xi}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \Big|_p \xi^j$$

při přechodu do jiného souřadnicového systému  $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$ , viz (0.5).

Řekneme, že lineární zobrazení  $X : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  je *derivace* v bodě  $p$ , pokud (kromě linearity) splňuje *Leibnizovo pravidlo*

$$\forall f, g \in C^\infty(M), \quad X(fg) = f(p)X(g) + g(p)X(f). \quad (0.8)$$

Tečný prostor  $T_p M$  lze ztotožnit s množinou všech derivací.

## 0.7 Tečné zobrazení

Nechť  $M, N$  jsou dvě hladké variety a uvažujme hladké zobrazení  $F : M \rightarrow N$ . Pro libovolný bod  $p \in M$  definujeme *tečné zobrazení* (*push-forward*)  $F_{*p} : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$  vztahem

$$\forall X \in T_p M, f \in C^\infty(N), \quad (F_{*p} X)(f) := X(f \circ F). \quad (0.9)$$

Zobrazení  $F_{*p}$  je zřejmě lineární a jedná se o derivaci v bodě  $F(p)$  ve smyslu definice (0.8). Pokud  $F$  je difeomorfismus, potom  $F_{*p}$  je izomorfismus. Pokud  $P$  je další hladká varieta a  $G : N \rightarrow P$  další hladké zobrazení, potom platí vztah

$$(G \circ F)_{*p} = G_{*F(p)} \circ F_{*p} : T_p M \rightarrow T_{(G \circ F)(p)} P.$$

Podívejme se, jak tečné zobrazení vypadá v souřadnicích. Nechť  $(x, U)$  je souřadnicový systém v bodě  $p \in M^n$  a  $(y, V)$  je souřadnicový systém v bodě  $F(p) \in N^m$ . Označme

$$\begin{aligned} \hat{f} &:= f \circ y^{-1} : y(V) \rightarrow \mathbb{R}, \\ \hat{F} &:= y \circ F \circ x^{-1} : x(U \cap F^{-1}(V)) \rightarrow y(V), \end{aligned}$$

souřadnicové reprezentace funkcí  $f$  a  $F$ . Potom

$$\begin{aligned} \left( F_{*p} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) (f) &= \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (f \circ F) \\ &= \partial_i (f \circ F \circ x^{-1})(x(p)) \\ &= \partial_i (\hat{f} \circ \hat{F})(x(p)) \\ &= (\partial_j \hat{f})(\hat{F}(p)) (\partial_i \hat{F}^j)(x(p)) \\ &= (\partial_i \hat{F}^j)(x(p)) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)} (f). \end{aligned}$$

Tedy, vynecháním pomocné funkce  $f$ ,

$$F_{*p} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = (\partial_i \hat{F}^j)(x(p)) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)},$$

odkud vidíme, že matice zobrazení  $F_{*p}$  vzhledem k souřadnicovým bázím  $(\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p)$  a  $(\frac{\partial}{\partial y^1} \Big|_{F(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^m} \Big|_{F(p)})$  tečných prostorů  $T_p M$  a  $T_{F(p)} N$  je Jacobiho matice

$$M(F_*) = \begin{pmatrix} \partial_1 \hat{F}^1 & \dots & \partial_n \hat{F}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 \hat{F}^m & \dots & \partial_n \hat{F}^m \end{pmatrix} (x(p)) = \hat{F}'(x(p)) = \left( \frac{\partial(y^j \circ F)}{\partial x^i}(p) \right)_{(j,i) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}}.$$

(Z tohoto důvodu se tečné zobrazení  $F_{*p}$  někdy nazývá diferenciál funkce  $F$  a značí  $d_p F$ .)

Připomenutím definice (0.6) hodnoty zobrazení  $F$  dostáváme vztah

$$\text{rank } F(p) = \text{rank } F_{*p}.$$

Speciálně tedy platí, že  $F : M \rightarrow N$  je vnoření tehdy a jen tehdy, pokud  $F_{*p} : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$  je injektivní ve všech bodech  $p$  variety  $M$  (samotné zobrazení  $F$  samozřejmě injektivní být nemusí).

## 0.8 Křivky

Nechť  $\gamma$  je hladká *křivka* na varietě  $M$ , t.j. hladké zobrazení  $\gamma : I \rightarrow M$ , kde  $I \subset \mathbb{R}$  je otevřený interval. Lze rovněž uvažovat křivky z uzavřeného či polouzavřeného intervalu  $I$ : Pokud nějaký koncový bod intervalu  $I$  náleží  $I$ , pak se hladkostí myslí, že křivku lze rozšířit na nějakou hladkou křivku definovanou na otevřeném intervalu, jenž obsahuje  $I$ .

Všimněte si, že  $\gamma$  se může protínat a mít “rohý”, viz Obrázek 0.4. Rohy znemožníme dodatečným předpokladem, že  $\gamma$  je vnoření, t.j. obraz  $\gamma(I)$  je vnořená podvarietta variety  $M$ . Hladká křivka  $\gamma : I \rightarrow M$  je vnoření (a její obraz  $\gamma(I)$  vnořená podvarietta) tehdy a jen tehdy, pokud  $\gamma$  je regulární (t.j.  $\gamma'(t) \neq 0$  pro všechna  $t \in I$ ). Protínání znemožníme ještě silnějším předpokladem, že obraz  $\gamma(I)$  je vložená podvarietta variety  $M$ .

Nechť  $t_0 \in I$ . Označme kanonickým písmenkem  $t$  identické zobrazení  $t : I \rightarrow \mathbb{R} : \{t \mapsto t\}$ , což představuje souřadnicový systém variety  $I$ , a pišme

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t_0} := \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t_0}$$

pro standardní souřadnicovou bázi  $T_{t_0}I$ . Na hladkých funkcích  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  funguje tečný vektor ke křivce  $\gamma$  v bodě  $t_0$  takto (viz Definice 0.2)

$$\gamma'(t_0)f = (f \circ \gamma)'(t_0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} (f \circ \gamma) = \gamma_{*t_0} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} f.$$

Vynecháním funkce  $f$  dostáváme

$$\gamma'(t_0) = \gamma_{*t_0} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} \in T_{\gamma(t_0)}M.$$

Alternativní značení je  $\dot{\gamma}(t_0)$  nebo  $\left. \frac{d\gamma}{dt} \right|_{t_0}$ . Často se zkracuje  $\frac{d\gamma}{dt} := \left. \frac{d\gamma}{dt} \right|_t$ , kde písmenko  $t$  na pravé straně značí jak identické souřadnicový systém, tak jeden speciální bod  $t \in I$ .

Křivky jsou v diferenciální geometrii specifické v tom smyslu, že na ně nezbytně nekoukáme jako na variety, ale systematicky jako na funkce na intervalu. “Regulární” křivka ve smyslu Definice 0.1, zobecněné do všech dimenzí (t.j.  $S \subset \mathbb{R}^m$  a  $U \subset \mathbb{R}^n$  s  $n \leq m$ ) a aplikované na křivky (t.j.  $n = 1$ ), by se lišila od (obecnější) regulární parametrizované křivky uvažované zde.

## 0.9 Tečný svazek a vektorová pole

*Tečný svazek* (*tangent bundle*) variety  $M$  je disjunktní sjednocení všech tečných prostorů:

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_pM.$$

Prvky  $TM$  chápeme jako uspořádané dvojice  $(p, X)$ , kde  $p \in M$  a  $X \in T_pM$ . Definujeme *projekci*

$$\pi : TM \rightarrow M : \{(p, X) \mapsto p\}.$$

Tečný svazek lze vybavit přirozenou topologií a diferencovatelnou strukturou, které z něho udělají hladkou varietu. Platí  $\dim TM = 2 \dim M$  a  $\pi$  je hladké zobrazení. Skutečně, za vhodný systém map  $\phi : TM \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  lze zvolit

$$\phi(p, X) := (x^1(p), \dots, x^n(p), X^1, \dots, X^n),$$

kde  $(x, U)$  je souřadnicový systém v bodě  $p$  a

$$X = X^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p.$$

Fyzikální analogií tečného svazku je fázový prostor v klasické mechanice.

*Vektorové pole*  $X$  na varietě  $M$  je řez (*section*) tečného svazku  $TM$ , což znamená, spojitě zobrazení  $X : M \rightarrow TM : \{p \mapsto X_p\}$  takové, že  $X_p \in T_pM$  (pro funkční hodnotu píšeme  $X_p$  nebo  $X|_p$  namísto  $X(p)$ , abychom odlišili od akce  $X$  na funkci  $p$ ). Je-li dán souřadnicový systém  $(x, U)$ , pak můžeme psát

$$X_p =: X^i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p,$$

kde  $X^i : U \rightarrow \mathbb{R}$  nazýváme *souřadnicové funkce* vektorového pole vzhledem k dané mapě  $x$ .

Vektorové pole  $X$  je hladké tehdy a jen tehdy, pokud souřadnicové funkce jsou hladké pro jakoukoli hladkou mapu. Rovněž platí, že vektorové pole  $X$  je hladké tehdy a jen tehdy, pokud funkce  $Xf$  je hladká pro libovolnou hladkou funkci  $f$ . Například *souřadnicové vektorové pole* definované předpisem  $p \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  je hladké vektorové pole na  $U$ , jež značíme  $\frac{\partial}{\partial x^i}$ .

Pro libovolný bod  $p \in M$  a daný vektor  $X$  existuje hladké vektorové pole  $\tilde{X}$  na  $M$  splňující  $\tilde{X}_p = X$ .

Množina všech hladkých vektorových polí na  $M$  se značí kaligraficky:

$$\mathcal{T}(M) := \{X \in C^\infty(M, TM) : X_p \in T_p M\}.$$

Nechť  $f : M \rightarrow N$  je hladká funkce a  $f_{*p} : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  odpovídající tečné zobrazení. Pak  $f_* : TM \rightarrow TN$  značí sjednocení všech  $f_{*p}$ . Z tohoto důvodu budeme bod  $p$  ve značení tečného zobrazení často vynechávat.

## 0.10 Vektorové svazky \*

Důležitý obecný objekt, jenž se velice často vyskytuje v teorii diferenciálních variet, je následující abstrakce tečného svazku.

*Vektorový svazek* (vector bundle) hodnosti  $k \in \mathbb{N}^*$  je trojice  $(E, M, \pi)$ , kde  $E$  (*totální prostor*) a  $M$  (*bazická varieta*) jsou hladké variety a  $\pi : E \rightarrow M$  je hladká surjekce (*projekce*) splňující:

- Množina  $E_p := \pi^{-1}(p)$  (*vlákno*) je vybavená strukturou vektorového prostoru. (Pokud bychom se vzdali toho, že se jedná o vektorový prostor, mluvili bychom obecněji o *fibrováném svazku* (fiber bundle) namísto vektorového svazku.)
- $\forall p \in M, \exists$  okolí  $U$  a difeomorfismus  $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$  (*lokální trivializace  $E$* ) tak, že následující diagram komutuje

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times \mathbb{R}^k \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi_1 \\ & U & \end{array}$$

kde  $\pi_1$  je projekce na první komponentu.

- Restrikce  $\varphi$  na každé vlákno,  $\varphi : E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k$ , je izomorfismus.

Všimněte si, že vždy máme následující rozklad totálního prostoru  $E$  na jednotlivá vlákna:

$$E = \bigcup_{p \in M} E_p.$$

Že se jedná o sjednocení vláken je jasné z toho, že projekce  $\pi$  je surjektivní, zatímco to, že sjednocení je nezbytně disjunktní, plyne z toho, že  $\pi : E \rightarrow M$  je zobrazení (dvěma různými obrazy nemůže odpovídat jeden vzor).

Někdy bývá zvykem namísto trojice  $(E, M, \pi)$  mluvit pouze o  $E$  coby vektorovém svazku. Prostor *hladkých řezů* vektorového svazku  $E$  budeme jako obvykle značit kaligraficky:

$$\mathcal{E}(M) := \{F \in C^\infty(M; E) : F(p) \in E_p\}.$$



Nechť  $U \subset M$  je otevřená množina. Uspořádaná  $n$ -tice  $(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{E}(M)^n$  je *lokální repér* vektorového svazku  $E$  nad  $U$ , pokud  $(X_1|_p, \dots, X_n|_p)$  je báze vlákna  $E_p$  pro každé  $p \in U$ . Jedná se o globální repér, pokud  $U = M$ .

Příkladem vektorového svazku je tečný svazek  $E = TM$ , kdy  $E_p = T_pM$  a  $\mathcal{E}(M) = \mathcal{T}(M)$ . Je-li dán souřadnicový systém  $(x, U)$ , potom  $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$  je lokální (*souřadnicový*) repér  $TM$  nad  $U$ .

## 0.11 Kovektory a kotečný prostor

*Kovektor* v bodě  $p \in M$  je prvek *kotečného prostoru*

$$T_p^*M := (T_pM)^*,$$

což je podle definice duální prostor k tečnému prostoru  $T_pM$ . Kovektor je tedy lineární funkcionál  $\omega : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ . Pokud  $(E_1, \dots, E_n)$  je libovolná báze  $T_pM$ , potom funkcionály  $(\varphi^1, \dots, \varphi^n)$  definované relacemi  $(\forall j, k = 1, \dots, n)$

$$\varphi^j(E_k) = \delta_k^j$$

je (*duální*) báze  $T_p^*M$ . Tudíž  $\dim T_p^*M = \dim T_pM$ .

*Kotečný svazek* (*cotangent bundle*) variety  $M$  je disjunktní sjednocení všech kotečných prostorů:

$$T^*M := \bigcup_{p \in M} T_p^*M.$$

Jedná se o vektorový svazek hodnosti  $n = \dim M$ .

*Kovektorové pole*  $\omega$  na varietě  $M$  je *řez* (*section*) kotečného svazku  $T^*M$ , což znamená, spojitě zobrazení  $\omega : M \rightarrow T^*M : \{p \mapsto \sigma_p\}$  takové, že  $\omega_p \in T_p^*M$  (pro funkční hodnotu opět píšeme  $\omega_p$  namísto  $\omega(p)$ , abychom odlišili od akce  $\omega$  na vektor  $p$ ). Platí kritérium, že řez  $\omega$  je hladký, tehdy a jen tehdy, pokud funkce  $\omega(X) : M \rightarrow \mathbb{R} : \{p \mapsto \omega_p(X_p)\}$  je hladká pro všechna hladká vektorová pole z  $TM$ . Množinu všech hladkých kovektorových polí opět značíme kaligraficky symbolem  $\mathcal{T}^*(M)$ .

Nechť  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  je hladká funkce. Potom definujeme *diferenciál*  $df$  funkce  $f$  coby hladké kovektorové pole splňující

$$\forall X \in T_pM, \quad df_p(X) := X(f). \quad (0.10)$$

Speciálně, pokud  $(x, U)$  je souřadnicový systém, potom  $dx^i$  pro  $i = 1, \dots, n$  jsou hladká kovektorová pole na  $U$ . Z definice plyne formulka

$$dx^i|_p \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \delta_j^i,$$

kde pro přehlednost píšeme  $dx^i|_p$  namísto  $dx_p^i$ . Odtud vidíme, že  $(dx^1|_p, \dots, dx^n|_p)$  je báze kotečného prostoru  $T_p^*M$ , jež je duální k souřadnicové bázi  $(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p)$ . Pro libovolný řez na  $U$  tedy máme jednoznačný rozklad

$$\omega_p = \omega_i(p) dx^i|_p,$$

kde  $\omega_i(p) : U \rightarrow \mathbb{R}$  nazýváme *souřadnicové funkce* kovektorového pole  $\omega$  vzhledem k dané mapě  $x$ . Kovektorové pole  $\omega$  je hladké tehdy a jen tehdy, pokud souřadnicové funkce jsou hladké pro jakoukoli hladkou mapu. Například *souřadnicové kovektorové pole* definované předpisem  $p \mapsto dx^i|_p$  je hladké kovektorové pole na  $U$ , jež značíme  $dx^i$ . Platí následující formulka s klasickým nádechem:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

## 0.12 Kotečné zobrazení

Nechť  $M, N$  jsou dvě hladké variety a uvažujme hladké zobrazení  $F : M \rightarrow N$ . Připomeňme, že pro libovolný bod  $p \in M$  jsme definovali tečné zobrazení  $F_{*p} : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$  vztahem (0.9). Poněvadž  $F_{*p}$  je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory, existuje *duální zobrazení* nazývané *kotečné zobrazení* (*pull-back*)

$$F_p^* := (F_{*p})^* : T_{F(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$$

definované předpisem

$$\forall \omega \in T_{F(p)}^* N, \quad X \in T_p M, \quad (F_p^* \omega)(X) := \omega(F_{*p} X).$$

Obecně (kromě speciálního případu, kdy  $F$  je difeomorfismus) není pravda, že tečný obraz  $F_{*p} X$  hladkého vektorového pole  $X$  na  $M$  je hladké vektorové pole na  $N$ . Pro kotečné zobrazení však analogické tvrzení vždy platí! Skutečně, nechť  $\omega$  je hladký řez  $T^* N$ . Potom můžeme definovat hladký řez  $F^* \omega$  kotečného prostoru  $T^* M$  vztahem

$$(F^* \omega)_p := F_p^* \omega_{F(p)} = \omega_{F(p)} \circ F_{*p}$$

neboli přesněji  $(F^* \omega)_p(X) := \omega_{F(p)}(F_{*p} X_p)$  pro libovolné vektorové pole  $X$ .

Symbol  $f^* : T^* M \rightarrow T^* N$  značí sjednocení všech  $f_p^*$ . Z tohoto důvodu budeme opět bod  $p$  ve značení kotečného zobrazení často vynechávat.

## 0.13 Tenzory

Prvek  $\mathcal{T}(M)$ , tedy vektorové pole, se někdy nazývá *kontravariantní* vektorové pole nebo též *kontravariantní tenzor řádu 1*. Prvek  $\mathcal{T}^*(M)$ , tedy kovektorové pole, se pak nazývá *kovariantní vektor* nebo též *kovariantní tenzor řádu 1*. To je varování pro to, že horší věci nyní přicházejí.

Hladké kovektorové pole  $\omega \in \mathcal{T}^*(M)$  přiřazuje hladkému vektorovému poli  $X \in \mathcal{T}(M)$  hladkou funkci:

$$\omega : \mathcal{T}(M) \rightarrow C^\infty(M) : \{X \mapsto \omega(X)\}.$$

Navíc je toto přiřazení lineární nad  $C^\infty(M)$ :

$$\forall X, Y \in \mathcal{T}(M), \quad f, g \in C^\infty(M), \quad \omega(fX + gY) = f\omega(X) + g\omega(Y).$$

Pojem kovariantního tenzoru je zobecnění těchto pozorování pro hladká kovektorová pole.

**Definice 0.3.** (Kovariantní) tenzor  $T$  řádu  $k \in \mathbb{N}^*$  na varietě  $M$  je zobrazení

$$T : \underbrace{\mathcal{T}(M) \times \cdots \times \mathcal{T}(M)}_{k\text{-krát}} \rightarrow C^\infty(M),$$

jež je multilineární nad  $C^\infty(M)$ . Množinu všech tenzorů řádu  $k$  na varietě  $M$  značíme  $\mathcal{T}^k(M)$ .

Multilinearita nad  $C^\infty(M)$  znamená linearitu nad  $C^\infty(M)$  v každém argumentu, t.j.

$$T(X_1, \dots, fX_i + gY, \dots, X_k) = fT(X_1, \dots, X_i, \dots, X_k) + gT(X_1, \dots, Y, \dots, X_k)$$

pro libovolné funkce  $f, g \in C^\infty(M)$  a libovolná vektorová pole  $X_1, \dots, X_k, Y \in \mathcal{T}(M)$ .

Definice 0.3 je konzistentní s motivací nad ní a platí  $\mathcal{T}^1(M) = \mathcal{T}^*(M)$ . Pro konzistenci níže rovněž definujeme  $\mathcal{T}^0(M) := C^\infty(M)$ , t.j. hladké funkce chápeme jako kovariantní tenzory řádu 0.

Jakýkoli tenzor  $T$  má *superlokální* charakter v tom smyslu, že  $T(X_1, \dots, X_k)$  v bodě  $p$  závisí pouze na hodnotách vektorových polí  $X_1, \dots, X_k$  v bodě  $p$ . Skutečně, je-li  $(x, U)$  souřadnicový systém v bodě  $p$ , pak multilinearity implikuje

$$T(X_1, \dots, X_k) = X_1^{j_1} \dots X_k^{j_k} T\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\right),$$

kde  $X_i^{j_1} \in C^\infty(U)$  jsou souřadnicové funkce vektorového pole  $X_i \in \mathcal{T}(M)$ , t.j.  $X_i = X_i^{j_1} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}$ . Z této formulky vidíme, že hodnota  $T(X_1, \dots, X_k)$  v bodě  $p$  závisí pouze na hodnotách složek tenzoru  $T\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\right) \in C^\infty(U)$  v bodě  $p$  a na hodnotách souřadnicových funkcí v bodě  $p$ .

Pro  $T \in \mathcal{T}^k(M)$  a  $S \in \mathcal{T}^l(M)$  definujeme *tenzorový součin*  $T \otimes S \in \mathcal{T}^{k+l}(V)$  předpisem

$$(T \otimes S)(X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_{k+l}) := T(X_1, \dots, X_k) S(X_{k+1}, \dots, X_{k+l}), \quad (0.11)$$

kde  $X_1, \dots, X_{k+l} \in V$  jsou libovolné vektory.

Obdobným způsobem lze definovat kontravariantní tenzory řádu  $k$  (coby multilineární zobrazení nad  $C^\infty(M)$  z  $\mathcal{T}^*(M)^k$  do  $C^\infty(M)$ ) a dokonce smíšené tenzory libovolných řádů. Z ekonomických důvodů se tomu však vyhýbáme. Navíc, na riemannovských varietách, což jsou ty, které nás v tomto kurzu zajímají, lze vždy kontravariantní tenzor ztotožnit s kovariantním (a naopak).

## 0.14 Orientovatelnost

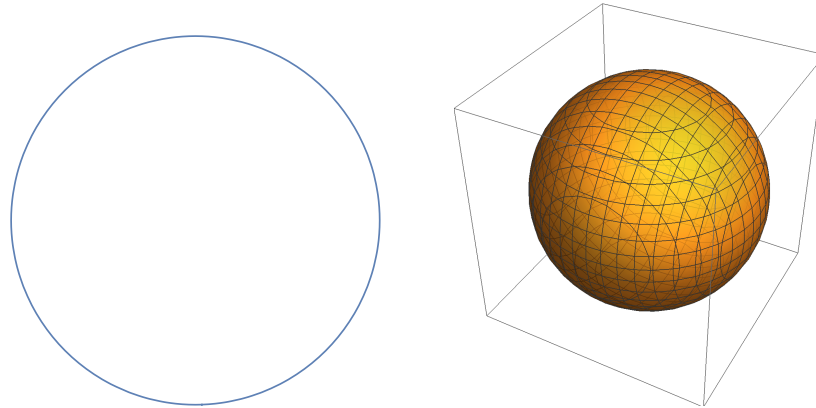
Řekneme, že varieta  $M$  je *orientovatelná*, pokud existuje atlas  $\{\phi_i\}_{i \in I}$  takový, že platí

$$\det((\phi_j \circ \phi_i^{-1})') > 0 \quad (0.12)$$

pro každý pár indexů  $i, j$  z indexové množiny  $I$  takový, že průnik definičních oborů  $\phi_i$  a  $\phi_j$  je neprázdný. V opačném případě řekneme, že varieta  $M$  je *neorientovatelná*.

Pokud je  $M$  orientovatelná, volba atlasu splňujícího podmínku (0.12) se nazývá *orientace* variety  $M$ . S touto volbou se pak varieta  $M$  nazývá *orientovaná*. Dva atlasy splňující podmínku (0.12) *určují stejnou orientaci*, pokud jejich sjednocení opět splňuje (0.12). Není těžké ověřit, že pro orientovatelnou souvislou varietu existují právě dvě odlišné orientace.

Nechť  $M_1$  a  $M_2$  jsou dvě hladké variety a  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  difeomorfismus. Pak platí, že  $M_1$  je orientovatelná tehdy a jen tehdy, pokud  $M_2$  je orientovatelná. Pokud jsou navíc  $M_1$  a  $M_2$  orientované a souvislé, pak  $\varphi$  indukuje orientaci na  $M_2$ , jež může nebo nemusí souhlasit s původní orientací na  $M_2$ . V prvním případě řekneme, že  $\varphi$  *zachovává orientaci*, a v druhém případě řekneme, že  $\varphi$  *obrací orientaci*.



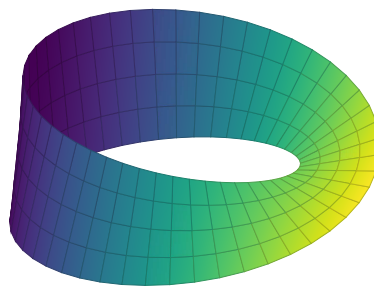
Obrázek 0.7: Kružnice coby hranice kruhu a sféra coby povrch koule.

Pokud je varieta  $M$  pokrytá dvěma souřadnicovými okolími  $U_1$  a  $U_2$  takovými, že průnik  $U_1 \cap U_2$  je souvislá množina, pak  $M$  je orientovatelná. Skutečně, poněvadž determinant Jacobiho matice pro záměnu souřadnic je nenulový, nemůže měnit znaménko na průniku  $U_1 \cap U_2$ . Pokud je záporný v jednom bodě, stačí změnit znaménko jedné souřadnice, aby byl v tomto bodě kladný, a tudíž v  $U_1 \cap U_2$ . Toto pozorování lze použít pro důkaz, že  $n$ -dimenzionální sféra (viz Příklad 1.9)

$$\mathbb{S}_R^n := \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = R^2\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

o poloměru  $R > 0$  je orientovatelná. Případy  $n = 1$  a  $n = 2$  lze vidět na Obrázku 0.7.

Notoricky známý příklad neorientovatelné plochy je Möbiův list z Obrázku 0.8.



Obrázek 0.8: Möbiův list.

## 0.15 Lieova závorka

Interpretace tečného vektoru coby operátoru na funkcích má tu výhodu, že lze akci iterovat. Například, pokud  $X, Y \in \mathcal{T}(M)$  a  $f \in C^\infty(M)$ , pak lze uvažovat funkce  $X(Yf)$  a  $Y(Xf)$ . Obecně tyto operace nevedou k vektorovým polím, poněvadž jejich akce zahrnuje derivace řádu vyššího než prvního. Avšak následující kombinace, jež se nazývá *Lieova závorka*,

$$[X, Y] := XY - YX$$

vektorové pole definuje.

**Tvrzení 0.4.**

$$(a) \quad \forall X, Y \in \mathcal{T}(M), \quad (\text{antikomutativita})$$

$$[X, Y] = -[Y, X];$$

$$(b) \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{T}(M), \forall a, b \in \mathbb{R} \quad (\text{linearita nad } \mathbb{R})$$

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z];$$

$$(c) \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{T}(M), \quad (\text{Jacobiho identita})$$

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

Lieovu závorku  $[X, Y]$  lze rovněž interpretovat jako derivaci  $Y$  podél “trajektorií” pole  $X$ . Za tímto účelem potřebujeme připomenout základní vlastnosti obyčejných diferenciálních rovnic. Poněvadž každá hladká varieta je lokálně difeomorfní eukleidovskému prostoru, základní větu o existenci, jednoznačnosti a závislosti na počátečních podmínkách (jež je ryze lokální) lze přímočaře rozšířit na variety.

**Tvrzení 0.5.** *Nechť  $X \in \mathcal{T}(M)$  a  $p \in M$ . Potom existuje okolí  $U$  bodu  $p$ ,  $\delta > 0$  a hladké zobrazení  $\varphi : (-\delta, \delta) \times U \rightarrow M$  takové, že pro jakýkoli bod  $q \in U$  je křivka  $t \mapsto \varphi(t, q)$  jediné řešení Cauchyho úlohy*

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi(t, q)}{\partial t} = X(\varphi(t, q)), \\ \varphi(0, q) = q. \end{cases}$$

Zde pravá strana diferenciální rovnice není akce  $X$  na funkci  $\varphi$  následně vyjádřená v bodě  $(t, q)$ , avšak vskutku hodnota vektorového pole  $X$  v bodě  $\varphi(t, q)$ , t.j.  $X_{\varphi(t, q)}$ .

Křivka  $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow M$ , jež splňuje podmínky

$$\begin{cases} \gamma'(t) = X(\gamma(t)), \\ \gamma(0) = q, \end{cases}$$

se nazývá *trajektorie* (či *integrální křivka*) vektorového pole  $X$ , jež prochází bodem  $q$  v čase 0. Trajektorie je tudíž křivka, jejíž tečný vektor v čase  $t$  je roven vektoru  $X_{\gamma(t)}$ . Tvrzení 0.5 zaručuje, že pro každý bod na jistém okolí prochází právě jedna trajektorie pole  $X$  a že získané zobrazení závisí hladce jak na čase  $t$ , tak na “počáteční podmínce”  $q$ . Je zvykem používat značení  $\varphi_t(q) := \varphi(t, q)$  a zobrazení  $\varphi_t : U \rightarrow M$  nazývat lokální *tok* (flow) pole  $X$ . Vektorové pole  $X$  se pak nazývá *infinitesimální generátor* toku  $\varphi_t$  a splňuje

$$\forall f \in C^\infty(M), \quad (Xf)(q) = X_q f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_t(q)) - f(q)}{t}.$$

Interpretace Lieovy závorky zmíněná výše je obsahem následujícího tvrzení.

**Tvrzení 0.6.** *Nechť  $X, Y \in \mathcal{T}(M)$  a  $\varphi_t$  je lokální tok pole  $X$  na okolí  $U$  bodu  $p \in M$ . Potom*

$$[X, Y]_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(Y - \varphi_{t*}Y)_{\varphi_t(p)}}{t}.$$

Pro vektory souřadnicové báze samozřejmě platí komutativita

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0.$$

Je pozoruhodné, že to platí i naopak, a to ve smyslu následujícího tvrzení.

**Tvrzení 0.7.** *Nechť  $X_1, \dots, X_k$  jsou lineárně nezávislá vektorová pole na okolí  $p \in M$  splňující,  $\forall i, j \in \{1, \dots, k\}$ ,*

$$[X_i, X_j] = 0.$$

*Potom existuje souřadnicový systém  $(x, U)$  v  $p$  takový, že na  $U$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ ,*

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

*Důkaz.* Zde je náčrt důkazu podle [11, Thm. 5.14], kam případně odkazujeme pro více detailů. (Alternativně viz [4, Thm. 13.10], podle vkusu.) Tvrzení stačí ukázat pro  $M = \mathbb{R}^n$ ,  $p = 0$  a (po případné změně souřadnic) pro  $X_i$  taková, že,  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ ,

$$X_i(0) = \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_0,$$

kde  $(u^1, \dots, u^n)$  značí standardní souřadnice v  $\mathbb{R}^n$ . Je-li  $\varphi_t^i$  lokální tok  $X_i$ , definujeme

$$\chi(a^1, \dots, a^n) := \varphi_{a^1}^1 (\varphi_{a^2}^2 (\dots (\varphi_{a^k}^k (0, \dots, 0, a^{k+1}, \dots, a^n) \dots))).$$

Potom,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\chi_* \left( \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_0 \right) = \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_0,$$

tedy speciálně  $\chi_* X_i(0) = X_i(0)$  pro  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Tudíž  $x := \chi^{-1}$  lze použít coby souřadnicový systém na okolí  $p$ , pro nějž platí

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Poněvadž  $[X_i, X_j] = 0$ , platí, že  $\varphi_t^i \circ \varphi_s^j = \varphi_s^j \circ \varphi_t^i$  pro všechna  $s, t$  a  $i, j$ . Tudíž funkci  $\chi$  lze rovněž psát jako

$$\chi(a^1, \dots, a^n) = \varphi_{a^i}^i (\varphi_{a^2}^2 (\dots (0, \dots, 0, a^{k+1}, \dots, a^n) \dots))$$

a předchozí argument ukazuje, že

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

□

## 0.16 Rozklad jednotky

Nesmírně užitečný nástroj, jenž umožňuje přechod od lokálních ke globálním vlastnostem variet, je tzv. *rozklad jednotky*. Jeho existence platí v plné obecnosti pro topologické variety splňující axiomy z Kapitoly 0.2 (t.j. Hausdorffův axiom o neprotínajících se okolích a axiom o úplné separabilitě).

Nechť  $\{V_i\}_{i \in I} \subset M$  je rodina otevřených množin pokrývajících varietu  $M$ , t.j.

$$\bigcup_{i \in I} V_i = M.$$

Zde indexová množina  $I$  může být konečná nebo nekonečná (avšak spočetná). Díky topologickým axiomům z Kapitoly 0.2 můžeme předpokládat, že toto pokrytí je *lokálně konečné*, t.j. pro každý bod  $p \in M$  existuje okolí  $W$  takové, že  $W \cap V_i \neq \emptyset$  nastává pouze pro konečné množství indexů  $i$  z indexové množiny  $I$ . Případným zjemněním pokrytí můžeme rovněž předpokládat, že každá z otevřených množin  $V_i$  je obsažena v definičním oboru nějaké mapy atlasu variety  $M$ .

**Definice 0.8.**  $\{f_i\}_{i \in I} \subset C^\infty(M)$  je *rozklad jednotky podřízený* pokrytí  $\{V_i\}_{i \in I} \subset M$ , pokud:

- (1)  $\forall i \in I, \quad 0 \leq f_i \leq 1;$
- (2)  $\forall i \in I, \quad \text{supp } f_i \subset V_i;$
- (3)  $\forall p \in M, \quad \sum_{i \in I} f_i(p) = 1.$

Jak už bylo zmíněno, takováto rodina funkcí vždy existuje.

# 1 Metrika

## 1.1 Definice

**Definice 1.1.** (Riemannovská) *metrika* na  $M$  je tenzor  $g$  řádu 2 splňující,  $\forall p \in M$ :

- (i)  $\forall X, Y \in T_p M, \quad g_p(X, Y) = g_p(Y, X);$  (symetrie)  
(ii)  $\forall X \in T_p M, \quad g_p(X, X) > 0.$  (pozitivní definitnost)  
 $X \neq 0$

Pokud student není seznámený s tenzory z Kapitoly 0.13, lze definici pojmout pragmatičtěji následovně. V každém bodě  $p \in M$  uvažujeme funkci  $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ , jež je lineární (nad  $\mathbb{R}$ ) v každém argumentu, splňuje symetrii (i) a pozitivní definitnost (ii). Navíc vyžadujeme hladkou závislost na bodě  $p \in M$  v tomto smyslu:

$$\forall \text{ mapu } (x, U) \text{ v bodě } p, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad p \mapsto g_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) \in C^\infty(U).$$

Funkci  $g : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow C^\infty(M)$  pak dostaneme předpisem  $g(X, Y)|_p := g_p(X_p, Y_p)$ .

Poněvadž pro každý bod  $p \in M$  definuje funkce  $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  zřejmě skalární součin na tečném prostoru  $T_p M$ , píšeme

$$g(X, Y) =: \langle X, Y \rangle_g.$$

Pokud je volba metriky zřejmá z kontextu, index  $g$  vynecháváme.

**Definice 1.2.** *Riemannovská varieta* je varieta  $M$  vybavená riemannovskou metrikou.

Píšeme  $(M, g)$ , kde  $M$  je varieta a  $g$  je metrika na  $M$ .

**Tvrzení 1.3.** *Pro libovolnou varietu existuje riemannovská metrika.*

*Důkaz.* Tvrzení je analogií klasického tvrzení, že pro libovolný konečně dimenzionální vektorový prostor existuje skalární součin (poněvadž každý konečně dimenzionální vektorový prostor je izomorfní eukleidovskému prostoru, na kterém máme definovaný standardní skalární součin). Důkaz pro variety je analogický s využitím lokální identifikace variety s eukleidovským prostorem a rozkladem jednotky (viz Kapitola 0.16) pro definici globální metriky. Vskutku, na každé množině  $V_i$  z globálního pokrytí je zřejmé, jak (užitím lokálního difeomorfismu s eukleidovským prostorem) zavést metricku  $g_p^{(i)}$  v bodě  $p \in V_i$ . Pro libovolný bod  $p \in M$  a  $X, Y \in T_p M$  pak definujeme

$$g_p(X, Y) := \sum_{i \in I} f_i(p) g_p^{(i)}(X, Y).$$

Je snadné ověřit, že tato konstrukce definuje riemannovskou metricku na  $M$ . □

Nechť  $(E_1, \dots, E_n)$  je libovolný *lokální repér* na  $TM$ , tedy  $n$  hladkých vektorových polí definovaných na nějaké otevřené množině  $U \subset M$  takových, že  $(E_1|_p, \dots, E_n|_p)$  tvoří bázi



na  $T_p M$  pro všechny body  $p \in U$ . Necht'  $(\varphi^1, \dots, \varphi^n)$  je *duální repér* na  $T^* M$ , tedy  $n$  hladkých kovektorových polí splňujících  $\varphi^i(E_j) = \delta_j^i$ . Potom můžeme lokálně psát

$$g = g_{ij} \varphi^i \otimes \varphi^j = g_{ij} \varphi^i \varphi^j, \quad g_{ij} = \langle E_i, E_j \rangle,$$

kde v druhé rovnosti vystupuje *symetrický součin*

$$\varphi^i \varphi^j := \frac{1}{2}(\varphi^i \otimes \varphi^j + \varphi^j \otimes \varphi^i)$$

a rovnost platí díky symetrii  $g$ .

Speciálně, pokud  $(x^1, \dots, x^n)$  jsou lokální souřadnice, pak  $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$  je souřadnicový repér na  $TM$ ,  $(dx^1, \dots, dx^n)$  je duální repér na  $T^* M$  a máme

$$g = g_{ij} dx^i dx^j, \quad g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle.$$

## 1.2 Příklady

**Příklad 1.4** (Eukleidovský prostor). Nejjednodušším příkladem diferenciální variety je eukleidovský prostor  $\mathbb{R}^n$  vybavený identickou mapou  $x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : \{p \mapsto p\}$  coby atlasem. V těchto (globálních) souřadnicích obvyklý skalární součin na  $\mathbb{R}^n$  odpovídá *eukleidovské metrice*

$$\bar{g} = \delta_{ij} dx^i dx^j.$$

◇

**Příklad 1.5** (Riemannovské podvariety). Necht'  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  je riemannovská varieta a  $M \subset \tilde{M}$  je vnořená podvarieta definovaná skrze vnoření  $\iota : M \rightarrow \tilde{M}$ . Metrika  $\tilde{g}$  ambientního prostoru  $\tilde{M}$  definuje *indukovanou metriku*  $g$  na  $M$  předpisem

$$g := \iota^* \tilde{g}. \tag{1.1}$$

Tento vztah přesně znamená

$$\forall p \in M, \forall X, Y \in T_p M, \quad (\iota_p^* \tilde{g})_p(X, Y) := \tilde{g}_{\iota(p)}(\iota_{*p} X, \iota_{*p} Y).$$

Indukovaná metrika je tedy restrikce ambientní metriky  $\tilde{g}$  na vektory tečné k podvarietě  $M$ .

◇

Předchozí příklad nás vede k rozšíření některých pojmů, jež známe z lineární algebry, na variety. Mějme dvě riemannovské variety  $(M, g)$  a  $(\tilde{M}, \tilde{g})$ . *Izometrie* z  $(M, g)$  do  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  je difeomorfismus  $\varphi : M \rightarrow \tilde{M}$  takový, že  $\varphi^* \tilde{g} = g$ . (V případě vnoření  $\iota$  výše, kdy  $g$  je indukovaná metrika, se jedná o tzv. *izometrické vnoření*, poněvadž  $\iota : M \rightarrow \iota(M)$  je izometrie.) Řekneme, že  $(M, g)$  a  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  jsou *izometrické* (či *izometricky ekvivalentní*), pokud existuje izometrie mezi  $(M, g)$  a  $(\tilde{M}, \tilde{g})$ . Zobrazení  $\varphi : M \rightarrow \tilde{M}$  je *lokální izometrie*, pokud pro každý bod  $p \in M$  existuje okolí  $U$  takové, že  $\varphi|_U$  je izometrie na nějakou otevřenou oblast v  $\tilde{M}$ . Platí, že pokud mají variety  $(M, g)$  a  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  stejnou dimenzi, pak  $\varphi : M \rightarrow \tilde{M}$  je lokální izometrie tehdy a jen tehdy, pokud  $\varphi^* \tilde{g} = g$ .

**Příklad 1.6** (Eukleidovské podvariety). Podívejme se nyní na speciální případ  $\tilde{M} = \mathbb{R}^m$  s  $m \geq n$ , kdy varieta  $M$  je vnořená do eukleidovského prostoru  $\mathbb{R}^m$  vybaveného eukleidovskou metrikou  $\bar{g}$ . Pak v lokálních souřadnicích  $x$  variety  $M$  (a užitím identické mapy pro varietu  $\mathbb{R}^m$ ) platí (viz Kapitola 0.7)

$$g(X, Y) = \delta_{ij} (\iota_* X)^i (\iota_* Y)^j = \delta_{ij} \underbrace{\frac{\partial \iota^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \iota^j}{\partial x^\beta}}_{g_{\alpha\beta}} X^\alpha Y^\beta,$$

kde  $i, j = 1, \dots, m$  a  $\alpha, \beta = 1, \dots, n$ . Výpočet v praxi se nejlépe provádí užitím lokální parametrizace (viz Obrázek 0.1)

$$\pi : U \rightarrow \tilde{M}, \quad \pi(U) \subset M,$$

kde  $U \subset \mathbb{R}^n$  a  $\pi(U) \subset M$  jsou otevřené množiny. V souřadnicích  $x := \pi^{-1} \circ \iota$  na  $\pi(U)$  platí

$$\frac{\partial \iota^i}{\partial x^\alpha} = (\partial_\alpha (\iota^i \circ x^{-1})) \circ x = (\partial_\alpha \pi^i) \circ x,$$

tudíž

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{ij} (\partial_\alpha \pi^i) \circ x (\partial_\beta \pi^j) \circ x.$$

Zobrazení  $(\partial_\alpha \pi^i) \circ x$  a  $(\partial_\alpha \pi^i)$  se často identifikují, pak lze zkratkovitě psát

$$g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \pi \cdot \partial_\beta \pi, \tag{1.2}$$

kde tečka  $\cdot$  značí skalární součin v  $\mathbb{R}^m$ . V maticovém formalismu  $(g_{\alpha\beta}) = (\nabla \pi)(\nabla \pi)^T$ .  $\diamond$

Abstraktní konstrukci předchozího příkladu nyní aplikujeme na variety, jež dobře známe.

**Příklad 1.7** (Kružnice). *Kružnice* o poloměru  $R > 0$  je podvarieta eukleidovské roviny  $\mathbb{R}^2$  definovaná předpisem (viz Obrázek 0.7)

$$\mathbb{S}_R^1 := \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 : (x^1)^2 + (x^2)^2 = R^2\}.$$

Lokální parametrizace kružnice vyjma bodu  $E := (R, 0)$  (east) je dána například zobrazením (polární souřadnice)

$$\pi : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 : \{\theta \mapsto (R \cos \theta, R \sin \theta)\}.$$

Zde  $U := (0, 2\pi)$  a  $\pi(U) = \mathbb{S}_R^1 \setminus \{E\}$ . Lokální souřadnice vypadají takto

$$\theta : \pi(U) \rightarrow (0, 2\pi) : \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \mapsto \pi^{-1}(x^1, x^2) = \arctan \left( \frac{x^2}{x^1} \right) \right\}.$$

Užitím formulky (1.2) získáme pro indukovanou metriku  $\mathring{g}_R$  na  $\mathbb{S}_R^1$  vztah

$$\mathring{g}_R = R^2 d\theta^2.$$

$\diamond$

**Příklad 1.8** (Sféra). *Sféra* o poloměru  $R > 0$  je podvarieta eukleidovského prostoru  $\mathbb{R}^3$  definovaná předpisem (viz Obrázek 0.7)

$$\mathbb{S}_R^2 := \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = R^2\} .$$

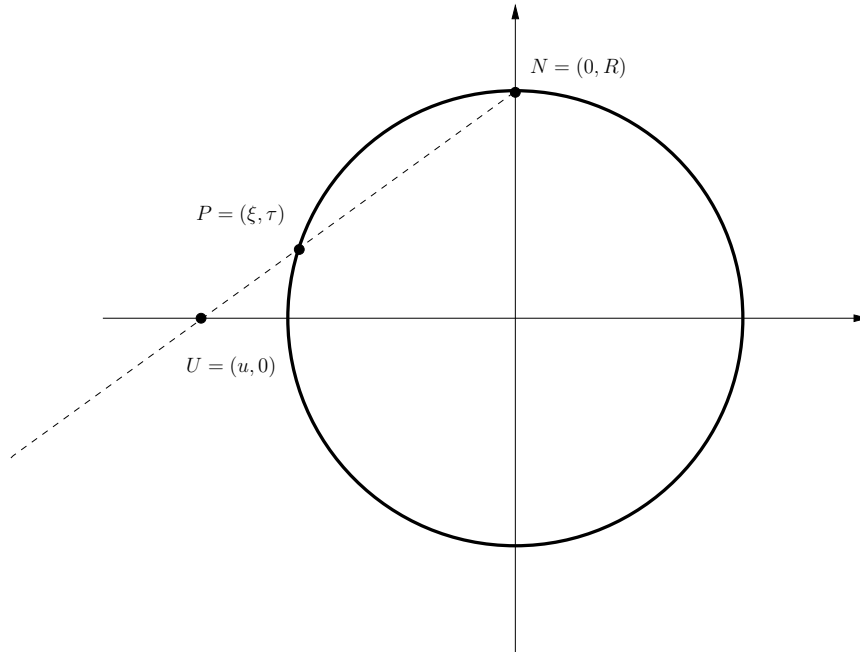
Lokální parametrizace sféry vyjma poledníku  $\{(R \sin \theta, 0, R \cos \theta) : \theta \in [0, \pi]\}$  je dána například zobrazením (sférické souřadnice)

$$\pi : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 : \{(\theta, \varphi) \mapsto (R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta)\} .$$

Podobně jako pro kružnici snadno získáme pro indukovanou metriku  $\mathring{g}_R$  na  $\mathbb{S}_R^2$  vztah

$$\mathring{g}_R = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 . \quad (1.3)$$

◇



Obrázek 1.1: Stereografická projekce.

**Příklad 1.9** ( $n$ -sféra). Obecněji,  $n$ -*sféra* o poloměru  $R > 0$  je podvarieta eukleidovského prostoru  $\mathbb{R}^{n+1}$  definovaná předpisem

$$\mathbb{S}_R^n := \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = R^2\} .$$

Lokální parametrizaci lze provést užitím hypersférických souřadnic, avšak výpočet metriky je poměrně pracný. Elegantnější způsob spočívá v užití *stereografické projekce*

$$\sigma : \mathbb{S}_R^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n : \{P \mapsto u\} ,$$

kde  $N := (0, \dots, 0, R)$  je severní pól a  $u := (u^1, \dots, u^n)$  je bod v nadrovině  $\{x^{n+1} = 0\}$ , jenž dostaneme coby průsečík této nadroviny s přímkou propojující body  $N$  a  $P$ , viz Obrázek 1.1. Elementární geometrické úvahy vedou ke vztahům

$$\sigma(P) = \frac{R\xi}{R - \tau}, \quad \text{kde} \quad P = (\xi, \tau) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},$$

a následně

$$\sigma^{-1}(u) = \left( \frac{2R^2 u}{|u|^2 + R^2}, R \frac{|u|^2 - R^2}{|u|^2 + R^2} \right).$$

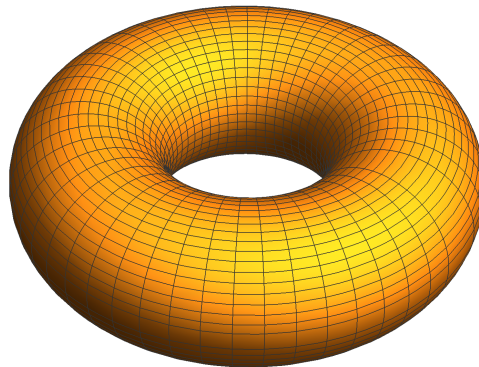
Z druhého vztahu snadno odvodíme, jak vypadá indukovaná metrika

$$\dot{g}_R = \frac{4R^4}{(R^2 + |u|^2)^2} \{ (du^1)^2 + \dots + (du^n)^2 \}. \quad (1.4)$$

Tato formulka implikuje, že  $(\mathbb{S}_R^n \setminus \{N\}, \dot{g})$  je *konformně ekvivalentní*  $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$  ve smyslu, že existuje difeomorfismus  $\sigma : \mathbb{S}_R^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  takový, že  $\sigma^* \bar{g} =$  (hladká funkce)  $\dot{g}$ .  $n$ -sféra je tedy *lokálně konformně plochá* (eukleidovský prostor přirozeně interpretujeme jako plochý). Konformně ekvivalentní metriky definují stejné úhly, avšak ne nezbytně stejné délky.

$n$ -sféra je *homogenní* (t.j. vypadá stejně v každém bodě) a *isotropní* (t.j. vypadá stejně v každém směru), a to skrze ortogonální grupu  $O(n+1)$  v  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Pro  $R = 1$  budeme psát  $\mathbb{S}_1^n =: \mathbb{S}^n$  a  $\dot{g}_1 =: \dot{g}$ . ◇



Obrázek 1.2: 2-torus  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  je podle definice homeomorfní nějaké podmnožině  $\mathbb{R}^4$ . Lze ho však také reprezentovat rotační plochou (povrch pneumatiky), která vznikne otáčením kružnice kolem osy, která leží ve stejné rovině a nemá s ní společné body.

**Příklad 1.10** (Torus).  $n$ -torus je varieta

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^n &:= \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n\text{-krát}} \\ &= \{(x^1, \dots, x^{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} : (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1 \wedge \cdots \wedge (x^{2n-1})^2 + (x^{2n})^2 = 1\} \end{aligned}$$

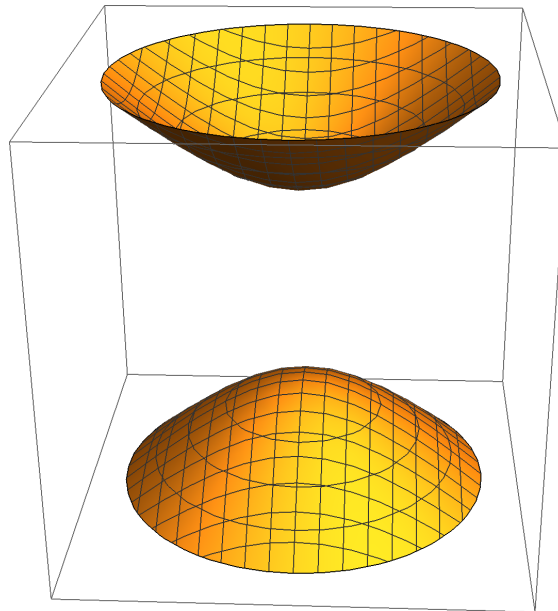
uvažovaná coby podvarieta  $\mathbb{R}^{2n}$  (viz Obrázek 1.2). Lokální parametrizace je dána například

$$\pi(u^1, \dots, u^n) := (\cos u^1, \sin u^1, \dots, \cos u^n, \sin u^n),$$

odkud okamžitě dostáváme, že metrika se rovná eukleidovské metrice,

$$g = \delta_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta,$$

kde  $\alpha, \beta = 1, \dots, n$ . ◇



Obrázek 1.3: Dvojlistý hyperboloid.

**Příklad 1.11** (Hyperbolický prostor). *Hyperbolický prostor*  $\mathbb{H}_R^n$  o poloměru  $R > 0$  je eukleidovská  $n$ -dimenzionální koule

$$\mathbb{B}_R^n := \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 < R^2\}$$

o poloměru  $R$  vybavená neeukleidovskou metrikou (cf. (1.4))

$$h_R := \frac{4R^4}{(R^2 - |u|^2)^2} \{(du^1)^2 + \cdots + (du^n)^2\}.$$

Podle definice je riemannovská varieta  $\mathbb{H}_R^n = (\mathbb{B}_R^n, h_R)$  lokálně konformně rovná. Této definici hyperbolického prostoru se říká *Poincarého kulový model*.

Jiný (izometricky ekvivalentní) model je dán *modelem hyperboloidu*, kdy se vezme horní list dvojlistého hyperboloidu (viz Obrázek 1.3)

$$H_R^n := \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : -(x^1)^2 - \dots - (x^n)^2 + (x^{n+1})^2 = R^2 \wedge x^{n+1} > 0\}$$

a vybaví se metrikou  $\iota^*m$ , kde  $\iota : H_R^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  je vnoření a  $m$  je Minkowského metrika

$$m := (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2 - (dx^{n+1})^2$$

na  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Zde *a priori* není vůbec jasné, že se jedná o riemannovskou varietu ( $m$  je pouze pseudo-riemannovská metrika), avšak izometrická ekvivalence  $(H_R^n, \iota^*m)$  s  $\mathbb{H}_R^n$  se snadno ukáže pomocí hyperbolické stereografické projekce. Alternativně (alespoň pro nízké dimenze  $n$ ) lze užít hyperbolické souřadnice; například pro  $n = 2$  máme lokální parametrizaci  $H_R^2$  danou předpisem

$$\pi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 : \{(\theta, \varphi) \mapsto (R \sinh \theta \cos \varphi, R \sinh \theta \sin \varphi, R \cosh \theta)\}$$

a přímý výpočet dá (cf. (1.3))

$$\iota^*m = R^2 d\theta^2 + R^2 \sinh^2 \theta d\varphi^2,$$

což je zjevně riemannovská metrika.

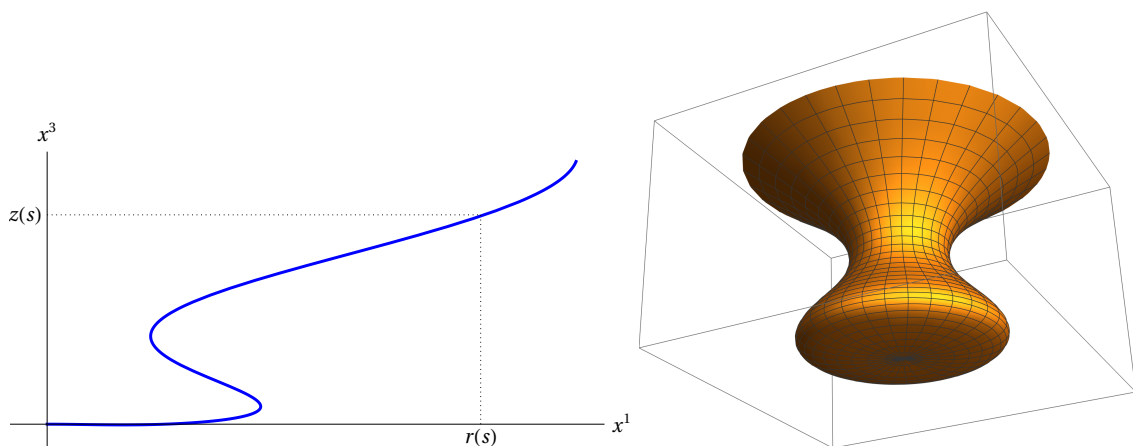
$\mathbb{H}_R^n$  je homogenní a isotropní, a to skrze Lorentzovu grupu  $O(n, 1)$  v  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Další model hyperbolického prostoru je dán tzv. *Poincarého poloprostorovým modelem*  $(U_R^n, h_R)$ , kde

$$U_R^n := \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n > 0\} \quad \text{a} \quad h_R := \frac{R^2}{(x^n)^2} \{(dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2\}.$$

Izometrická ekvivalence  $(U_R^n, h_R)$  s  $\mathbb{H}_R^n$  se ukáže pomocí Cayleyho transformace.

Pro  $R = 1$  budeme psát  $\mathbb{H}_1^n =: \mathbb{H}^n$ . ◇



Obrázek 1.4: Generující rovinná křivka  $\beta$  a výsledná rotační plocha.

**Příklad 1.12** (Rotační plochy). Nakonec uvažujme plochu v  $\mathbb{R}^3$ , již dostaneme rotací obrazu rovinné křivky  $\beta : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}^2 : \{s \mapsto (r(s), z(s))\}$  s  $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  v rovině  $x^1x^3$  kolem osy  $x^3$  (viz Obrázek 1.4). Předpokládejme, že  $\beta$  je injektivní a parametrizovaná obloukem (tedy  $r'^2 + z'^2 = 1$ ). Navíc, coby nezbytná podmínka pro vložení plochy v  $\mathbb{R}^3$ , předpokládejme, že  $r(s) > 0$  pro  $s > 0$  a  $\lim_{s \rightarrow a} \beta(s) \neq (0, 0)$ . Nakonec, kvůli hladkosti plochy v pólu  $(0, 0, 0)$ , předpokládejme  $r(0) = 0$  a  $r'(0) = 1$  (což implikuje  $z'(0) = 0$ ). Přirozená parametrizace takovéto plochy (kromě pólu a poledníku  $s \mapsto (r(s), 0, z(s))$ ) je pak dána zobrazením

$$\pi : (0, a) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 : \{(s, \varphi) \mapsto (r(s) \cos \varphi, r(s) \sin \varphi, z(s))\}.$$

Užitím formulky (1.2) získáme pro indukovanou metriku  $g$  v souřadnicích  $(s, \varphi) = \pi^{-1}$  vztah

$$g = ds^2 + r(s)^2 d\varphi^2.$$

◇

### 1.3 Měření

Rimannovská struktura na diferenciální varietě nám umožňuje měřit délky a úhly. Stejně jako v eukleidovské geometrii definujeme:

- *délka (norma)* vektoru  $X$ :  $|X| := \sqrt{\langle X, X \rangle}$ ;
- *úhel* mezi vektory  $X, Y \neq 0$ :  $\theta \in [0, \pi]$  splňující  $\cos \theta = \frac{\langle X, Y \rangle}{|X||Y|}$ ;
- $X \perp Y$  (vektory  $X, Y$  jsou *kolmé*)  $:\iff \langle X, Y \rangle = 0$  (úhel je  $\frac{\pi}{2}$ ).

Uvažujme nyní křivku  $\gamma$  na varietě  $M$ , t.j. hladké zobrazení  $\gamma : I \rightarrow M$ , kde  $I \subset \mathbb{R}$  je otevřený interval. Připomeňme (viz Kapitola 0.8), že tečný vektor  $\gamma'$  ke křivce  $\gamma$  v bodě  $t_0$  jsme definovali předpisem  $\gamma'(t_0) := \gamma_{*t_0} \frac{d}{dt} \Big|_{t_0}$ , kde  $t$  značí identické zobrazení  $t : I \rightarrow \mathbb{R} : \{t \mapsto t\}$ . Délku křivky  $\gamma$  definujeme předpisem

$$L(\gamma) := \int_I |\gamma'(t)| dt. \quad (1.5)$$

Délka křivky zúžené na uzavřený podinterval  $I' \subset I$  se definuje analogicky.

### 1.4 Zvyšování a snižování indexů

Jedna z důležitých vlastností riemannovské metriky je schopnost konvertovat vektory na kovektory a naopak, schematicky:

$$\text{kontravariant} \quad \xleftarrow{g} \quad \text{kovariant}.$$

Skutečně, máme zobrazení (jiní mu říkají *flat* a značí  $X \mapsto X^b$ )

$$\text{down} : \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}^*(M) : \{X \mapsto \underbrace{g(X, \cdot)}_{X^{\text{down}}}\},$$

jež přiřazuje vektoru  $X$  funkcionál  $Y \mapsto X^{\text{down}}(Y) = g(X, Y)$ . V lokálních souřadnicích máme

$$X_j = g_{ij} X^i,$$

kde  $X^{\text{down}} =: X_k dx^k$  ( $X_j$  je pouze označení pro složky kovektoru  $X^{\text{down}}$ ).

Všimněme si, že matice zobrazení down vzhledem k výše zvoleným lokálním souřadnicím je právě  $(g_{ij})$ . Z vlastností metriky víme, že tato matice je invertibilní, tudíž zobrazení down je invertibilní. Označme inverzní zobrazení symbolem up (jiní mu říkají *sharp* a značí  $\omega \mapsto \omega^\sharp$ ):

$$\text{up} := \text{down}^{-1} : \mathcal{T}^*(M) \rightarrow \mathcal{T}(M) : \{\omega \mapsto \underbrace{\text{up}(\omega)}_{\omega^{\text{up}}}\}.$$

V lokálních souřadnicích máme

$$\omega^j = g^{jk} \omega_k,$$

kde  $\omega^{\text{up}} =: \omega^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  a  $(g^{jk}) := (g_{jk})^{-1}$ .

### 1.4.1 Gradient

Jako jednu z aplikací si zavedme *gradient* hladké funkce  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  předpisem

$$\text{grad } f := (df)^{\text{up}}.$$

Máme tedy charakterizaci

$$\forall Y \in \mathcal{T}(M), \quad df(Y) = \langle \text{grad } f, Y \rangle.$$

V lokálních souřadnicích máme

$$\text{grad } f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (1.6)$$

### 1.4.2 Stopa

Zvyšování a snižování indexů můžeme aplikovat na tenzory libovolného typu. Speciálně uvažujeme symetrický tenzor řádu 2, tedy  $h : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ . V lokálních souřadnicích definujeme koeficienty  $h_{ij} := h(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$  jako obvykle, a navíc  $h^i_j := g^{ik} h_{kj}$ . Potom zobrazení

$$\hat{h} : \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M) : \left\{ X \mapsto h^i_j X^j \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$$

definuje symetrický endomorfismus. Stopa  $\text{tr } \hat{h}$  endomorfismu  $\hat{h}$  je dobře definovaná (nezávisí na volbě báze). Pro tenzor  $h$  definujeme *stopu vzhledem k metrice  $g$*  předpisem (index  $g$  lze vynechat)

$$\text{tr}_g h := \text{tr } \hat{h}.$$

V lokálních souřadnicích máme

$$\text{tr}_g h = h^i_i = g^{ij} h_{ji}.$$

Procedura výše odpovídá “zvednutí indexu” v první složce tenzoru  $h$ . Avšak zvednutí indexu v druhé složce tenzoru  $h$ , tedy  $h_i^j := g^{jk} h_{ik}$  a uvažování alternativního endomorfismu

$$\tilde{h} : \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M) : \left\{ X \mapsto h_i^j X^i \frac{\partial}{\partial x^j} \right\},$$

vede ke stejnému výsledku stopy, poněvadž předpokládáme, že tenzor  $h$  je symetrický.



## 1.5 Integrovaní

Na závěr této kapitoly si ukažme, jak lze riemannovskou metriku využít k integrování na orientovaných riemannovských varietách, a speciálně zavést pojem objemu.

Nechť  $M$  je orientovaná varieta,  $p \in M$  a uvažujme mapu  $x$  v bodě  $p$  z dané orientace. Nechť  $(E_1, \dots, E_n)$  je kladně orientovaná ortonormální báze tečného prostoru  $T_p M$ . Každý vektor souřadnicové báze rozložíme do báze výše:

$$X_i := \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p = a_i^j E_j,$$

kde  $a_i^j \in \mathbb{R}$ . Potom

$$g_{ik}|_p := \langle X_i, X_k \rangle|_p = a_i^j a_k^l \langle E_j, E_l \rangle|_p = \sum_{j=1}^n a_i^j a_k^j.$$

Tedy v maticovém formalismu  $(g_{ik}|_p) = AA^T$ , kde  $A := (a_i^j)$ . Nechť  $\text{vol}(X_1, \dots, X_n)$  značí objem rovnoběžnostěnu určeného vektory  $X_1, \dots, X_n$  v  $T_p M$ . Platí

$$\text{vol}(X_1, \dots, X_n) = \text{vol}(E_1, \dots, E_n) \det(a_i^j) = \det(a_i^j) = \left. \sqrt{\det(g_{ij})} \right|_p,$$

jelikož  $\text{vol}(E_1, \dots, E_n) = 1$ . Uvažujme nyní jinou mapu  $y$  v bodě  $p$  z dané orientace  $M$  a pišme

$$Y_i := \left. \frac{\partial}{\partial y^i} \right|_p, \quad \tilde{g}_{ik}|_p := \langle Y_i, Y_k \rangle|_p.$$

Potom

$$\left. \sqrt{\det(g_{ij})} \right|_p = \text{vol}(X_1, \dots, X_n) = J \text{vol}(Y_1, \dots, Y_n) = J \left. \sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})} \right|_p,$$

kde

$$J := \det \left( \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) = \det((y \circ x^{-1})') > 0$$

je determinant Jacobiho matice změny souřadnic.

Nechť  $\Omega \subset M$  je oblast (t.j. otevřená souvislá množina), jež je prekompaktní (t.j. její uzávěr je kompaktní). Předpokládejme, že  $\Omega \subset U$ , kde  $U$  je definiční obor mapy  $x$  z dané orientace  $M$ . Navíc předpokládejme, že  $x(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$  je jordanovsky měřitelná, t.j. hranice  $\partial x(\Omega)$  má míru nula v  $\mathbb{R}^n$  (pojem míry nula v  $\mathbb{R}^n$  je invariantní vůči difeomorfismu). Definujme *objem*  $\Omega$  integrálem

$$\text{vol}(\Omega) := \int_{x(\Omega)} \left( \sqrt{\det(g_{ij})} \right) \circ x^{-1}(\hat{x}) \, d\hat{x}^1 \dots d\hat{x}^n, \quad (1.7)$$

Bývá zvykem proměnnou  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  značit stejným písmenkem  $x$  mapy  $x : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Co hůř, složení s  $x^{-1}$  v bodě  $\hat{x}$  bývá zvykem vynechávat.

Formulka (1.7) je dobře definována. Skutečně, pokud  $\Omega$  leží v definičním oboru jiné mapy  $y$  z dané orientace  $M$ , potom záměna souřadnic ve vícerozměrném integrálu implikuje rovnost (při dodržení značení výše)

$$\int_{x(\Omega)} \left( \sqrt{\det(g_{ij})} \circ x^{-1} \right)(x) \, dx^1 \dots dx^n = \int_{y(\Omega)} \left( \sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})} \circ y^{-1} \right)(y) \, dy^1 \dots dy^n.$$

Tudíž  $\text{vol}(\Omega)$  nezávisí na volbě souřadnic. Zde orientovatelnost zaručuje, že  $\text{vol}(\Omega)$  nezmění znaménko při změně souřadnic.

Integrál hladké funkce  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  lze zavést analogicky:

$$\int_{\Omega} f := \int_{x(\Omega)} \left( f \sqrt{\det(g_{ij})} \right) \circ x^{-1}(x) \, dx^1 \dots dx^n.$$

Pak samozřejmě  $\text{vol}(\Omega) = \int_{\Omega} 1$ .

Pro oblast  $\Omega$ , jež neleží nezbytně v definičním oboru jedné mapy, lze integrál zavést pomocí rozkladu jednotky následovně:

$$\int_{\Omega} f := \sum_{i \in I} \int_{V_i \cap \Omega} f_i f.$$

Zde  $\{f_i\}_{i \in I}$  je rozklad jednotky podřízený pokrytí  $\{V_i\}_{i \in I}$  z Kapitoly 0.16, avšak navíc z dané orientace variety  $M$ . Pokud  $M$  je kompaktní, definice výše nám umožňují zavést integrál  $\int_M f$  pro hladkou funkci  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , a speciálně  $\text{vol}(M) := \int_M 1$ .

## 2 Konexe

Postupně směřujeme k definici tzv. *geodetik*, což jsou křivky na varietách, jež zobecňují pojem přímků v eukleidovském prostoru. Co tyto přímky charakterizuje?

1. křivky minimalizující vzdálenost;
2. křivky s nulovým zrychlením.

První přístup se pro zobecnění ukazuje jako technicky náročný. Druhý přístup se ukazuje jako vhodný, avšak:

Jak definovat derivaci tečných vektorů?

Pro křivku  $\gamma : I \rightarrow M$  leží tečné vektory  $\gamma'(t_1)$  a  $\gamma'(t_2)$  obecně v různých tečných prostorech  $T_{\gamma(t_1)}M$  a  $T_{\gamma(t_2)}M$ . Pro derivování tedy potřebujeme na varietě zavést novou strukturu, jež by nám tyto různé tečné prostory propojila.

### 2.1 Afinní konexe

**Definice 2.1.** *Afinní konexe* na varietě  $M$  je zobrazení

$$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M) : \{(X, Y) \mapsto \nabla_X Y\}$$

splňující následující axiomy:

- (a)  $\forall f_1, f_2 \in C^\infty(M), X_1, X_2, Y \in \mathcal{T}(M)$ , (linearita nad  $C^\infty(M)$  v 1. složce)

$$\nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} Y = f_1 \nabla_{X_1} Y + f_2 \nabla_{X_2} Y,$$

- (b)  $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}, X, Y_1, Y_2 \in \mathcal{T}(M)$ , (linearita nad  $\mathbb{R}$  v 2. složce)

$$\nabla_X (a_1 Y_1 + a_2 Y_2) = a_1 \nabla_X Y_1 + a_2 \nabla_X Y_2,$$

- (c)  $\forall f \in C^\infty(M), X, Y \in \mathcal{T}(M)$ , (Leibnizovo pravidlo)

$$\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + (Xf)Y.$$

$\nabla_X Y$  se nazývá *kovariantní derivace  $Y$  podle  $X$* .

Pozor: Afinní konexe není tenzor! (Linearita nad  $C^\infty(M)$  v 2. složce neplatí, poněvadž místo ní máme Leibnizovo pravidlo.)

$\nabla$  je **lokální operátor** (v obou složkách) v tomto smyslu:

**Tvrzení 2.2.**  $\forall X, \tilde{X}, Y, \tilde{Y} \in \mathcal{T}(M)$ ,

$$X = \tilde{X}, Y = \tilde{Y} \quad \text{na okolí } p \in M \quad \implies \quad \nabla_X Y|_p = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_p.$$

*Důkaz.*

**Lokálnost v 1. složce.** Uvažujme nejdříve lokálnost v druhé složce, t.j.  $X = \tilde{X} \in \mathcal{T}(M)$  je libovolné vektorové pole a chceme ukázat, že  $\nabla_X Y|_p = \nabla_X \tilde{Y}|_p$ , pokud  $Y = \tilde{Y}$  na okolí bodu  $p \in M$ . Díky linearitě, stačí ukázat, že  $\nabla_X Y|_p = 0$ , pokud  $Y = 0$  na okolí bodu  $p \in M$ . Uvažujme testovací funkci  $\xi \in C^\infty(M)$  takovou, že  $\text{supp } \xi \subset U$  a  $\xi(p) = 1$ . Jelikož  $Y = 0$  na  $U$ , platí, že  $\xi Y = 0$  na  $M$ . Linearita nad  $\mathbb{R}$  implikuje  $\nabla_X(\xi Y) = \nabla_X(0\xi Y) = 0\nabla_X(\xi Y) = 0$ . Leibnizovo pravidlo pak dává

$$0 = \nabla_X(\xi Y) = (X\xi)Y + \xi\nabla_X Y.$$

Z toho nakonec dostáváme požadované tvrzení  $\nabla_X Y|_p = -(X\xi)Y|_p = 0$ , poněvadž  $\xi(p) = 1$  a  $Y = 0$  na  $\text{supp } \xi$ .

**Lokálnost v 2. složce.** Nyní uvažujme lokálnost v první složce, t.j.  $Y = \tilde{Y} \in \mathcal{T}(M)$  je libovolné vektorové pole a chceme ukázat, že  $\nabla_X Y|_p = \nabla_{\tilde{X}} Y|_p$ , pokud  $X = \tilde{X}$  na okolí bodu  $p \in M$ . Díky linearitě, stačí ukázat, že  $\nabla_X Y|_p = 0$ , pokud  $X = 0$  na okolí bodu  $p \in M$ . Obdobně jako výše linearita nad  $\mathbb{R}$  implikuje  $\nabla_{\xi X}(Y) = 0$ . Linearita nad  $C^\infty(M)$  pak dává

$$0 = \nabla_{\xi X}(Y) = \xi\nabla_X Y,$$

odkud rovnou  $\nabla_X Y|_p = 0$ , poněvadž  $\xi(p) = 1$ .

**Lokálnost v obou složkách.** Nakonec díky linearitě platí

$$\nabla_X Y|_p = \underbrace{\nabla_{X-\tilde{X}} Y|_p}_{=0} + \nabla_{\tilde{X}} Y|_p = \underbrace{\nabla_{\tilde{X}}(Y - \tilde{Y})|_p}_{=0} + \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_p,$$

což je obecné tvrzení, jež jsme chtěli dokázat.  $\square$

Jedná se dokonce o **superlokální operátor v první složce** v tomto smyslu:

**Tvrzení 2.3.**  $\forall X, \tilde{X}, Y \in \mathcal{T}(M)$ ,

$$X_p = \tilde{X}_p \quad \implies \quad \nabla_X Y|_p = \nabla_{\tilde{X}} Y|_p.$$

*Důkaz.* Díky linearitě, stačí ukázat, že  $\nabla_X Y|_p = 0$ , pokud  $X_p = 0$ . Zvolme souřadnicové okolí  $U$  bodu  $p \in M$  se souřadnicemi  $x$ . Potom

$$\nabla_X Y|_p = \nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial x^i}} Y|_p = X^i(p) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} Y|_p = 0.$$

Zde první rovnost využívá Tvrzení 2.2 (díky lokálnosti se lze při výpočtu  $\nabla_X Y|_p$  omezit na  $U$ ) a druhá rovnost je linearita nad  $C^\infty(M)$  v první složce.  $\square$

Je-li dán lokální repér  $(E_1, \dots, E_n)$  pro  $TM$  na otevřené množině  $U \subset M$ , pak existuje  $n^3$  hladkých funkcí  $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i, j, k = 1, \dots, n$ ) zvaných *Christoffelovy symboly*, jež splňují rozklad do báze

$$\nabla_{E_i} E_j =: \Gamma_{ij}^k E_k.$$

Pro libovolná vektorová pole  $X = X^i E_i$  a  $Y = Y^i E_i$  pak z vlastností konexe snadno odvodíme vztah

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \nabla_X (Y^j E_j) = (XY^j) E_j + Y^j \nabla_X E_j \\ &= (XY^j) E_j + Y^j \nabla_{X^i E_i} E_j = (XY^j) E_j + Y^j X^i \nabla_{E_i} E_j \\ &= (XY^k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) E_k.\end{aligned}$$

Speciálně pro souřadnicový repér máme

$$\nabla_X Y = \left( X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (2.1)$$

Vidíme, že akce  $\nabla$  na  $U$  je zcela určena Christoffelovými symboly, symbolicky:

$$\nabla \quad \xleftrightarrow{1-1} \quad \{\Gamma_{ij}^k\}_{i,j,k=1}^n.$$

Užitím této korespondence a rozkladu jedničky vidíme, že pro každou varietu existuje afinní konexe (také vidíme, že je jich nekonečně mnoho).

**Příklad 2.4** (Eukleidovská konexe). Na eukleidovském prostoru definujeme *eukleidovskou konexi*  $\bar{\nabla}$  předpisem

$$\bar{\nabla}_X Y := (XY^j) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

kde  $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}$ . Odpovídající Christoffelovy symboly jsou zřejmě identicky rovny nule,  $\bar{\Gamma}_{ij}^k = 0$ .  $\bar{\nabla}_X Y$  je tedy vektorové pole, jehož komponenty jsou směrové derivace komponent  $Y$  ve směru  $X$ .  $\diamond$

## 2.2 Kovariantní derivace podél křivek

Nechť  $\gamma$  je hladká křivka na varietě  $M$ , tedy hladké zobrazení  $\gamma : I \rightarrow M$ , kde  $I$  je libovolný interval. *Tečný vektor* (neboli *rychlost*)  $\gamma'(t_0)$  v bodě  $t_0 \in I$  je invariantně definovaný přes tečné zobrazení

$$\gamma'(t_0) = \gamma_* \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \in T_{\gamma(t_0)} M,$$

kde  $\frac{d}{dt} \Big|_{t_0}$  je standardní souřadnicová báze pro  $T_{t_0} I$ , tedy bereme mapu  $t : I \rightarrow \mathbb{R} : \{t \mapsto t\}$ .

*Vektorové pole podél křivky*  $\gamma : I \rightarrow M$  je zobrazení

$$V : I \rightarrow TM \quad \text{splňující} \quad \forall t \in I, \quad V(t) \in T_{\gamma(t)} M.$$

Množinu všech hladkých vektorových polí označíme symbolem  $\mathcal{T}(\gamma)$ . Rychlost (tečný vektor ke křivce) je kanonickým příkladem vektorového pole podél křivky. Jiným příkladem je normálový vektor.

Všimněte si, že vektorové pole podél křivky  $\gamma$  na  $M$  není nezbytně rozšiřitelné na vektorové pole variety  $M$  (a to ani lokálně). Řekneme, že  $V \in \mathcal{T}(\gamma)$  je *rozšiřitelné* vektorové pole podél křivky  $\gamma : I \rightarrow M$ , pokud existuje  $\tilde{V} \in \mathcal{T}(M)$  (definované alespoň na okolí obrazu křivky) takové, že  $\tilde{V}_{\gamma(t)} = V(t)$  pro všechna  $t \in I$ .

Pokud  $V \in \mathcal{T}(\gamma)$  je rozšiřitelné vektorové pole podél křivky  $\gamma : I \rightarrow M$ , má smysl definovat jiné vektorové pole  $D_t V$  podél křivky  $\gamma$  předpisem

$$(D_t V)(t) := \nabla_{\gamma'(t)} \tilde{V} \Big|_{\gamma(t)},$$

jemuž budeme říkat *kovariantní derivace  $V$  podél  $\gamma$* . Je ovšem třeba ukázat, že definice nezávisí na volbě rozšíření. Následující tvrzení říká mnohem víc; vskutku, umožňuje nám uvažovat kovariantní derivaci vektorových polí, jež jsou definována pouze podél  $\gamma$  (nejsou nezbytně rozšiřitelná).

**Tvrzení 2.5.** *Nechť  $\nabla$  je afinní konexe na  $M$ .*

$$\forall \gamma : I \rightarrow M, \quad \exists! D_t : \mathcal{T}(\gamma) \rightarrow \mathcal{T}(\gamma)$$

*splňující následující vlastnosti:*

$$(a) \quad \forall V_1, V_2 \in \mathcal{T}(\gamma), a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \quad (\text{linearita nad } \mathbb{R})$$

$$D_t(a_1 V_1 + a_2 V_2) = a_1 D_t V_1 + a_2 D_t V_2;$$

$$(b) \quad \forall V \in \mathcal{T}(\gamma), f \in C^\infty(I), \quad (\text{Leibnizovo pravidlo})$$

$$D_t(fV) = f'V + fD_t V;$$

$$(c) \quad \forall \text{rozšiřitelné } V \in \mathcal{T}(\gamma), \quad (\text{souvislost s konexí})$$

$$(D_t V)(t) = \nabla_{\gamma'(t)} \tilde{V} \Big|_{\gamma(t)}.$$

*Důkaz.* Nejdříve ukažme jednoznačnost takového operátoru  $D_t$ . Nechť  $t_0 \in I$  a uvažujme souřadnicový systém  $(x, U)$  variety  $M$  takový, že  $\gamma(t_0) \in U$ . Pro  $V \in \mathcal{T}(\gamma)$  a  $t$  blízko  $t_0$  můžeme psát

$$V(t) = V^j(t) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_{\gamma(t)} \quad \text{a} \quad \gamma'(t) = \gamma^{j'}(t) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_{\gamma(t)},$$

kde souřadnicové funkce  $V^k$  a  $\gamma^{j'}(t) := (x^j \circ \gamma)'(t)$  jsou jednoznačně určeny. Z vlastností (a)–(b) plyne

$$(D_t V)(t) = V^{j'}(t) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_{\gamma(t)} + V^j(t) D_t \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_{\gamma(t)}.$$

Z vlastnosti (c) pak plyne

$$D_t \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_{\gamma(t)} = \nabla_{\gamma'(t)} \frac{\partial}{\partial x^j} = \gamma^{i'}(t) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \Big|_{\gamma(t)} \frac{\partial}{\partial x^j} = \gamma^{i'}(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\gamma(t)}.$$

Dohromady tedy dostáváme lokální formulku

$$(D_t V)(t) = \left( V^{k'}(t) + \gamma^{i'}(t) V^j(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\gamma(t)}, \quad (2.2)$$

jež je určena jednoznačně.

Nyní ukažme existenci. Pokud je obraz křivky  $\gamma(I)$  pokryt jednou souřadnicovou mapou, *definujeme*  $D_tV$  formulkou (2.2) (a požadované vlastnosti (a)–(c) je jednoduché ověřit). V obecném případě pokryjeme  $\gamma(I)$  souřadnicovými mapami a definujeme  $D_tV$  formulkou (2.2) v každé mapě. Kompatibilita na překrytích plyne z jednoznačnosti.  $\square$

### Poznámky 2.6.

(1) Poněvadž nepředpokládáme, že  $\gamma$  je regulární, Tvzení 2.5 přiřazuje poli  $V \in \mathcal{T}(\gamma)$  hodnotu  $(D_tV)(t)$  i v bodech  $t$ , kde  $\gamma'(t) = 0$ . Tato hodnota není nezbytně nulová. Extrémním příkladem je konstantní křivka  $\gamma : I \rightarrow M : \{t \mapsto p \in M\}$ . Pak vektorové pole  $V \in \mathcal{T}(\gamma)$  je křivka v  $T_pM$  a  $D_tV$  je obyčejná derivace této křivky.

(2) Pokud je  $\gamma : I \rightarrow M$  regulární, což zaručuje, že obraz  $\gamma((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon))$  je vložená podvarieta  $M$  pro  $t_0 \in I$  a dostatečně malé  $\varepsilon > 0$ , pak vždy můžeme psát  $V(t) = \tilde{V}|_{\gamma(t)}$  na okolí bodu  $\gamma(t_0)$ , kde  $\tilde{V} \in \mathcal{T}(M)$ . Avšak toto rozšíření  $\tilde{V}$  není jednoznačné, tudíž podmínka (c) sama o sobě neurčuje  $D_tV$ . Potřebujeme rovněž podmínky (a)–(b), jež implikují superlokálnost  $D_t$ . Vskutku, formulka (2.2) ukazuje, že pro výpočet  $D_tV$  je relevantní pouze funkce  $t \mapsto \tilde{V}|_{\gamma(t)}$ .

## 2.3 Geodetiky

Kovariantní derivace  $D_t$  umožňuje definovat *zrychlení* křivky  $\gamma : I \rightarrow M$  coby vektorové pole  $t \mapsto D_t\gamma'(t)$ . Zobecnění přímek v eukleidovském prostoru (coby křivek s nulovým zrychlením) na variety je pak přímočaré.

**Definice 2.7.**  $\gamma$  je *geodetika*  $\iff D_t\gamma' = 0$ .

V lokálních souřadnicích  $x$  pišme  $\gamma^i := x^i \circ \gamma$ . Pak rovnice pro geodetiku zní

$$\gamma^{k''}(t) + \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \gamma^{i'}(t) \gamma^{j'}(t) = 0. \quad (2.3)$$

**Příklad 2.8** (Geodetiky v  $\mathbb{R}^n$ ). Na varietě  $\mathbb{R}^n$  s eukleidovskou konexí ( $\bar{\Gamma}_{ij}^k = 0$ ) máme ( $\forall t \in I$ )

$$\begin{aligned} D_t\gamma'(t) = \gamma^{k''}(t) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\gamma(t)} = 0 &\iff \forall k, \quad \gamma^{k''}(t) = 0 \\ &\iff \forall k, \quad \underbrace{\gamma^{k'}(t) = C_1}_{\text{konstantní rychlost}} \wedge \underbrace{\gamma^k(t) = C_1 t + C_2}_{\text{přímka}}. \end{aligned}$$

Geodetiky v  $\mathbb{R}^n$  jsou tedy přímky s konstantní rychlostí (definice křivky v sobě zahrnuje parametrizaci).  $\diamond$

Klasické věty o existenci a jednoznačnosti řešení obyčejných diferenciálních rovnic implikují následující *lokální* existenci a jednoznačnost geodetik.

**Věta 2.9** (Existence a jednoznačnost geodetik).

$$\forall p \in M, V \in T_p M, \quad \exists! \underbrace{\gamma : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow M}_{\text{geodetika}} \quad \begin{cases} \gamma(t_0) = p, \\ \gamma'(t_0) = V. \end{cases}$$

Všimněte si, že zde nevyklučujeme možnost  $V = 0$ , kdy geodetika  $\gamma$  bude konstantní křivka (definovaná pro libovolně velké  $\varepsilon$ )  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M : \{t \mapsto p\}$ .

*Maximální geodetika* s počátečním bodem  $p \in M$  a s počáteční rychlostí  $V \in T_p M$  je taková geodetika  $\gamma : I \rightarrow M$ , kde  $I \subset \mathbb{R}$  je (otevřený) interval, jež nemůže být prodloužena na větší interval; budeme značit  $\gamma_V$  (bod  $p$  nemusí být specifikován, jelikož ten lze zjistit vztahem  $p = \pi(V)$ , kde  $\pi : TM \rightarrow M$  je přirozená projekce). Definice je to dobrá, poněvadž Věta 2.9 zaručuje, že libovolné dvě geodetiky se shodují na společném definičním oboru. Rovněž plyne, že interval  $I$  je nezbytně otevřený.

## 2.4 Paralelní přenos

Nechť  $V \in \mathcal{T}(\gamma)$  je vektorové pole podél křivky  $\gamma : I \rightarrow M$ .

**Definice 2.10.**  $V$  je *paralelní podél*  $\gamma$   $\iff D_t V = 0$ .

Geodetika je tedy křivka, jež je charakterizována tím, že její tečný vektor je paralelní podél této křivky:

$$\gamma \text{ je geodetika} \iff \gamma' \text{ je paralelní podél } \gamma.$$

Následující věta je analogií Věty 2.9. Ovšem nyní dostáváme *globální* tvrzení, poněvadž se v pozadí jedná o *lineární* obyčejnou diferenciální rovnici.

**Věta 2.11** (Paralelní přenos).

$$\forall \gamma : I \rightarrow M, V_0 \in T_p M, t_0 \in \mathbb{R}, \quad \exists! \text{ paralelní vektorové pole } V \text{ podél } \gamma, \quad V(t_0) = V_0.$$

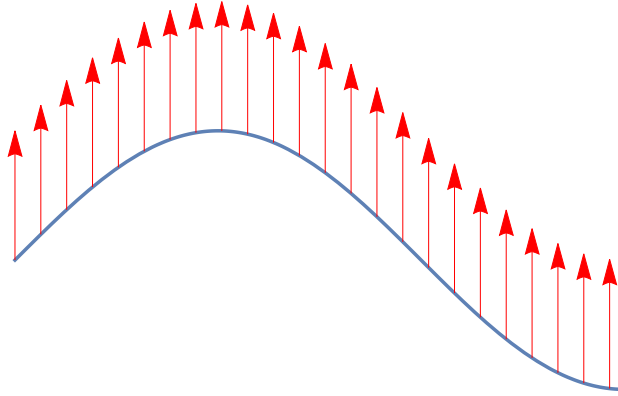
Vektorovému poli  $V$  z této věty budeme říkat *paralelní přenos* vektoru  $V_0$  podél  $\gamma$ .

**Příklad 2.12** (Paralelní přenos v  $\mathbb{R}^n$ ). Pro křivku  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  a vektorové pole  $V(t) = V^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t)} \in \mathcal{T}(\gamma)$  máme

$$(D_t V)(t) = V^{k'}(t) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\gamma(t)} = 0 \iff \forall k, \quad \underbrace{V^k(t)}_{\text{konstantní komponenty}} = C$$

Paralelní přenos daného vektoru  $V_0$  podél křivky  $\gamma$  v  $\mathbb{R}^n$  tedy vede ke konstantnímu vektorovému poli v  $\mathbb{R}^n$ , t.j. ke standardnímu obrázku *paralelního* vektorového pole.  $\diamond$



Obrázek 2.1: Paralelní přenos podél křivky v  $\mathbb{R}^n$ .

Paralelní přenos vysvětluje termín “konexe”, t.j. propojení blízkých tečných prostorů, a to skrze zobrazení

$$P_{t_0 t_1} : T_{\gamma(t_0)}M \rightarrow T_{\gamma(t_1)}M : \{V_0 \mapsto V(t_1)\},$$

kde  $V$  je paralelní vektorové pole podél  $\gamma$ . Jedná se o (lineární) izomorfismus, jelikož jeho inverze je paralelní transport podle inverzně přeparametrizované křivky  $t \mapsto \gamma(-t)$ .

### Tvrzení 2.13.

$$(D_t V)(t_0) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{P_{t_0 t_1}^{-1} V(t_1) - V(t_0)}{t_1 - t_0}$$

*Důkaz.* Nechtě  $(E_1^0, \dots, E_n^0)$  je báze v  $T_{\gamma(t_0)}M$ . Nechtě  $(E_1(t), \dots, E_n(t))$  jsou odpovídající paralelně přenesené vektory podél  $\gamma$  v bodě  $t$ . Poněvadž  $E_j(t) = P_{t_0 t} E_j^0$  a  $P_{t_0 t}$  je izomorfismus, víme, že se jedná opět o bázi v  $T_{\gamma(t)}M$ . Pišme  $V(t) =: V^i(t)E_i(t)$ . Potom máme

$$\begin{aligned} \frac{P_{t_0 t_1}^{-1} V(t_1) - V(t_0)}{t_1 - t_0} &= \frac{V^i(t_1) P_{t_0 t_1}^{-1} E_i(t_1) - V^i(t_0) E_i(t_0)}{t_1 - t_0} \\ &= \frac{V^i(t_1) E_i(t_0) - V^i(t_0) E_i(t_0)}{t_1 - t_0} \\ &= \frac{V^i(t_1) - V^i(t_0)}{t_1 - t_0} E_i(t_0) \\ &\xrightarrow{t_1 \rightarrow t_0} V^{i'}(t_0) E_i(t_0) = D_t[V^i(t) E_i(t)]|_{t=t_0} = (D_t V)(t_0), \end{aligned}$$

kde předposlední rovnost platí díky tomu, že  $E_j$  jsou paralelně přenesené vektory.  $\square$

## 2.5 Kovariantní derivace tenzorů

**Definice 2.14.** Nechtě  $T \in \mathcal{T}^k(M)$  je tenzor řádu  $k \in \mathbb{N}$ . *Kovariantní derivace*  $\nabla T$  tenzoru  $T$  je tenzor řádu  $k + 1$  definovaný vztahem,  $\forall Y_1, \dots, Y_k, X \in \mathcal{T}(M)$ ,

$$\begin{aligned} (\nabla T)(Y_1, \dots, Y_k, X) &:= X(T(Y_1, \dots, Y_k)) \\ &\quad - T(\nabla_X Y_1, \dots, Y_k) - \dots - T(Y_1, \dots, \nabla_X Y_k). \end{aligned}$$

*Kovariantní derivace*  $T \in \mathcal{T}^k(M)$  podle  $X \in \mathcal{T}(M)$  je tenzor  $\nabla_X T$  řádu  $k$  definovaný vztahem,  $\forall Y_1, \dots, Y_k \in \mathcal{T}(M)$ ,

$$(\nabla_X T)(Y_1, \dots, Y_k) := (\nabla T)(Y_1, \dots, Y_k, X).$$

Nyní uveďme několik argumentů, jež ukazují, že uvedená definice je právě ta přirozená.

- **Skaláry** Ve speciálním případě  $k = 0$ , kdy tenzory řádu 0 identifikujeme se skalárními funkcemi, dostáváme

$$(\nabla f)(X) = Xf = \nabla_X f, \quad (2.4)$$

kde  $f \in \mathcal{T}^0(M) = C^\infty(M)$ . Připomenutím definice diferenciálu (0.10), dostáváme rovnost  $\nabla f = df$ . Kovariantní derivace skaláru je obyčejná směrová derivace.

Definujme *kovariantní hessián* funkce  $f$  předpisem  $\nabla^2 f := \nabla(\nabla f)$ , což je podle definice tenzor řádu 2. Pro libovolná vektorová pole  $X, Y \in \mathcal{T}(M)$  máme vztah

$$\nabla^2 f(X, Y) = (\nabla_Y df)(X) = Ydf(X) - df \nabla_Y X = Y(Xf) - (\nabla_Y X)f.$$

V lokálních souřadnicích

$$\nabla^2 f(X, Y) = X^i Y^j \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ji}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right). \quad (2.5)$$

- **Funkcionály** Obecněji uvažujme  $\omega \in \mathcal{T}^1(M)$ . Pro libovolná vektorová pole  $X, Y \in \mathcal{T}(M)$  máme vztah

$$(\nabla_X \omega)(Y) = (\nabla \omega)(Y, X) = X\omega(Y) - \omega(\nabla_X Y). \quad (2.6)$$

Funkci  $\omega(Y)$  lze chápat jako kontrakci  $\text{tr}(\omega \otimes Y)$  (tenzorový součin funkcionálu a vektoru lze zavést analogicky jako (0.11)) a obdobně pro ostatní akce funkcionálů vystupujících v této rovnosti. Zároveň  $X\omega(Y)$  je kovariantní derivace skaláru  $\omega(Y)$ . Definiční vztah (2.6) lze tedy přepsat takto

$$\nabla_X \text{tr}(\omega \otimes Y) = \text{tr}(\nabla_X \omega \otimes Y) + \text{tr}(\omega \otimes \nabla_X Y).$$

Definice 2.14 tedy plyne přirozeně, pokud máme definované kovariantní derivace vektorů a skalárů a zároveň vyžadujeme “komutativitu s kontrakcemi” a “Leibnizovo pravidlo vzhledem k tenzorovému součinu”. Tímto způsobem lze rozšířit pojem kovariantní derivace na obecné tenzory, nejen kovariantní.

- **Paralelní repér** Pro obecné kovariantní tenzory uvažujme bod  $p \in M$ , pole  $X \in \mathcal{T}(M)$  a křivku  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  s  $\varepsilon > 0$  splňující

$$\gamma(0) = p \quad \text{a} \quad \gamma'(t) = X_{\gamma(t)}.$$

Podle dříve zavedené terminologie (viz Kapitola 0.15), křivka  $\gamma$  je trajektorie vektorového pole  $X$ , jež prochází bodem  $p$  v čase nula. Nechť  $(E_1^0, \dots, E_n^0)$  je báze v  $T_p M$  a nechť  $(E_1(t), \dots, E_n(t))$  jsou odpovídající paralelně přenesené vektory podél  $\gamma$  v bodě  $t$ . Pro souřadnice  $T$  v tomto repéru píšme

$$\begin{aligned} T_{i_1 \dots i_k}(t) &:= T(E_{i_1}, \dots, E_{i_k})|_{\gamma(t)}, \\ (\nabla_X T)_{i_1 \dots i_k}(t) &:= (\nabla_X T)(E_{i_1}, \dots, E_{i_k})|_{\gamma(t)}. \end{aligned}$$

Potom Definice 2.14 implikuje

$$(\nabla_X T)_{i_1 \dots i_k}(t) = T'_{i_1 \dots i_k}(t) - T(\nabla_X E_{i_1}, \dots, E_{i_k})|_{\gamma(t)} - \dots - T(E_{i_1}, \dots, \nabla_X E_{i_k})|_{\gamma(t)} .$$

Poněvadž  $\nabla_X E_{i_j}|_{\gamma(t)} = 0$ , dostáváme

$$(\nabla_X T)_{i_1 \dots i_k} = T'_{i_1 \dots i_k} .$$

V tomto speciálním repéru jsou tedy souřadnice kovariantní derivace  $\nabla_X T$  obyčejné derivace souřadnic  $T$ .

Nakonec zmiňme, že v souřadnicích bývá zvykem kovariantní derivaci značit středníkem. Parciální derivace se pak označují čárkou. Vztah (2.4) tedy můžeme přepsat takto

$$\nabla f = f_{;i} dx^i, \quad \text{kde} \quad f_{;i} = f_{,i} .$$

Formulku pro hessián (2.5) lze přepsat takto

$$\nabla^2 f = f_{;ij} dx^i \otimes dx^j, \quad \text{kde} \quad f_{;ij} = f_{,ij} - \Gamma_{ji}^k f_{,k} .$$

### 3 Riemannovská konexe

Prozatím nemáme žádný vztah mezi konexí a metrikou. Naším cílem je nyní zvolit speciální konexi, jež je “adaptovaná” na metriku. Naši motivací, jak by tato konexe měla vypadat, jsou podvariety v eukleidovském prostoru.

#### 3.1 Motivace: Tečná konexe podvariet

Nechť  $M^n \subset \mathbb{R}^m$  je vložená podvarieta a  $\iota : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  je odpovídající vložení. Definujme *tečnou konexi* na  $M$  předpisem

$$\nabla^\top : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M) : \left\{ (X, Y) \mapsto \pi^\top(\bar{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}|_M) \right\},$$

kde  $\bar{\nabla}$  je eukleidovská konexe v  $\mathbb{R}^m$  (viz Příklad 2.4), symboly  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^m)$  značíme libovolné rozšíření vektorových polí  $X, Y \in \mathcal{T}(M)$  na vektorová pole v  $\mathcal{T}(\mathbb{R}^m)$  a hladký homeomorfismus

$$\pi^\top : T\mathbb{R}^m|_M \rightarrow TM$$

v libovolném bodě  $p \in M$  definuje ortogonální projekci  $\pi_p^\top : T_p\mathbb{R}^m \rightarrow T_pM$ . Budeme zkracovat  $\pi^\top Z := Z^\top$ . Rovněž zavádíme  $Z^\perp := Z \ominus Z^\top$  a odpovídající projektor do normálového prostoru  $M$  značíme  $\pi^\perp$ .

Je  $\nabla^\top$  dobře definovaná?

- $\nabla_X^\top Y$  nezávisí na volbě rozšíření  $X$ , protože  $\bar{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}$  je superlokální v první složce (Tvzení 2.3), odkud  $\bar{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}|_p$  závisí pouze na  $\tilde{X}_p = X_p$ .
- $\nabla_X^\top Y$  nezávisí na volbě rozšíření  $Y$ , protože  $\bar{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}|_p$  závisí pouze na  $\tilde{Y}$  podél křivky, jejíž tečný vektor v  $p$  je  $X_p$  (Poznámka 2.6(2)), a křivku můžeme zvolit ležící v  $M$ .
- Hladkost lze ověřit vyjádřením  $\bar{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}$  v adaptovaném ortonormálním repéru, což je takový ortonormální repér  $(E_1, \dots, E_m)$  na  $T\mathbb{R}^m$ , že  $(E_1, \dots, E_n)$  je ortonormální repér na  $TM$  (viz Lemma 6.1).

Je  $\nabla^\top$  konexe?

- Linearita nad  $C^\infty(M)$  v první složce ( $X$ ) je zřejmá.
- Linearita nad  $\mathbb{R}$  v druhé složce ( $Y$ ) je rovněž zřejmá.
- Zbývá ověřit Leibnizovo pravidlo. Nechť  $X, Y \in \mathcal{T}(M)$ ,  $f \in C^\infty(M)$  a  $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$  je hladké rozšíření funkce  $f$ . Potom

$$\begin{aligned} \nabla_X^\top(fY) &= \pi^\top[\bar{\nabla}_{\tilde{X}}(\tilde{f}\tilde{Y})|_M] \\ &= \pi^\top[(\tilde{X}\tilde{f})\tilde{Y}|_M] + \pi^\top[\tilde{f}\bar{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}|_M] \\ &= (\tilde{X}\tilde{f})|_M \pi^\top[\tilde{Y}|_M] + \tilde{f}|_M \pi^\top[\bar{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}|_M] \\ &= (Xf)Y + f\nabla_X^\top Y, \end{aligned}$$

což je požadovaný vztah. Zde jsme mimo jiné využili linearitu projekce  $\pi^\top$ , vlastnosti  $(\tilde{X}\tilde{f})|_M = (Xf)$  (lze opět využít adaptovaný ortonormální repér a  $E_i\tilde{f}|_M = E_i f$  pro  $i \in \{1, \dots, n\}$ ) a  $\pi^\top[\tilde{Y}|_M] = Y$  (poněvadž  $\tilde{Y}|_M = Y$ ).

Nadále budeme vlnovky vynechávat.

### 3.1.1 Kompatibilita s metrikou

Podívejme se, jak přirozené konexe  $\bar{\nabla}$  a  $\nabla^\top$  působí na riemannovské metriky  $\bar{g}$  a  $g^\top := \iota^*\bar{g}$ .

Začneme eukleidovskou metrikou:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \bar{g}(Y, Z) &= \bar{\nabla}_X(\delta_{ij}Y^iZ^j) = X(\delta_{ij}Y^iZ^j) = X^k \frac{\partial}{\partial x^k}(\delta_{ij}Y^iZ^j) \\ &= X^k \delta_{ij} \left( \frac{\partial Y^i}{\partial x^k} Z^j + Y^i \frac{\partial Z^j}{\partial x^k} \right) \\ &= X(Y^i)\delta_{ij}Z^j + Y^i\delta_{ij}X(Z^j) \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, Z) + \bar{g}(Y, \bar{\nabla}_X Z). \end{aligned}$$

Pokud konexe splňuje takovéto Leibnizovo pravidlo vzhledem k metrice, říkáme, že konexe je *kompatibilní* s metrikou. Eukleidovská konexe je tedy kompatibilní s eukleidovskou metrikou.

Následující výpočet ukazuje, že rovněž tečná konexe je kompatibilní s indukovanou metrikou.

$$\begin{aligned} \nabla_X^\top g^\top(Y, Z)|_p &= Xg^\top(Y, Z)|_p = X\bar{g}(Y, Z)|_p = \bar{\nabla}_X \bar{g}(Y, Z)|_p \\ &= \bar{g}_p(\bar{\nabla}_X Y|_p, Z_p) + \bar{g}_p(Y_p, \bar{\nabla}_X Z|_p) \\ &= \bar{g}_p((\bar{\nabla}_X Y)^\top|_p + (\bar{\nabla}_X Y)^\perp|_p, Z_p) + \bar{g}_p(Y_p, (\bar{\nabla}_X Z)^\top|_p + (\bar{\nabla}_X Z)^\perp|_p) \\ &= \bar{g}_p((\bar{\nabla}_X Y)^\top|_p, Z_p) + \bar{g}_p(Y_p, (\bar{\nabla}_X Z)^\top|_p) \\ &= g^\top(\nabla_X^\top Y, Z) + g^\top(Y, \nabla_X^\top Z)|_p. \end{aligned}$$

### 3.1.2 Symetrie

Eukleidovská konexe je navíc zřejmě *symetrická* v tomto smyslu

$$\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X = [X, Y],$$

kde  $[X, Y] := XY - YX$  je Lieova závorka z Kapitoly 0.15.

Tato symetrie rovněž platí pro tečnou konexi:

$$\begin{aligned} \nabla_X^\top Y - \nabla_Y^\top X|_p &= \pi^\top(\bar{\nabla}_X Y|_p - \bar{\nabla}_Y X|_p) \\ &= \pi^\top[X, Y]|_p \\ &= [X, Y]|_p. \end{aligned}$$

Zde poslední rovnost platí z důvodu, že  $[X, Y]|_p$  je tečný vektor, pokud  $X_p, Y_p$  jsou tečné.

## 3.2 Definice a vlastnosti

Nechť  $M$  je nyní libovolná varieta vybavená riemannovskou metrikou  $g$  a konexí  $\nabla$ .

**Definice 3.1.**  $\nabla$  je *kompatibilní* s  $g$ , pokud  $\forall X, Y, Z \in \mathcal{T}(M)$ ,

$$\nabla_X g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Zde  $\nabla_X g(Y, Z)$  znamená kovariantní derivaci funkce  $g(Y, Z)$  podle  $X$ , tedy  $\nabla_X g(Y, Z) = Xg(Y, Z)$ .

Důležitost kompatibility konexe s metrikou plyne z následujícího tvrzení.

**Tvrzení 3.2.** *Následující vlastnosti jsou ekvivalentní:*

- (i)  $\nabla$  je kompatibilní s  $g$ .
- (ii)  $\nabla g = 0$ .
- (iii)  $\forall \gamma, V, W \in \mathcal{T}(\gamma), \quad \frac{d}{dt} g(V, W) = g(D_t V, W) + g(V, D_t W)$ .
- (iv)  $\forall \gamma, \text{ paralelní } V, W \in \mathcal{T}(\gamma), \quad g(V, W) = \text{const.}$
- (v)  $\forall \gamma, t_0, t_1 \in I, \quad P_{t_0 t_1} : T_{\gamma(t_0)} M \rightarrow T_{\gamma(t_1)} M \text{ je izometrie.}$

Zde  $\gamma : I \rightarrow M : \{t \mapsto \gamma(t)\}$  je křivka.

*Důkaz.* Platnost tvrzení dokážeme jako platnost jednotlivých ekvivalencí.

**(i)  $\Leftrightarrow$  (ii)** Připomenutím Definice 2.14, platí

$$\nabla g(X, Y, Z) = Z(g(X, Y)) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y),$$

odkud dostáváme požadovanou ekvivalenci.

**(i)  $\Leftrightarrow$  (iii)** Implikace  $\Rightarrow$  je zřejmá. Předpokládejme nyní (iii) a necht'  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  je hladká křivka s  $\varepsilon > 0$  splňující  $\gamma(0) = p \in M$  a  $\gamma'(0) = X_p$ . Potom

$$X_p \langle Y, Z \rangle = (\langle Y, Z \rangle \circ \gamma)'(0) = \langle D_t Y, Z \rangle|_p + \langle Y, D_t Z \rangle|_p = \langle \nabla_{X_p} Y, Z \rangle|_p + \langle Y, \nabla_{X_p} Z \rangle|_p.$$

Poněvadž bod  $p$  je libovolný, dostáváme (i).

**(iii)  $\Leftrightarrow$  (iv)** Implikace  $\Rightarrow$  je zřejmá. Pro opačnou implikaci uvažujme křivku  $\gamma : I \rightarrow M$  a bod  $t_0 \in I$ . Zvolme ortonormální bázi  $(E_1^0, \dots, E_n^0)$  tečného prostoru  $T_{\gamma(t_0)} M$ . Necht'  $(E_1(t), \dots, E_n(t))$  jsou odpovídající paralelně přenesené vektory podél  $\gamma$  v bodě  $t \in I$ . Z vlastnosti (iv) plyne, že  $(E_1(t), \dots, E_n(t))$  je ortonormální báze  $T_{\gamma(t)} M$  pro každé  $t \in I$ . Pišme  $V = V^i E_i$  a  $W = W^i E_i$ , kde  $V^i$  a  $W^i$  jsou hladké funkce na  $I$ . Poněvadž  $D_t E_i = 0$ , platí  $D_t V = V^{i'} E_i$  a  $D_t W = W^{i'} E_i$ . Tudíž

$$\langle D_t V, W \rangle + \langle V, D_t W \rangle = V^{i'} W^j \langle E_i, E_j \rangle + V^i W^{j'} \langle E_i, E_j \rangle = (\delta_{ij} V^i W^j)' = \langle V, W \rangle'.$$

**(iv)  $\Leftrightarrow$  (v)** Poněvadž  $\langle V(t_1), W(t_1) \rangle = \langle P_{t_0 t_1} V(t_0), P_{t_0 t_1} W(t_0) \rangle$ , tato ekvivalence je zřejmá.  $\square$

**Definice 3.3.**  $\nabla$  je *symetrická*, pokud  $\forall X, Y \in \mathcal{T}(M)$ ,

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Terminologie je vysvětlena následujícím tvrzením.

**Tvrzení 3.4.** *Nechť  $(M, g)$  je riemannovská varieta s konexí  $\nabla$ . Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní:*

- (i)  $\nabla$  je symetrická.
- (ii)  $\forall$  souřadnicový repér,  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ . (Christoffelovy symboly jsou symetrické)
- (iii)  $\forall f \in C^\infty(M)$ ,  $\nabla^2 f$  je symetrický. (hessián je symetrický)

*Důkaz.* V lokálních souřadnicích pišme  $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  a  $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Potom

$$\begin{aligned} \nabla_X Y - \nabla_Y X &= \left( X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k - Y^i \frac{\partial X^k}{\partial x^i} + Y^i X^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= [X, Y] + X^i Y^j (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \frac{\partial}{\partial x^k}, \end{aligned}$$

odkud plyne ekvivalence (i)  $\Leftrightarrow$  (ii). Ekvivalence s (iii) pak plyne z formulky (2.5). □

U tvrzení (ii) je důležité, že se jedná o souřadnicový repér.

### 3.3 Fundamentální lemma riemannovské geometrie

Symetrie a kompatibilita s metrikou jsou tak užitečné vlastnosti (zvláště pro konstrukci geodetik), že bychom chtěli pracovat s konexemi, jež takové vlastnosti splňují. Existují však takovéto konexe pro libovolnou varietu? Kolik jich je? Následující věta ukazuje, že stav věcí je ideální: Takováto konexe vždy existuje a je určena jednoznačně. Říká se jí *riemannovská* (či *Levi-Civitova*) konexe.

**Věta 3.5** (Fundamentální lemma riemannovské geometrie).

$$\forall (M, g), \quad \exists! \nabla \text{ symetrická a kompatibilní s } g.$$

*Důkaz.* Dokažme jednotlivá tvrzení věty postupně.

**Jednoznačnost** Nechť  $X, Y, Z \in \mathcal{T}(M)$ . Užitím kompatibility s metrikou a symetrie máme následující identity (druhé dvě jsou varianty první po cyklické permutaci):

$$\begin{aligned} \oplus \quad X \langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle, \\ \oplus \quad Y \langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_X Y \rangle + \langle Z, [Y, X] \rangle, \\ \ominus \quad Z \langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y Z \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle. \end{aligned}$$

Odečteme-li poslední identitu od součtu prvních dvou, modré a zelené členy se vyruší a dostaneme vztah

$$X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle = 2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle Z, [Y, X] \rangle - \langle X, [Z, Y] \rangle.$$

Ten můžeme přerovnat takovýmto způsobem

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} \left\{ X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle - \langle Z, [Y, X] \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle \right\}, \quad (3.1)$$

kde pravá strana nezávisí na konexi  $\nabla$ . Pokud je tedy  $\tilde{\nabla}$  jiná konexe, jež je symetrická a kompatibilní s metrikou  $g$ , dostáváme rovnost

$$\langle \nabla_X Y - \tilde{\nabla}_X Y, Z \rangle = 0.$$

Z libovolnosti vektoru  $Z$  dostáváme  $\nabla_X Y = \tilde{\nabla}_X Y$ . Z libovolnosti vektorů  $X, Y$  pak  $\nabla = \tilde{\nabla}$ .

**Existence** Stačí ukázat existenci v jedné libovolné souřadnicové mapě, poněvadž jednoznačnost zaručuje, že konexe zkonstruované na různých mapách se nezbytně shodují na překrytích. V libovolné souřadnicové mapě je vztah (3.1) ekvivalentní rovnosti

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x^j} \left\langle \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial x^k} \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle \right\}$$

poněvadž Lieovy závorky jsou nula pro vektory souřadnicové báze. Připomeneme-li definici koeficientů metriky  $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle$  a Christoffelových symbolů  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^m \frac{\partial}{\partial x^m}$ , je rovnost výše ekvivalentní formulce

$$\Gamma_{ij}^m g_{mk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right\}.$$

Vynásobením obou stran  $g^{kl}$  a povšimnutím si, že  $g_{mk} g^{kl} = \delta_m^l$ , nakonec dostáváme

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{kl} \left\{ \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right\}. \quad (3.2)$$

Tyto Christoffelovy symboly jistě definují konexi ve zvolené souřadnicové mapě. Zbývá ukázat, že je symetrická a kompatibilní s metrikou.

**Symetrie** Poněvadž Christoffelovy symboly definované formulkou (3.2) splňují zřejmou symetrii  $\Gamma_{ij}^l = \Gamma_{ji}^l$ , platí

$$\begin{aligned} \nabla_X Y - \nabla_Y X &= \left( X^l \frac{\partial Y^k}{\partial x^l} + \Gamma_{ij}^k X^i Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k} - \left( Y^l \frac{\partial X^k}{\partial x^l} + \Gamma_{ij}^k Y^i X^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= \left( X^l \frac{\partial Y^k}{\partial x^l} - Y^l \frac{\partial X^k}{\partial x^l} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= [X, Y]. \end{aligned}$$

**Kompatibilita** Podle Tvzení 3.2 stačí ukázat  $\nabla g = 0$ . Užitím formulky (3.2) máme

$$\begin{aligned} g_{ij;k} &= g_{ij,k} - \Gamma_{ki}^l g_{lj} - \Gamma_{kj}^l g_{il} \\ &= g_{ij,k} - \frac{1}{2} g^{lm} (-g_{ki,m} + g_{im,k} + g_{mk,i}) g_{lj} - \frac{1}{2} g^{lm} (-g_{kj,m} + g_{jm,k} + g_{mk,j}) g_{il} \\ &= g_{ij,k} - \frac{1}{2} (-g_{ki,j} + g_{ij,k} + g_{jk,i}) - \frac{1}{2} (-g_{kj,i} + g_{ji,k} + g_{ik,j}) \\ &= g_{ij,k} - g_{ij,k} = 0. \end{aligned}$$

□



Jako bonus tohoto důkazu jsme dostali explicitní formulku (3.2) pro výpočet Christoffelových symbolů riemannovské konexe v libovolné souřadnicové mapě. Připomeneme-li, že jsme se dohodli značit parciální derivace čárkou, můžeme tuto formulku přepsat takto

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{kl} (-g_{ij,k} + g_{jk,i} + g_{ki,j}). \quad (3.3)$$

Tento vztah je snadno zapamatovatelný jako  $\Gamma_{ij}^l = g^{kl} \Gamma_{ijk}$ , kde  $\Gamma_{ijk} := \frac{1}{2}(-g_{ij,k} + g_{jk,i} + g_{ki,j})$  se zkonstruuje tak, že začneme požadovanými indexy s minusem a pak cyklicky permutujeme s plusy.

Geodetiky spočtené vzhledem k riemannovské konexi budeme nazývat *riemannovské geodetiky*. Poněvadž od nynějška budeme vždy pracovat s riemannovskou konexí, budeme obvykle vynechávat přívlastek “riemannovské”. Z Tvrzení 3.2(iv) dostáváme následující důsledek.

**Důsledek 3.6.** *Riemannovské geodetiky mají konstantní rychlost.*

Nakonec argumentujme, že riemannovská konexe je skutečně ta přirozená.

**Tvrzení 3.7** (Přirozenost riemannovské konexe). *Nechť  $\varphi : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$  je izometrie. Potom*

- (i)  $\forall X, Y \in \mathcal{T}(M), \quad \varphi_*(\nabla_X Y) = \tilde{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_* Y;$
- (ii)  $\forall \gamma, \forall V \in \mathcal{T}(\gamma), \quad \varphi_*(D_t V) = \tilde{D}_t \varphi_* V;$
- (iii)  $\gamma$  je geodetika na  $M$   $\left\{ \begin{array}{l} \gamma(0) = p \\ \dot{\gamma}(0) = V \end{array} \right\} \implies \tilde{\gamma} := \varphi \circ \gamma$  je geodetika na  $\tilde{M}$   $\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\gamma}(0) = \varphi(p) \\ \dot{\tilde{\gamma}}(0) = \varphi_* V \end{array} \right\}.$

*Důkaz.*

**ad (i)** Definujme *indukovanou (pull-back) konexi*

$$\varphi^* \tilde{\nabla} : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M) : \{(X, Y) \mapsto \varphi_*^{-1} \tilde{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_* Y\}.$$

Přenecháváme čtenáři důkaz, že se skutečně jedná o konexi, jež je navíc symetrická a kompatibilní s  $g$ . Potom požadované tvrzení plyne z fundamentální Věty 3.5.

**ad (ii)** Definujme *indukovanou kovariantní derivaci podél  $\gamma$*  analogickým vztahem

$$\varphi^* D_t : \mathcal{T}(\gamma) \rightarrow \mathcal{T}(\gamma) : \{V \mapsto \varphi_*^{-1} \tilde{D}_t \varphi_* V\}.$$

Přenecháváme čtenáři důkaz, že  $\varphi^* D_t = D_t$ .

**ad (iii)** Poslední tvrzení je důsledkem předcházejícího. □

### 3.4 Geodetiky na modelových prostorech

Podívejme se, jak vypadají geodetiky na modelových prostorech.

**Příklad 3.8** (Rotační plochy). Připomenutím Příkladu 1.12 a užitím vztahu (3.3) snadno ověříme, že všechny Christoffelovy symboly v souřadnicích  $(s, \varphi)$  jsou nula kromě

$$\Gamma_{22}^1 = -rr' \quad \text{a} \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{r'}{r}.$$

Odtud snadno odvodíme geodetické rovnice (viz (2.3))

$$s''(t) - r(s(t))r'(s(t))\varphi'(t)^2 = 0 \quad \text{a} \quad \varphi''(t) + 2\frac{r'(s(t))}{r(s(t))}s'(t)\varphi'(t) = 0. \quad (3.4)$$

Pro druhou diferenciální rovnici okamžitě nacházíme obecné řešení

$$\varphi'(t) = \frac{c_1}{r(s(t))^2}$$

kde  $c_1 \in \mathbb{R}$ . Zaměříme se na geodetiky začínající v pólu  $p := (0, 0, 0)$  s rychlostí  $V := (\cos \varphi_0, \sin \varphi_0, 0)$ , kde  $\varphi_0 \in (0, 2\pi)$ . Poněvadž hledaná křivka  $\gamma(t) := \pi(s(t), \varphi(t))$  by měla v čase  $t = 0$  procházet pólem, nezbytně  $\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = 0$ . Odtud  $c_1 = 0$ , poněvadž  $r(0) = 0$  a hledané řešení musí být hladké, alespoň pro malé časy. Dosazením tohoto výsledku  $\varphi' = 0$  do první rovnice v (3.4) dostáváme  $s''(t) = 0$ , což vede na obecné řešení

$$s(t) = c_2 t + c_3,$$

kde  $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ . Opět, z počáteční podmínky  $\gamma(0) = p$  dostáváme  $c_3 = 0$ . Tečný vektor splňuje

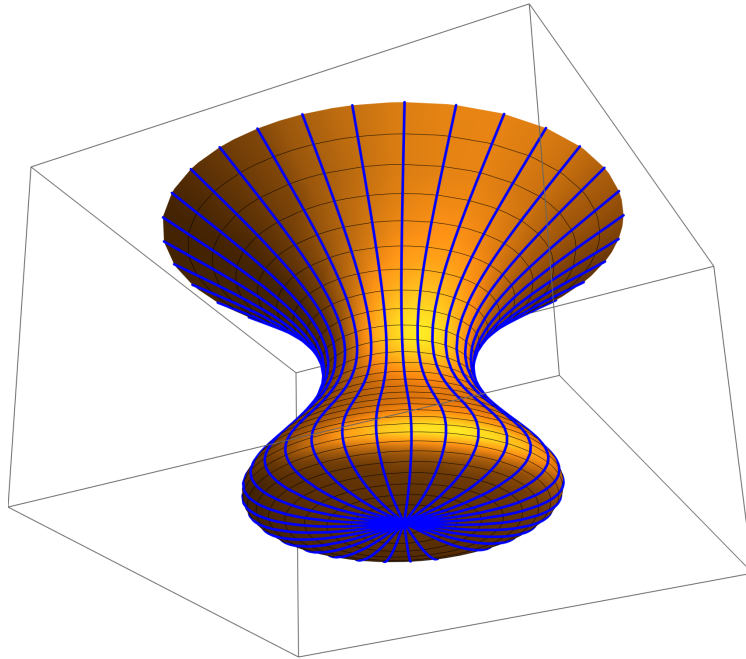
$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} r'(s(t))s'(t) \cos \varphi(t) \\ r'(s(t))s'(t) \sin \varphi(t) \\ z'(s(t))s'(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -r(s(t))\varphi'(t) \sin \varphi(t) \\ r(s(t))\varphi'(t) \cos \varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Připomeňme, že  $r(0) = 0 = z'(0) = 0$  a  $r'(0) = 1$ . Podmínka  $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma'(t) = V_0$  pak implikuje  $c_2 = 1$ . Tedy hledané geodetiky jsou poledníky  $\varphi(t) = \varphi_0$  parametrizované obloukem (viz modré křivky vycházející z pólu na Obrázku 3.1).  $\diamond$

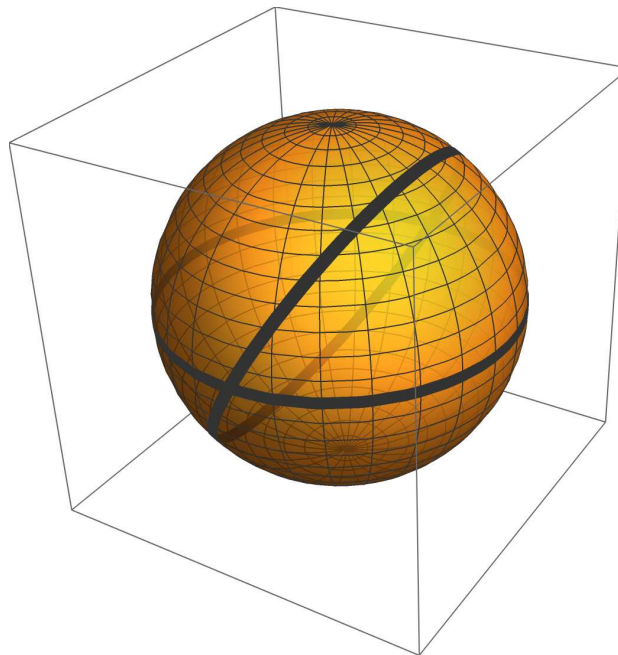
**Příklad 3.9** (Sféra). Dvojdimenziální sféra  $\mathbb{S}^2$  z Příkladu 1.8 je speciální příklad rotačně symetrických ploch uvažovaných v Příkladech 1.12 a 3.8. Díky homogenosti a izotropnosti sféry lze každý její bod považovat za pól. Tudíž geodetiky na sféře jsou velké kružnice (například rovník, viz Obrázek 3.2).  $\diamond$

**Příklad 3.10** ( $n$ -sféra). Počítání Christoffelových symbolů v hypersférických souřadnicích pro  $n$ -sféru  $\mathbb{S}^n$  je poměrně pracné, jakmile  $n \geq 3$ . To, že její geodetiky jsou výlučně velké kružnice, lze však ukázat i alternativním argumentem. Uvažujme geodetiku  $\gamma(t) \cong (x^1(t), \dots, x^{n+1}(t))$  startující ze severního pólu  $N$  na hypersféře  $\mathbb{S}^n$  s počáteční rychlostí  $\frac{\partial}{\partial x^i}$ . Předpokládejme, že geodetika není poledník  $\{x^2 = \dots = x^{n+1} = 0\}$ . Pak existuje čas  $t_0 > 0$  a  $i \in \{2, \dots, n+1\}$  takový, že  $x^i(t_0) \neq 0$ . Lineární zobrazení

$$\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} : \{(x^1, \dots, x^i, \dots, x^{n+1}) \mapsto (x^1, \dots, -x^i, \dots, x^{n+1})\}$$



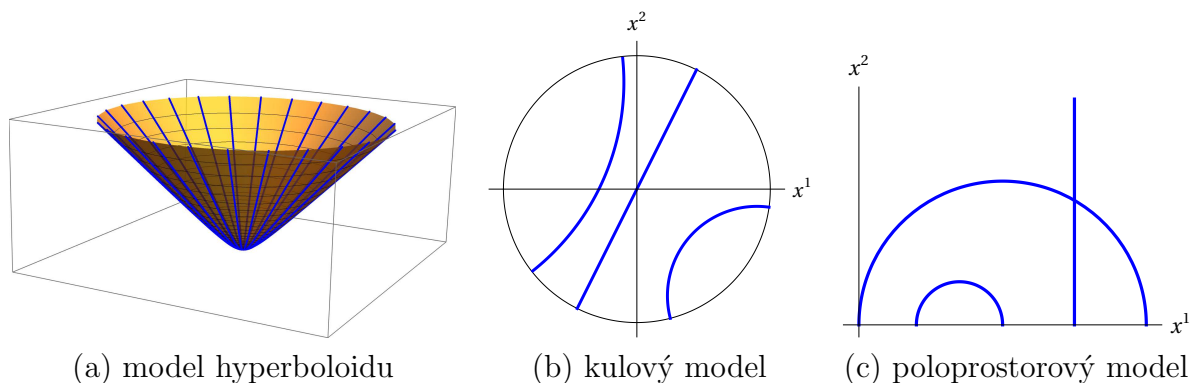
Obrázek 3.1: Geodetiky vycházející z pólu rotační plochy.

Obrázek 3.2: Tlusté modré křivky coby příklady velkých kružnic na sféře  $\mathbb{S}^2$ .

je izometrie sféry, jež zachovává pól  $N$  a počáteční rychlost  $\gamma'(0)$ . Podle Tvrzení 3.7 je  $\varphi \circ \gamma$  rovněž geodetika se stejným počátkem a počáteční rychlostí, avšak  $(\varphi \circ \gamma)(t_0) \neq \gamma(t_0)$ , což je spor s Větou 2.9. Díky homogenosti a izotropnosti  $n$ -sféry lze tento argument rozšířit na jakýkoli její bod a počáteční rychlost.  $\diamond$

**Příklad 3.11** (Hyperbolický prostor). Připomeňme definici hyperbolického prostoru  $\mathbb{H}^n$

z Příkladu 1.11. Podobně jako v předchozím příkladu lze ukázat, že v reprezentaci modelem hyperboloidu jsou geodetiky velké hyperboly (čili průniky horního listy dvojlistého hyperboloidu s rovinami procházejícími počátkem), viz například tlusté modré křivky na Obrázku 3.3.(a). V Poincarého kulovém modelu se jedná o části kružnic, jež protínají hypersféru  $\partial\mathbb{B}^n$  transversálně (včetně degenerovaného případu úsečky procházející středem koule  $\mathbb{B}^n$ ), viz Obrázek 3.3.(b). V Poincarého poloprostorovém modelu se jedná o polokružnice se středem na nadrovině  $\{x^n = 0\}$  (včetně degenerovaného případu polopřímek), viz Obrázek 3.3.(c).  $\diamond$



Obrázek 3.3: Geodetiky v hyperbolickém prostoru  $\mathbb{H}^n$ .

### 3.5 Laplacián

Nechť  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  je hladká funkce. Připomeňme definici gradientu  $\text{grad } f$  z kapitoly 1.4.1, zvláště pak vyjádření (1.6) v lokálních souřadnicích.

Pro hladké vektorové pole  $X \in \mathcal{T}(M)$  definujeme *divergenci*  $X$  vztahem

$$\text{div } X := \text{tr } \nabla X,$$

kde  $\nabla X : \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M) : \{Y \mapsto \nabla_Y X\}$  je *totální kovariantní derivace*  $X$ . V lokálních souřadnicích  $x$  platí

$$\text{div } X = \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^i X^j = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{|g|} X^j),$$

kde  $|g| := \det(g_{ij})$ . Zde první rovnost je zřejmá z (2.1), zatímco druhá plyne z následujícího tvrzení.

**Lemma 3.12.**  $\Gamma_{ij}^i = (\log \sqrt{|g|})_{,j}$ .

*Důkaz.* Z formulky (3.3) dostáváme

$$\Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2} g^{ki} g_{ki,j} = \frac{1}{2} \text{tr}(g^{-1} g_{,j}) = \frac{1}{2} \text{tr}((\log g)_{,j}) = \frac{1}{2} (\text{tr } \log g)_{,j} = \frac{1}{2} (\log \det g)_{,j},$$

kde pro jednoduchost značíme  $g := (g_{ij})$ .  $\square$

Nakonec definujeme *laplacián* (či *Laplace–Beltrami* operátor) funkce  $f$  obvyklým předpisem

$$\Delta f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f.$$

V lokálních souřadnicích  $x$  platí

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right).$$

## 4 Geodetiky a vzdálenost

Geodetiky jsme definovali coby křivky s nulovým zrychlením. Cílem této kapitoly je ukázat následující souvislost geodetik se vzdáleností:

$$\begin{array}{ccc} \text{vzdálenost minimalizující křivka} & \implies & \text{geodetika} \\ & \Longleftarrow & \\ & \text{alespoň lokálně} & \end{array}$$

### 4.1 Geodetický tok

Naším prvním krokem bude zjmenění Věty 2.9 o existenci a jednoznačnosti geodetik.

Jakákoli hladká křivka  $t \mapsto \gamma(t)$  na varietě  $M$  určuje křivku  $t \mapsto (\gamma(t), \gamma'(t))$  na tečném svazku  $TM$ . Připomeňme tvar geodetické rovnice (2.3) v lokálních souřadnicích  $x$ , kde značíme  $\gamma^i := (x \circ \gamma)^i$ . Označíme-li dále  $\gamma^{i'} := V^i$ , pak (2.3) je ekvivalentní systému

$$\begin{pmatrix} \gamma^k \\ V^k \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} V^k \\ -\Gamma_{ij}^k V^i V^j \end{pmatrix} =: X_{\begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma' \end{pmatrix}}^k. \quad (4.1)$$

Připomeňme Tvzení 0.5 o trajektoriích vektorových polí, kde stačí vektorové pole  $X$  uvažovat definované na otevřeném okolí bodu  $p \in M$ . Pak formulka (4.1) definuje vektorové pole  $X$  na  $TM$ , jehož trajektorie jsou křivky  $t \mapsto (\gamma(t), \gamma'(t))$ . Toto vektorové pole se nazývá *geodetické pole* a jeho tok se nazývá *geodetický tok*.

Uvažujme nyní libovolný bod  $p \in M$  a souřadnicový systém  $(x, U)$  v tomto bodě. Aplikací Tvzení 0.5 na geodetické pole  $X$  dostáváme:

$$\exists \text{ okolí } \mathcal{E} \text{ bodu } (p, 0) \in TM, \quad \delta > 0, \quad \varphi \in C^\infty((-\delta, \delta) \times \mathcal{E}, TM),$$

kde  $\varphi$  je trajektorie geodetického pole  $X$ , jež je jednoznačně určená počáteční podmínkou

$$\varphi(0, q, V) = (q, V) \in \mathcal{E}.$$

Okolí  $\mathcal{E}$  lze zvolit ve tvaru

$$\mathcal{E} := \{(q, V) \in U_1 \times T_q M : |V| < \varepsilon_1\},$$

kde  $U_1 \subset U$  je okolí bodu  $p \in M$  a  $\varepsilon_1 > 0$ . Definujeme-li  $\gamma : \pi \circ \varphi$ , kde  $\pi : TM \rightarrow M$  je kanonická projekce, můžeme naše předchozí poznatky shrnout do následujícího tvrzení.

**Tvrzení 4.1.** *Pro libovolný bod  $p \in M$  existuje otevřená množina  $U \subset M$  obsahující bod  $p$ , čísla  $\delta > 0$  a  $\varepsilon > 0$  a hladké zobrazení*

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times \{(q, V) \in U \times T_q M : |V| < \varepsilon\} \rightarrow M$$

*takové, že  $(-\delta, \delta) \ni t \mapsto \gamma(t, q, V)$  je jediná geodetika na  $M$ , jež v čase  $t = 0$  prochází bodem  $q$  rychlostí  $V$ , a to pro libovolnou volbu  $q \in U$  a  $V \in T_q M$  s  $|V| < \varepsilon$ .*

Předchozí tvrzení říká, že pokud  $|V| < \varepsilon$ , geodetika  $t \mapsto \gamma(t, q, V)$  existuje na intervalu  $(-\delta, \delta)$  a je jediná. Následující tvrzení říká, že lze zvýšit rychlost na úkor zmenšení časového intervalu, a naopak.

**Lemma 4.2** (Škálovací lemma). *Nechť  $c > 0$ . Je-li geodetika  $t \mapsto \gamma(t, q, V)$  definovaná na intervalu  $(-\delta, \delta)$ , pak  $t \mapsto \gamma(t, q, cV)$  je geodetika definovaná na intervalu  $(-c^{-1}\delta, c^{-1}\delta)$  a platí*

$$\gamma(t, q, cV) = \gamma(ct, q, V).$$

*Důkaz.* Uvažujme křivky

$$\begin{aligned} \gamma_1 : (-\delta, \delta) &\rightarrow M && : \{t \mapsto \gamma(t, q, V)\}, \\ \gamma_2 : (-c^{-1}\delta, c^{-1}\delta) &\rightarrow M && : \{t \mapsto \gamma(ct, q, V)\}. \end{aligned}$$

Křivka  $\gamma_1$  je geodetika určená počátečními podmínkami  $\gamma_1(0) = q$  a  $\gamma_1'(0) = V$ . Vzhledem k jednoznačnosti, stačí ukázat, že  $\gamma_2$  je geodetika určená počátečními podmínkami  $\gamma_2(0) = q$  a  $\gamma_2'(0) = cV$ .

**Počáteční podmínky** Počáteční podmínka  $\gamma_2(0) = q$  je zřejmá. Abychom zjistili, jak vypadá tečný vektor  $\gamma_2'(0)$ , uvažujme souřadnicové reprezentace  $\gamma_1^i = x^i \circ \gamma_1$  a  $\gamma_2^i = x^i \circ \gamma_2$ , kde  $(x, U)$  je souřadnicový systém. Potom  $\gamma_2^i(t) = \gamma_1^i(ct)$  a klasická formulka pro derivaci složené funkce dává

$$\gamma_2^i(t) = c\gamma_1^i(ct).$$

Odtud speciálně  $\gamma_2'(0) = c\gamma_1'(0) = cV$ .

**Geodetická rovnice** Nechť  $D_t^{(1)}$  a  $D_t^{(2)}$  značí kovariantní derivaci podél křivky  $\gamma_1$  a  $\gamma_2$ . Potom platí

$$\begin{aligned} D_t^{(2)}\gamma_2'(t) &= \left[ \gamma_2^{k''}(t) + \Gamma_{ij}^k(\gamma_2(t)) \gamma_2^{i'}(t) \gamma_2^{j'}(t) \right] \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\gamma_2(t)} \\ &= \left[ c^2 \gamma_1^{k''}(ct) + c^2 \Gamma_{ij}^k(\gamma_1(ct)) \gamma_1^{i'}(ct) \gamma_1^{j'}(ct) \right] \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\gamma(ct)} \\ &= c^2 D_t^{(1)}\gamma_1'(ct) = 0. \end{aligned}$$

Tedy  $\gamma_2$  je geodetika. □

Tvrzení 4.1 společně s Lemma 4.2 umožňují zvolit časový interval geodetiky uniformně velký na okolí bodu  $p$  (alternativně bychom mohli volit rychlosti uniformně velké na nějakém malém okolí bodu  $p$ ).

**Tvrzení 4.3.** *Pro libovolný bod  $p \in M$  existuje otevřená množina  $U \subset M$  obsahující bod  $p$ , číslo  $\varepsilon > 0$  a hladké zobrazení*

$$\gamma : (-2, 2) \times \{(q, V) \in U \times T_q M : |V| < \varepsilon\} \rightarrow M$$

*takové, že  $(-2, 2) \ni t \mapsto \gamma(t, q, V)$  je jediná geodetika na  $M$ , jež v čase  $t = 0$  prochází bodem  $q$  rychlostí  $V$ , a to pro libovolnou volbu  $q \in U$  a  $V \in T_q M$  s  $|V| < \varepsilon$ .*

## 4.2 Exponenciální zobrazení

Tvrzení 4.3 ospravedlňuje následující definici.

**Definice 4.4.** *Exponenciální zobrazení* je zobrazení

$$\exp : \mathcal{E} \rightarrow M : \{(q, V) \mapsto \gamma(1, q, V)\},$$

kde

$$\mathcal{E} := \{(q, V) \in U \times T_q M : |V| < \varepsilon\}.$$

Množina  $\mathcal{E} \subset TM$  se nazývá *definiční obor exponenciálního zobrazení*. Všimněte si, že  $\mathcal{E}$  je otevřená podmnožina  $TM$ . Zobrazení  $\exp$  je zřejmě hladké.

Zúžené zobrazení

$$\exp_q := \exp|_{\mathcal{E}_q} : \mathcal{E}_q \rightarrow M, \quad \text{kde } \mathcal{E}_q := \mathcal{E} \cap T_q M = \{V \in T_q M : |V| < \varepsilon\},$$

se nazývá *zúžené exponenciální zobrazení*. Všimněte si, že  $\mathcal{E}_q$  je otevřená koule v  $T_q M$  o poloměru  $\varepsilon$  a se středem v počátku. Je snadné vidět, že i zobrazení  $\exp_q$  je hladké a  $\exp_q(0) = q$ . Geometricky je  $\exp_q(V)$  bod na  $M$ , na nějž se dostaneme v čase 1 při pohybu po geodetice procházející bodem  $q$  rychlostí  $V$  (či ekvivaletně v čase  $|V|$  po geodetice procházející bodem  $q$  rychlostí  $V/|V|$ ).

**Lemma 4.5** (O normálním okolí).  $\forall p \in M, \exists \underbrace{\mathcal{V} \subset T_p M}_{\text{otevřené okolí } 0}, \underbrace{\mathcal{U} \subset M}_{\text{otevřené okolí } p},$

$\exp_p : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$  je difeomorfismus.

*Důkaz.* Důkaz je založen na větě o inverzní funkci, protože se ukáže, že tečné zobrazení  $(\exp_p)_* : TT_p M \rightarrow TM$  je invertibilní v nule.

Pro přehlednost v tomto důkazu zdůrazňujeme bod, v němž se tečné zobrazení uvažuje. Exponenciální zobrazení v bodě  $p \in M$  je zobrazení  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ . Pro daný bod  $V \in T_p M$  tudíž uvažujeme tečné zobrazení  $(\exp_p)_{*V} : T_V T_p M \rightarrow T_{\exp_p(V)} M$  a naším cílem je ukázat, že tečné zobrazení  $(\exp_p)_{*0} : T_0 T_p M \cong T_p M \rightarrow T_p M$  je invertibilní.

Vskutku, nechť  $V \in T_p M$  a nechť  $\tau : (-\delta, \delta) \rightarrow T_p M$  je křivka s  $\delta > 0$  splňující  $\tau(0) = 0$  a  $\tau'(0) = V$ . Zřejmá volba je  $\tau(t) := tV$ . Potom

$$(\exp_p)_{*0} V = (\exp_p)_{*0} \tau_{*0} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} = (\exp_p \circ \tau)_{*0} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0}.$$

Zde  $\gamma_V(t) := (\exp_p \circ \tau)(t) = \gamma(1, p, tV) = \gamma(t, p, V)$ , kde poslední rovnost plyne z Lemma 4.2. Aplikací na libovolnou funkci  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  podle definice tečného zobrazení a tečného vektoru



dostáváme

$$\begin{aligned} (\exp_p \circ \tau)_{*0} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \exp_p \circ \tau) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \gamma_V) \\ &= (\gamma_V)_{*0} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f) \\ &= \gamma'_V(0)f = V(f). \end{aligned}$$

Odtud

$$(\exp_p)_{*0}V = V.$$

Tedy  $(\exp_p)_{*0}$  je vlastně identita! Proto je samozřejmě invertibilní.  $\square$

Jakékoli otevřené okolí  $\mathcal{U}$  bodu  $p \in M$ , jež je difeomorfním obrazem hvězdicovitého otevřeného okolí  $0 \in T_pM$  pomocí zobrazení  $\exp_p$ , se nazývá *normálním okolím* bodu  $p$ .

Speciálně, nechť  $B_\varepsilon(0) := \{V \in T_pM : |V| < \varepsilon\} \subset T_pM$ . Potom  $\exp_p(B_\varepsilon(0)) \subset M$  se nazývá *geodetickou koulí* o poloměru  $\varepsilon$  se středem v  $p$ , pokud je obraz  $\exp_p(B_\varepsilon(0))$  normální okolí. Pokud je obraz  $\exp_p(\bar{B}_\varepsilon(0))$  podmnožinou normálního okolí, potom  $\exp_p(\bar{B}_\varepsilon(0))$  je *uzavřená geodetická koule* a  $\exp_p(\partial B_\varepsilon(0))$  je *geodetická sféra*.

**Příklad 4.6** (Eukleidovský prostor). Z Příkladu 2.8 víme, že geodetiky v  $\mathbb{R}^n$  jsou přímky s konstantní rychlostí. Obvyklou identifikací  $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$  snadno nahlédneme, že  $\exp_p$  je identita.  $\diamond$

**Příklad 4.7** ( $n$ -sféra). Z Příkladu 3.10 víme, že geodetiky v  $\mathbb{S}^n$  jsou velké kružnice. Exponenciální zobrazení  $\exp_p$  je definováno na celém tečném prostoru  $T_p\mathbb{S}^n$ . Zobrazení  $\exp_p : B_\varepsilon(0) \rightarrow \exp_p(B_\varepsilon(0))$  je difeomorfismus tehdy a jen tehdy, pokud  $\varepsilon \leq \pi$ . Speciálně  $\exp_p(B_\pi(0)) = \mathbb{S}^n \setminus \{p'\}$ , kde  $p'$  je antipod bodu  $p$  ( $p'$  je jižní pól, pokud  $p$  je severní pól), a  $\exp_p(\partial B_\pi(0)) = \{p'\}$ .  $\diamond$

### 4.3 Normální souřadnice

Nechť  $(E_1, \dots, E_n)$  je ortonormální báze  $T_pM$ . Potom

$$E : \mathbb{R}^n \rightarrow T_pM : \{(x^1, \dots, x^n) \mapsto x^1 E_1 + \dots + x^n E_n\}$$

je izomorfismus. Pokud  $\mathcal{U}$  je normální okolí bodu  $p$ , potom

$$\varphi := E^{-1} \circ \exp_p^{-1} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

definuje souřadnicovou mapu, jež se nazývá *normální souřadnice* se středem v  $p$ . Jak bývá zvykem, aby se to co nejvíce pletlo, značíme  $x := \varphi$ , tedy  $(x^1, \dots, x^n) = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ .

Jinými slovy,

$$\varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow M : \{(x^1, \dots, x^n) \mapsto \exp_p(x^i E_i)\}$$

představuje lokální parametrizaci okolí bodu  $p \in M$ .

V daných normálních souřadnicích definujeme *radiální vzdálenost*

$$r(x) := \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2}$$

a *jednotkové radiální vektorové pole*

$$\frac{\partial}{\partial r} := \frac{x^i}{r} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Tyto zápisy obsahují všechny dvojznačnosti značení: používá se stejné písmenko  $x$  pro mapu normálních souřadnic, jakož i pro bod variety; a tento bod  $x \in M$  se identifikuje s jeho souřadnicemi  $(x^1, \dots, x^n)$ . Správněji bychom měli psát  $r(q) := \sqrt{x^1(q)^2 + \dots + x^n(q)^2}$ , kde  $q \in \mathcal{U} \subset M$ .

V normálních souřadnicích se středem v  $p$  platí:

- $\forall V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \in T_p M,$

$$\gamma_V(t) = (tV^1, \dots, tV^n), \quad (4.2)$$

kde  $\gamma_V(t) := \gamma(t, p, V)$  je geodetika procházející bodem  $p$  rychlostí  $V$ . Vztah (4.2) přesněji znamená  $\varphi(\gamma_V(t)) = (tV^1, \dots, tV^n)$ . Speciálně máme reprezentaci středu  $p = (0, \dots, 0)$ .

- $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ , protože  $E^{-1}$  mapuje ortonormální bázi  $T_p M$  na ortonormální bázi  $\mathbb{R}^n$ . Přesněji, připomeneme-li, že  $(\exp_p)_* 0$  je identita a  $\varphi(p) = 0$ ,

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = (\varphi^{-1})_* \varphi(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} = (\exp_p)_* 0 E_* 0 \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_0 = E_i.$$

- Eukleidovská koule  $\{x : r(x) < \varepsilon\} \subset \mathcal{U}$  je geodetická koule  $\exp_p(B_\varepsilon(0)) \subset M$ .

- $\forall q \in \mathcal{U} \setminus \{p\}$  platí  $\frac{\partial}{\partial r} \Big|_q = \gamma'(r(q))$ , kde  $\gamma$  je geodetika z  $p$  do  $q$  parametrizovaná ob-

loukem. Skutečně, nechť  $\gamma$  je geodetika startující z bodu  $p$  rychlostí  $\gamma'(0) = \frac{x^i(q)}{r(q)} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ . Potom (4.2) implikuje  $\gamma(r(q)) = q$  a  $\gamma'(r(q)) = \frac{x^i(q)}{r(q)} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_q = \frac{\partial}{\partial r} \Big|_q$ . Platí tedy  $|\frac{\partial}{\partial r}| = 1$ , jak ostatně název vektorového pole  $\frac{\partial}{\partial r}$  napovídá.

- $g_{ij,k}(p) = 0$  a  $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ . Tato pozorování lze dokázat následovně. Z formulky (4.2) vidíme, že  $\gamma_V^{i'}(t) = V^i$  a  $\gamma_V^{i''}(t) = 0$  pro všechny časy  $t$ , tedy geodetická rovnice (2.3) se redukuje na  $(\forall k \in \{1, \dots, n\})$

$$\Gamma_{ij}^k(tV) V^i V^j = 0,$$

kde využíváme identifikace (4.2). Speciálně v čase nula máme  $(\forall k \in \{1, \dots, n\})$

$$\Gamma_{ij}^k(0) V^i V^j = 0.$$

Volbou  $V := \frac{1}{2}(E_l + E_m)$  dostaneme  $(\forall k, l, m \in \{1, \dots, n\})$

$$\frac{1}{4} [\Gamma_{ll}^k(0) + \Gamma_{mm}^k(0) + \Gamma_{lm}^k(0) + \Gamma_{ml}^k(0)] = 0,$$

z čehož díky symetrii  $\Gamma_{lm}^k = \Gamma_{ml}^k$  plyne

$$\Gamma_{lm}^k(0) = 0.$$

Z formulky (3.3) pro Christoffelovy symboly dostáváme v čase nule:

$$g^{ik}(-g_{lm,k} + g_{mk,l} + g_{kl,m}) = 0,$$

a tedy zároveň i ( $\forall l, m, r \in \{1, \dots, n\}$ )

$$-g_{lm,r} + g_{mr,l} + g_{rl,m} = 0.$$

Sečteme-li tuto rovnici s identickou rovnicí po cyklické permutaci ( $l \mapsto m \mapsto r \mapsto l$ )

$$-g_{mr,l} + g_{rl,m} + g_{lm,r} = 0,$$

dostaneme  $2g_{rl,m}(0) = 0$ .

#### 4.4 Minimalizující křivky

Pro hladkou křivku  $\gamma : I \rightarrow M$  jsme definovali její délku vztahem (1.5). Pro měření vzdáleností na varietě  $M$  je však potřeba uvažovat obecnější třídu křivek.

- *Po částech hladká křivka* je spojitě zobrazení  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  takové, že

$$\exists \text{ dělení } a =: a_0 < a_1 < \dots < a_{k-1} < a_k =: b, \quad \forall i = 1, \dots, k,$$

$$\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]} \text{ je hladká křivka.}$$

V krajních bodech definujeme jednostranné rychlosti

$$\gamma'(a_i^\pm) := \lim_{t \rightarrow a_i^\pm} \gamma'(t).$$

(Limity mají dobrý smysl, poněvadž  $\gamma'(t)f = \gamma_* \frac{d}{dt}|_t f = \frac{d}{dt}|_t (f \circ \gamma) = (f \circ \gamma)'(t)$ .) *Po částech regulární křivka* se definuje analogicky.

- *Triviální křivka* je zobrazení  $\gamma : \{a\} \rightarrow M : \{t \mapsto p\}$ , kde  $p$  je bod v  $M$ .
- *Přípustná křivka* je po částech regulární křivka nebo triviální křivka. *Délku přípustné křivky* definujeme vztahem

$$L(\gamma) := \sum_{i=1}^k L(\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}),$$

jenž opět nezávisí na reparametrizaci křivky  $\gamma$ .

- *Délka oblouku* přípustné křivky  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  je zobrazení

$$s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : \{t \mapsto L(\gamma|_{[a,t]})\}.$$

Pokud  $\gamma$  je hladká, pak  $s$  je hladké a platí  $s'(t) = |\gamma'(t)|$  pro  $t \in [a, b]$ . Řekneme, že  $\gamma$  je *parametrizovaná obloukem* (či *má jednotkovou rychlost*), pokud  $|\gamma'(t)| = 1$  pro  $t \in [a, b]$ . Jakoukoli přípustnou křivku lze přeparametrizovat tak, aby měla jednotkovou rychlost. Integrál funkce  $f \in C^\infty([a, b])$  vzhledem k délce oblouku  $s$  přípustné křivky  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  definujeme vztahem

$$\int_\gamma f ds := \int_a^b f(t) |\gamma'(t)| dt,$$

jenž nezávisí na reparametrizaci křivky  $\gamma$ .

• Po částech hladké vektorové pole podél přípustné křivky  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  je spojité zobrazení  $V : [a, b] \rightarrow TM : \{t \mapsto V_t \in T_{\gamma(t)}M\}$  takové, že

$$\exists \begin{array}{l} \text{dělení} \\ \text{(případně jemnější)} \end{array} \quad a =: \tilde{a}_0 < \tilde{a}_1 < \dots < \tilde{a}_{k-1} < \tilde{a}_k =: b, \quad \forall i = 1, \dots, k,$$

$$V|_{[\tilde{a}_{i-1}, \tilde{a}_i]} \text{ je hladké vektorové pole.}$$

Platí:

$$\forall V_a \in T_{\gamma(a)}M, \quad \exists! \text{ paralelně přenesené pole podél } \gamma.$$

**Definice 4.8.** Riemannovská vzdálenost dvou bodů  $p, q \in M$  je číslo:

$$d(p, q) := \inf_{\gamma} L(\gamma),$$

kde infimum se bere přes všechny přípustné křivky spojující  $p, q$ .

Je funkce  $(p, q) \mapsto d(p, q)$  dobře definovaná? Pro to je třeba ukázat, že libovolné dva body lze propojit přípustnou křivkou. Je-li  $M$  souvislá, pak je obloukově spojitá, tedy libovolné dva body lze propojit *spojitou* křivkou  $c : [a, b] \rightarrow M$ . Díky kompaktnosti intervalu  $[a, b]$  existuje dělení  $a =: a_0 < a_1 < \dots < a_{k-1} < a_k =: b$  takové, že část křivky  $c|_{[a_{i-1}, a_i]}$  je obsažena v jedné mapě pro každé  $i = 1, \dots, k$ . Pak užitím souřadnic lze  $c|_{[a_{i-1}, a_i]}$  zaměnit za hladkou křivku propojující ty samé krajní body.

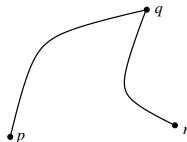
Na dané riemannovské varietě budeme vzdálenosti vždy měřit pomocí Definice 4.8.

**Tvrzení 4.9.** Souvislá riemannovská varieta je metrický prostor, jehož indukovaná topologie se shoduje s topologií variety.

*Důkaz.* Vlastnosti

$$d(p, q) \geq 0, \quad d(p, q) = d(q, p), \quad d(p, p) = 0$$

jsou zřejmé. Trojúhelníková nerovnost se ukáže také snadno, viz Obrázek 4.1; zde právě potřebujeme obecnější definici přípustných křivek namísto regulárních.



Obrázek 4.1: Důkaz trojúhelníkové nerovnosti v Tvrzení 4.9: Přípustnou křivku z  $p$  do  $r$  lze realizovat propojením bodu  $p$  a  $q$  přípustnou křivkou a pak propojením bodu  $q$  a  $r$  přípustnou křivkou.

Zbývá ukázat

$$p \neq q \quad \implies \quad d(p, q) > 0$$

a shodnost topologií. K tomu se využije srovnání s eukleidovskou metrikou v normálních souřadnicích.  $\square$

**Definice 4.10.**  $\gamma$  je *minimalizující křivka*, pokud je  $\gamma$  přípustná a

$$L(\gamma) \leq L(\tilde{\gamma})$$

pro všechny přípustné křivky  $\tilde{\gamma}$  se stejnými koncovými body.

## 4.5 Přípustné rodiny křivek

Naším cílem je dát do souvislosti geodetiky a minimalizující křivky. Za tímto účelem budeme přiřazení  $\gamma \mapsto L(\gamma)$  interpretovat jako funkcionál na množině přípustných křivek a hledat minimum tohoto funkcionálu. Z variačního počtu víme, že potřebujeme spočítat variaci funkcionálu  $L$ . Potřebujeme tudíž uvažovat vhodnou třídu křivek, vzhledem k níž budeme variaci počítat.

**Definice 4.11.** *Přípustná rodina křivek* je spojité zobrazení

$$\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M,$$

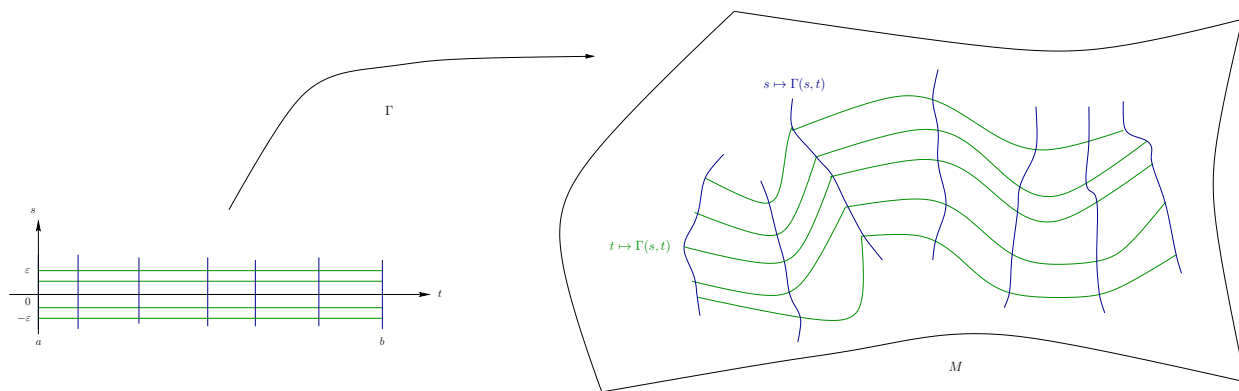
splňující:

- $\Gamma|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a_{i-1}, a_i]}$  je hladké, kde  $a =: a_0 < a_1 < \dots < a_{k-1} < a_k =: b$  je konečné dělení;
- $\forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $t \mapsto \Gamma(s, t)$  je přípustná křivka.

Budeme používat následující značení:

$$\begin{aligned} t \mapsto \Gamma(s, t) &=: \Gamma_s(t) && \text{hlavní křivky } (s = \text{const}), \\ s \mapsto \Gamma(s, t) &=: \Gamma^{(t)}(s) && \text{transverzální křivky } (t = \text{const}). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Podle Definice 4.11 jsou hlavní křivky po částech regulární, zatímco transverzální křivky jsou hladké.



Obrázek 4.2: Přípustná rodina křivek.

*Vektorové pole podél  $\Gamma$*  je spojité zobrazení

$$V : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow TM : \{(s, t) \mapsto V(s, t) \in T_{\Gamma(s, t)}M\}$$

takové, že  $V|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times [\tilde{a}_{i-1}, \tilde{a}_i]}$  je hladké, kde  $a =: \tilde{a}_0 < \tilde{a}_1 < \dots < \tilde{a}_{m-1} < \tilde{a}_m =: b$  je (případně jemnější) konečné dělení. Pokud je  $\Gamma$  hladká, speciální vektorová pole podél  $\Gamma$  představují tečné vektory

$$\partial_t \Gamma(s, t) := \frac{d}{dt} \Gamma_s(t), \quad \partial_s \Gamma(s, t) := \frac{d}{ds} \Gamma^{(t)}(s). \quad (4.4)$$

Přesněji,  $\partial_t \Gamma$  je (hladké) vektorové pole, pouze když je  $\Gamma_s$  hladká, zatímco  $\partial_s \Gamma$  je vždy (hladké) vektorové pole.

**Lemma 4.12** (O symetrii).  $\forall (s, t) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a_{i-1}, a_i]$ , kde je  $\Gamma$  hladká,

$$D_s \partial_t \Gamma(s, t) = D_t \partial_s \Gamma(s, t).$$

*Důkaz.* Poněvadž se jedná o lokální tvrzení, stačí ho dokázat v lokální mapě  $x$  kolem libovolného bodu  $\Gamma(s_0, t_0)$ . Pišme  $(x \circ \Gamma)(s, t) =: (x^1(s, t), \dots, x^n(s, t))$ . Potom

$$\partial_t \Gamma = \frac{\partial x^k}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^k} \quad \text{a} \quad \partial_s \Gamma = \frac{\partial x^k}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Užitím souřadnicové formulky (2.2) pro kovariantní derivaci podél křivek dostaneme

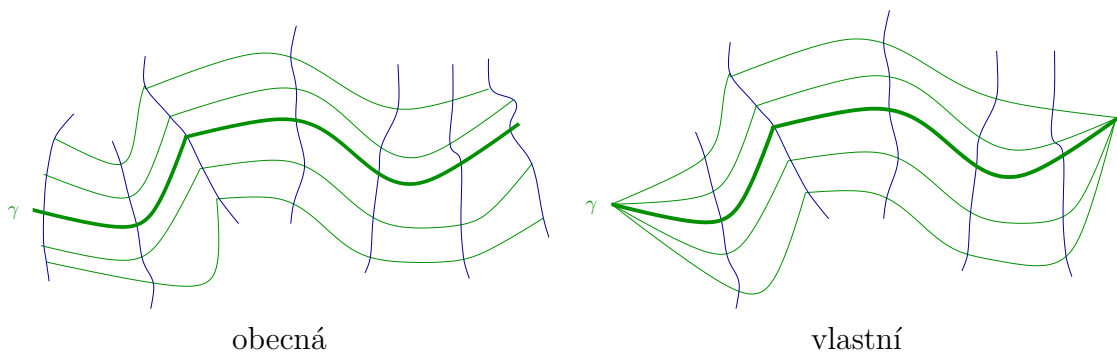
$$D_s \partial_t \Gamma = \left( \frac{\partial^2 x^k}{\partial s \partial t} + \frac{\partial x^i}{\partial s} \frac{\partial x^j}{\partial t} \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k},$$

$$D_t \partial_s \Gamma = \left( \frac{\partial^2 x^k}{\partial t \partial s} + \frac{\partial x^i}{\partial t} \frac{\partial x^j}{\partial s} \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Tyto dva výrazy se zjevně rovnají, pokud  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ , což je speciálně pravda pro riemannovskou konexi (obecněji pro pouze symetrickou konexi).  $\square$

Variace přípustné křivky  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  je přípustná rodina  $\Gamma$  taková, že  $\Gamma_0(t) = \gamma(t)$ , pro všechna  $t \in [a, b]$ . Řekneme, že se jedná o *vlastní variaci*, pokud (viz Obrázek 4.3)

$$\forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon), \quad \Gamma_s(a) = \gamma(a) \quad \text{a} \quad \Gamma_s(b) = \gamma(b).$$



Obrázek 4.3: Variace křivky  $\gamma$ .

*Variační pole* variace  $\Gamma$  je vektorové pole podél  $\gamma$  definované předpisem ( $s = \text{const}$ )

$$V : [a, b] \rightarrow TM : \{t \mapsto \partial_s \Gamma(0, t)\}.$$

Řekneme, že vektorové pole  $V$  podél  $\gamma$  je *vlastní*, pokud

$$V(a) = 0 = V(b).$$

Variační pole vlastní variace je vlastní.

**Lemma 4.13.**

$$\left. \begin{array}{l} \gamma \text{ je přípustná křivka} \\ V \text{ je vektorové pole podél } \gamma \end{array} \right\} \implies V \text{ je variační pole nějaké variace křivky } \gamma.$$

*Je-li  $V$  vlastní, pak variaci lze zvolit také vlastní.*

*Důkaz.* Lze zvolit  $\Gamma(s, t) := \exp_{\gamma(t)}(sV(t))$ , kde  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  s dostatečně malým  $\varepsilon > 0$ . Pokud  $V(a) = 0 = V(b)$ , potom  $\Gamma(s, a) = \gamma(a)$  a  $\Gamma(s, b) = \gamma(b)$  pro všechna  $s$ .  $\square$

## 4.6 Minimalizující křivky jsou geodetiky

**Lemma 4.14** (První variace). *Nechť:*

- $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  je přípustná křivka parametrizovaná obloukem;
- $\Gamma$  je vlastní variace  $\gamma$ ;
- $V$  je variační pole rodiny  $\Gamma$ .

Potom

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} L(\Gamma_s) = - \int_a^b \langle V, D_t \gamma' \rangle dt - \sum_{i=1}^{k-1} \langle V(a_i), \Delta_i \gamma' \rangle, \quad (4.5)$$

kde  $\Delta_i \gamma' := \gamma'(a_i^+) - \gamma'(a_i^-)$  značí skok tečného pole  $\gamma'$  v bodě  $a_i$ .

*Důkaz.* Označme

$$T(s, t) := \partial_t \Gamma(s, t) \quad \text{a} \quad S(s, t) := \partial_s \Gamma(s, t). \quad (4.6)$$

Poněvadž integrand je hladká funkce a integrujeme přes kompaktní množinu, lze zaměnit derivaci a integrál a psát

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} L(\Gamma_s|_{[a_{i-1}, a_i]}) &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{\partial}{\partial s} \langle T, T \rangle^{1/2} dt \\ &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{1}{2} \langle T, T \rangle^{-1/2} 2 \langle D_s T, T \rangle dt \\ &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{1}{|T|} \langle D_s T, T \rangle dt \\ &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{1}{|T|} \langle D_t S, T \rangle dt, \end{aligned}$$

kde druhá rovnost využívá kompatibility riemannovské konexe s metrikou (Tvrzení 3.2.(iii)) a symetrie metriky a poslední rovnost platí díky Lemma 4.12. Pro  $s = 0$ , jelikož  $S(0, t) = V(t)$  a  $T(0, t) = \gamma'(t)$ , dostáváme

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} L(\Gamma_s|_{[a_{i-1}, a_i]}) \right|_{s=0} &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \langle D_t V, \gamma' \rangle dt \\ &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \left( \frac{d}{dt} \langle V, \gamma' \rangle - \langle V, D_t \gamma' \rangle \right) dt \\ &= \langle V(a_i), \gamma'(a_i^-) \rangle - \langle V(a_{i-1}), \gamma'(a_{i-1}^+) \rangle - \int_{a_{i-1}}^{a_i} \langle V, D_t \gamma' \rangle dt. \end{aligned}$$

Ted' už zbývá jen přesčítat přes  $i = 1, \dots, k$  a všimnout si, že  $V(a_0) = 0 = V(a_k)$ .  $\square$

**Věta 4.15.** *Libovolná minimalizující křivka parametrizovaná obloukem je geodetika.*

*Důkaz.* Necht'  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  je minimalizující křivka parametrizovaná obloukem (t.j.  $|\gamma'| = 1$ ) taková, že  $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$  je hladká pro  $i = 1, \dots, k$ . Pak  $\left. \frac{d}{ds} L(\Gamma_s) \right|_{s=0} = 0$ . Poněvadž (viz Lemma 4.13) jakékoli vlastní vektorové pole podél  $\gamma$  je variační pole nějaké vlastní variace křivky  $\gamma$ , musí pravá strana (4.5) vymizet pro všechna taková  $V$ .

$\boxed{\gamma \text{ je "lomená geodetika"}}$  : $\Leftrightarrow D_t \gamma' = 0$  na  $[a_{i-1}, a_i]$ .

Necht'  $\varphi \in C_0^\infty([a_{i-1}, a_i])$  je taková, že  $\varphi > 0$  na  $(a_{i-1}, a_i)$ . Volbou  $V := \varphi D_t \gamma'$  dostáváme

$$0 = - \int_{a_{i-1}}^{a_i} \varphi |D_t \gamma'|^2 dt.$$

Z libovolnosti  $\varphi$  pak plyne  $D_t \gamma' = 0$  na  $[a_{i-1}, a_i]$ .

$\boxed{\gamma \text{ "nemá rohy"}}$  : $\Leftrightarrow \Delta_i \gamma' = 0$ .

Necht'  $V$  je takové, že  $V(a_i) = \Delta_i \gamma'$  a  $V(a_j) = 0$  pro všechna  $j \neq i$ . Potom

$$0 = -|\Delta_i \gamma'|^2.$$

$\boxed{\gamma \text{ je hladká.}}$

Poněvadž se jednostranné rychlosti  $\gamma$  shodují v každém bodě  $a_i$ , z jednoznačnosti geodetik dostáváme, že  $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$  je prodloužením geodetiky  $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$ .  $\square$

**Věta 4.16.** *Platí následující ekvivalence:*

*přípustná křivka  $\gamma$  parametrizovaná obloukem je kritickým bodem funkcionálu  $L$*

$\Updownarrow$

*$\gamma$  je geodetika.*



*Důkaz.*

⏚ Tento směr plyne rovnou z důkazu Věty 4.15, kde jsme využili pouze, že  $\gamma$  je kritickým bodem funkcionálu  $L$  (ne nezbytně minimem).

⏚ Pokud je  $\gamma$  geodetika, pak  $D_t\gamma' = 0$  (geodetická rovnice) a  $\Delta_i\gamma' = 0$  (hladkost), tudíž pravá strana (4.5) je rovna nule.  $\square$

Geodetickou rovnici lze chápat jako Euler–Lagrangeovu rovnici odpovídající funkcionálu  $L$ .

## 4.7 Gaussovo lemma

Jako první krok k důkazu opačného tvrzení (že geodetiky jsou minimalizující křivky, a to alespoň lokálně) je následující fundamentální výsledek. Říká, že (radiální) geodetiky vycházející z bodu  $p$  jsou ortogonální ke geodetickým sférám (t.j. ke každé křivce, jež je charakterizována fixní vzdáledností od  $p$ ).

**Věta 4.17** (Gaussovo lemma). *Nechť  $\exp_p(B_\varepsilon(0))$  je geodetická koule se středem v  $p \in M$ . Potom,  $\forall R < \varepsilon$ ,*

$$\frac{\partial}{\partial r} \perp \exp_p(\partial B_R(0)).$$

*Důkaz.* Uvažujme libovolný bod  $q \in \exp_p(B_\varepsilon(0))$  a vektor  $X \in T_qM$  takový, že  $X \perp \exp_p(\partial B_R(0))$  s  $R < \varepsilon$  (vektor  $X$  je tečný ke geodetické sféře o poloměru  $R$  v bodě  $q$ ), viz Obrázek 4.4. Poněvadž  $\exp_p$  je difeomorfismus na  $\exp_p(B_\varepsilon(0))$ , existuje vektor  $V \in T_pM$  takový, že  $q = \exp_p V$ . Zároveň existuje vektor  $W \in T_V(T_pM) \cong T_pM$  takový, že  $X = (\exp_p)_*W$ . Potom  $V \in \partial B_R(0)$  a  $W \in T_V\partial B_R(0)$ , kde  $R = d(p, q)$ . Radiální geodetika z  $p$  do  $q$  je křivka  $\gamma_V(t) := \exp_p(tV)$  s tečným vektorem  $\gamma'_V(t) = R \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{\gamma(t)}$ . Chceme ukázat, že

$$X \perp \gamma'_V(1).$$

Zvolme nějakou křivku

$$\sigma : (-\delta, \delta) \rightarrow T_pM : \{s \mapsto \sigma(s) \in \partial B_R(0)\}, \quad \sigma(0) = V, \quad \sigma'(0) = W.$$

Zároveň uvažujme variaci křivky  $\gamma_V$  danou vztahem

$$\Gamma(s, t) := \exp_p(t\sigma(s)). \tag{4.7}$$

Poněvadž  $|\sigma(s)| = R$  pro  $s \in (-\delta, \delta)$ , hlavní křivka  $\Gamma_s$  (viz (4.3)) je geodetika s konstantní rychlostí  $R$  (t.j.  $|\Gamma'_s| = R$ ). Připomenutím značení (4.4) a (4.6) máme

$$\begin{aligned} S(0, 0) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \exp_p(0) = 0, \\ T(0, 0) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp_p(tV) = V, \\ S(0, 1) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \exp_p(\sigma(s)) = (\exp_p)_* \sigma'(0) = X, \\ T(0, 1) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=1} \exp_p(tV) = \gamma'_V(1). \end{aligned}$$

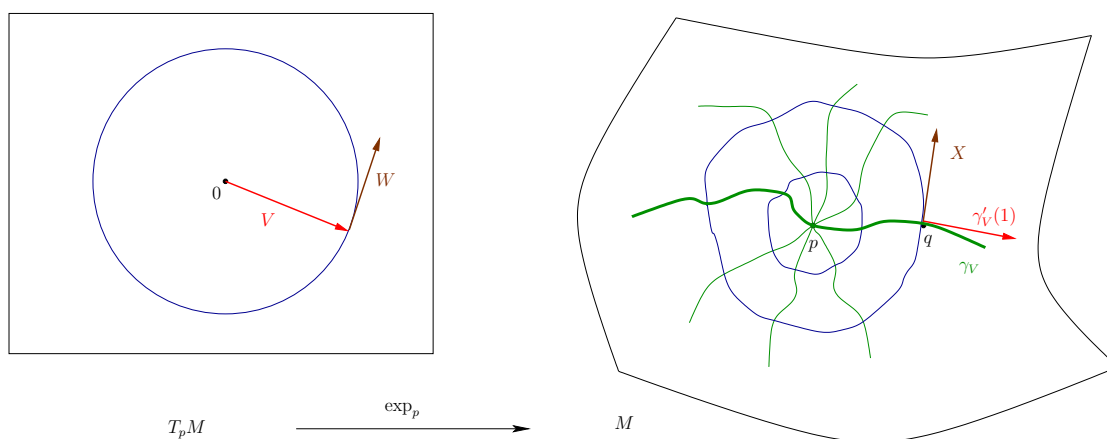
V důsledku těchto vztahů dostáváme

$$\begin{aligned} (s, t) = (0, 0) &\implies \langle S, T \rangle = 0, \\ (s, t) = (0, 1) &\implies \langle S, T \rangle = \langle X, \gamma'_V(1) \rangle. \end{aligned}$$

K důkazu věty tedy stačí ukázat, že skalární součin  $\langle S, T \rangle$  nezávisí na proměnné  $t$ . Avšak:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle S, T \rangle &= \langle D_t S, T \rangle + \langle S, D_t T \rangle \\ &= \langle D_s T, T \rangle + \langle S, 0 \rangle \quad (\Leftarrow \text{Lemma 4.12 \& } \Gamma_s \text{ geodetika}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} |T|^2 \\ &= 0, \quad (\Leftarrow |T| = |\Gamma'_s| = R) \end{aligned}$$

čímž je důkaz věty u konce. □



Obrázek 4.4: Geometrie v důkazu Věty 4.17.

*Alternativní důkaz.* Využijme alternativně Lemma 4.14; pokud  $\Gamma$  není vlastní variace, potom formulka (4.5) pro první variaci se liší pouze tím, že v druhém členu na pravé straně se sčítá od  $i = 0$  do  $i = k$  s krajními skoky  $\Delta_0 \gamma' := \gamma'(a)$  a  $\Delta_k \gamma' := -\gamma'(b)$ . Jako v předchozím důkazu, uvažujme variaci (4.7). Potom

$$0 = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(\Gamma_s) = -\langle \partial_s \Gamma(0, 0), \gamma'(0) \rangle + \langle \partial_s \Gamma(0, 1), \gamma'(1) \rangle,$$

kde první rovnost platí díky Větě 4.16, poněvadž se jedná o variaci geodetiky  $\gamma := \exp_p(tV)$  (explicitně  $L(\Gamma_s) = R$ , kde  $R$  je poloměr geodetické sféry). Zbývá si uvědomit, že  $\partial_s \Gamma(0, 0) = S(0, 0) = 0$  a  $\partial_s \Gamma(0, 1) = S(0, 1) = X$ . Tedy  $X \perp \gamma'(1)$ , což bylo dokázat. □

**Důsledek 4.18.** *Nechť  $\mathcal{U} := \exp_p(B_\varepsilon(0))$  je geodetická koule se středem v  $p \in M$ . Potom*

$$\text{grad } r = \frac{\partial}{\partial r} \quad \text{na } \mathcal{U} \setminus \{p\}.$$

*Důkaz.* Je potřeba ukázat

$$\forall q \in \exp_p(B_\varepsilon(0)) \setminus \{p\}, Y \in T_q M, \quad dr(Y) = \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, Y \right\rangle.$$

Geodetická sféra  $\exp_p(\partial B_R(0)) \ni q$  je v normálních souřadnicích reprezentována rovnicí  $r = R$ . Poněvadž je vektor  $\frac{\partial}{\partial r}$  kolmý k této sféře (viz Věta 4.17), máme ortogonální rozklad

$$Y = \alpha \frac{\partial}{\partial r} + X, \quad \text{kde} \quad \alpha \in \mathbb{R}, X \parallel \partial B_R(0).$$

Platí

$$\begin{aligned} dr\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) &= 1, & (\Leftarrow \text{přímý výpočet v souřadnicích}) \\ dr(X) &= 0. & (\Leftarrow X \parallel \{r = \text{const}\}) \end{aligned}$$

Tedy

$$dr(Y) = dr\left(\alpha \frac{\partial}{\partial r} + X\right) = \alpha dr\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) + dr(X) = \alpha.$$

Na druhou stranu však

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial r}, Y \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \alpha \frac{\partial}{\partial r} + X \right\rangle = \alpha \underbrace{\left| \frac{\partial}{\partial r} \right|^2}_{=1} + \underbrace{\left\langle \frac{\partial}{\partial r}, X \right\rangle}_{=0} = \alpha,$$

kde jsme využili ortogonalitu  $\frac{\partial}{\partial r} \perp X$  v důsledku Věty 4.17. □

**Tvrzení 4.19.** *Nechť  $p \in M$  a  $\exp_p(B_\varepsilon(0))$  je geodetická koule.  $\forall q \in \exp_p(B_\varepsilon(0))$  platí:*

*Radiální geodetika z  $p$  do  $q$  je jediná (až na reparametrizaci) minimalizující křivka z  $p$  do  $q$ .*

*Důkaz.* Nechť  $\gamma : [0, R] \rightarrow M$  je radiální geodetika z  $p$  do  $q$  parametrizovaná obloukem. Existuje vektor  $V \in T_p M$  takový, že  $\gamma(t) = \exp_p(tV)$ . Nechť  $\sigma : [0, b] \rightarrow M$  je jakákoli jiná křivka parametrizovaná obloukem propojující body  $p$  a  $q$ . Je potřeba ukázat, že

$$b = L(\sigma) > L(\gamma) = R.$$

$L(\sigma) \geq L(\gamma) \Rightarrow \gamma$  je minimalizující křivka.

Nechť:

- $a_0 \in [0, b]$  je poslední čas  $t$ , kdy  $\sigma(t) = p$ ;
- $b_0 \in [0, b]$  je první čas  $t$  po  $a_0$ , kdy  $\sigma(t) \in \exp_p(\partial B_R(0))$ .

Platí rozklad

$$\forall t \in (a_0, b_0], \quad \sigma'(t) = \alpha(t) \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{\sigma(t)} + X(t), \quad \text{kde} \quad X(t) \parallel \exp_p(\partial B_{\sigma(t)}(0)).$$

Díky Větě 4.17 víme, že se jedná o ortogonální rozklad, tudíž

$$\forall t \in (a_0, b_0], \quad |\sigma'(t)|^2 = \alpha(t)^2 + |X(t)|^2 \geq \alpha(t)^2.$$

Navíc díky Důsledku 4.18 víme, že

$$\forall t \in (a_0, b_0], \quad \alpha(t) = \left\langle \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{\sigma(t)}, \sigma'(t) \right\rangle = dr(\sigma'(t)).$$

Tudíž

$$\begin{aligned} L(\sigma) &\geq L(\sigma|_{[a_0, b_0]}) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a_0+\delta}^{b_0} |\sigma'(t)| dt \\ &\geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a_0+\delta}^{b_0} \alpha(t) dt \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a_0+\delta}^{b_0} dr(\sigma'(t)) dt \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a_0+\delta}^{b_0} \frac{d}{dt} r(\sigma(t)) dt \\ &= r(\sigma(b_0)) - r(\sigma(a_0)) \\ &= R - 0 = L(\gamma). \end{aligned} \tag{4.8}$$

(Třetí rovnost zdola platí z definičních vztahů  $dr(\sigma'(t)) = \sigma'(t)r = \sigma_* \frac{d}{dt} \Big|_t r = \frac{d}{dt}(r \circ \sigma)(t)$ .)

$L(\sigma) > L(\gamma) \Rightarrow \gamma$  je jediná minimalizující křivka.

Předpokládejme, že  $L(\sigma) = R$ . Pak obě nerovnosti v (4.8) jsou rovnosti. První rovnost implikuje  $a_0 = 0$  a  $b_0 = b = R$ . Druhá rovnost implikuje  $X = 0$  a  $\alpha > 0$ , což znamená, že  $\sigma'(t) = \alpha(t) \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{\sigma(t)}$ . Poněvadž je  $\sigma$  parametrizovaná obloukem, nezbytně  $\alpha = 1$ , což znamená, že  $\sigma'(t) = \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{\sigma(t)}$ . Dostáváme tedy, že obě křivky  $\sigma$  a  $\gamma$  jsou integrální křivky vektoru  $\frac{\partial}{\partial r}$  procházející bodem  $q$  v čase  $t = R$ . Tedy  $\sigma = \gamma$ .  $\square$

**Důsledek 4.20.** *Nechť  $\exp_p(B_\varepsilon(0))$  je geodetická koule se středem v  $p \in M$ . Potom*

$$\forall x \in \exp_p(B_\varepsilon(0)), \quad r(x) = d(p, x).$$

Tento důsledek nám umožňuje zavést zjednodušující značení pro geodetické koule a sféry. Vskutku, je-li  $\exp_p(B_R(0))$  geodetická koule, potom tato množina musí být rovna metrické kouli se středem v  $p$  a poloměru  $R$ . Podobně, geodetická sféra  $\exp_p(\partial B_R(0))$  je přesně množina bodů, jejichž vzdálenost od  $p$  je rovna  $R$ . Tato pozorování ospravedlňují následující zjednodušující značení:

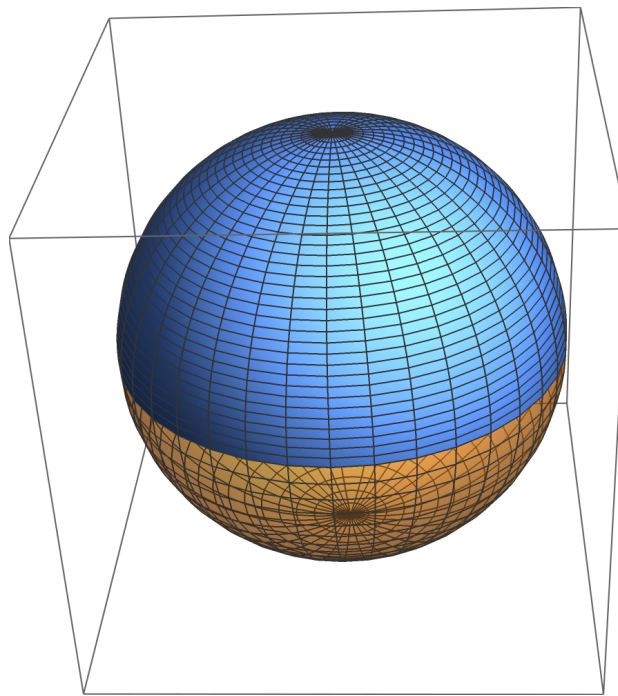
$$\begin{aligned} B_R(p) &:= \exp_p(B_R(0)), \\ \bar{B}_R(p) &:= \exp_p(\bar{B}_R(0)), \\ \partial B_R(p) &:= \exp_p(\partial B_R(0)). \end{aligned}$$

## 4.8 Geodetiky jsou lokálně minimalizující křivky

Tvrzení 4.19 by se mohlo na první pohled zdát jako kladná odpověď na otázku, zda jsou geodetiky minimalizující křivky. Ve skutečnosti se jedná pouze o částečnou odpověď, poněvadž Tvrzení 4.19 se týká pouze bodů na geodetice startující z bodu  $p$ . Obecněji je jasné, že požadovaného tvrzení můžeme dosáhnout pouze lokálně (například geodetika startující ze severního pólu sféry přestane být minimalizující, jakmile projde jižním pólem).

**Definice 4.21.** Křivka  $\gamma : I \rightarrow M$  je *lokálně minimalizující*, pokud

$$\forall t_0 \in I, \quad \exists \text{ okolí } I_0 \subset I, \quad \gamma|_{I_0} \text{ je minimalizující } \forall \text{ dva body z } I_0.$$



Obrázek 4.5: Severní polokoule bez rovníku coby stejnoměrně normální okolí severního pólu.

Za účelem důkazu lokálního tvrzení si nejdříve dokážeme silnější verzi Lemmatu 4.5. Otevřená množina  $\mathcal{W} \subset M$  se nazývá *stejnoměrně normální*, pokud:

$$\exists \delta > 0, \quad \forall p \in \mathcal{W}, \quad \mathcal{W} \subset B_\delta(p) \quad [\text{geodetická koule}].$$

Sféra  $\mathbb{S}^n$  bez jižního pólu je normální okolí severního pólu, avšak není stejnoměrně normální (dva různé body na rovníku lze propojit dvěma různými geodetikami). Severní polosféra bez rovníku je stejnoměrně normální okolí severního pólu (viz Obrázek 4.5).

**Lemma 4.22** (O stejnoměrně normálním okolí).

$$\forall p \in M, \quad \underbrace{\mathcal{U} \subset M}_{\text{otevřené okolí } p}, \quad \exists \underbrace{\mathcal{W} \subset \mathcal{U}}_{\text{stejnoměrně normální}}$$

*Důkaz.* Necht' číslo  $\varepsilon > 0$  a okolí  $U \in T_q M$  jsou jako v Tvzení 4.3, připomeňme, že  $U$  je podmnožinou definičního oboru lokální mapy  $x$  v bodě  $p \in M$ , a necht' okolí  $\mathcal{E} \subset U \times T_q M$  je jako v Definicí 4.4. Definujme zobrazení

$$F : \mathcal{E} \rightarrow M \times M : \{(q, V) \mapsto (q, \exp_q V)\}.$$

Kolem bodu  $F(p, 0) = (p, p)$  uvažujme souřadnicový systém  $((x, x), U \times U)$ . Poněvadž  $(\exp_p)_* 0 = I$ , matice tečného zobrazení  $F_{*(p,0)}$  má tvar

$$\mathbf{M}(F_{*(p,0)}) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Skutečně, v  $\mathcal{E}$  uvažujme křivky

$$\gamma_1(t) := (\alpha_1(t), 0) \quad \text{a} \quad \gamma_2(t) := (p, \alpha_2(t)),$$

kde  $\alpha_1$  je křivka v  $M$  splňující  $\alpha_1(0) = p$  a  $\alpha_1'(0) = \frac{\partial}{\partial x^k}|_p$  a  $\alpha_2$  je křivka v  $T_p M$  splňující  $\alpha_2(0) = 0$  a  $\alpha_2'(0) = \frac{\partial}{\partial x^k}|_p$ . Za  $\alpha_2$  lze volit  $\alpha_2(t) := t \frac{\partial}{\partial x^k}|_p$ , kde  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Tečné vektory splňují

$$\gamma_1'(0) := \left( \frac{\partial}{\partial x^k}|_p, 0 \right) \quad \text{a} \quad \gamma_2'(0) := \left( 0, \frac{\partial}{\partial x^k}|_p \right).$$

Potom

$$\begin{aligned} F_{*(p,0)} \left( \frac{\partial}{\partial x^k}|_p, 0 \right) &= F_{*(p,0)}(\gamma_1)_* \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} = (F \circ \gamma_1)_* \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\alpha_1(t), \exp_{\alpha_1(t)} 0) \\ &= (\alpha_1'(0), \alpha_1'(0)) = \left( \frac{\partial}{\partial x^k}|_p, \frac{\partial}{\partial x^k}|_p \right), \\ F_{*(p,0)} \left( 0, \frac{\partial}{\partial x^k}|_p \right) &= F_{*(p,0)}(\gamma_2)_* \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} = (F \circ \gamma_2)_* \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (p, \exp_p \alpha_2(t)) \\ &= (0, \alpha_2'(0)) = \left( 0, \frac{\partial}{\partial x^k}|_p \right). \end{aligned}$$

Z těchto formulek plyne tvar (4.9).

Jelikož matice (4.9) je invertibilní,  $F$  je lokální difeomorfismus na okolí bodu  $(p, 0)$ . To znamená, že existuje okolí  $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E} \subset TM$  bodu  $(p, 0)$  a okolí  $\mathcal{W}' \subset M \times M$  bodu  $(p, p)$ , že  $F : \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{W}'$  je difeomorfismus. Okolí  $\mathcal{E}'$  lze zvolit ve tvaru

$$\mathcal{E}' := \{(q, V) \in U' \times T_q M : |V| < \delta\},$$

kde  $U' \subset U \subset M$  je okolí bodu  $p$ . Nyní zvolme okolí  $\mathcal{W} \subset M \times M$  bodu  $(p, p)$  tak, že  $\mathcal{W} \times \mathcal{W} \subset \mathcal{W}'$ . Tvrdíme, že  $\mathcal{W}$  je stejnoměrně normální okolí bodu  $p$ . Vskutku, když  $q \in \mathcal{W}$  a  $B_\delta(0) \subset T_q M$ , pak

$$F(\{q\} \times B_\delta(0)) \supset \{q\} \times \mathcal{W},$$

jelikož  $F : \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{W}'$  je difeomorfismus. Z definice funkce  $F$  platí  $\exp_q(B_\delta(0)) \supset \mathcal{W}$ .  $\square$

**Věta 4.23.** *Libovolná geodetika je lokálně minimalizující.*

*Důkaz.* Necht'  $\gamma : I \rightarrow M$  je geodetika, kde  $I$  je otevřený, a  $t_0 \in I$ . Necht'  $\mathcal{W} \subset M$  je stejnoměrně normální okolí bodu  $\gamma(t_0) \in M$ . Necht'  $I_0 \subset I$  je souvislá komponenta  $\gamma^{-1}(\mathcal{W})$  obsahující bod  $t_0$ . Pro libovolné dva body  $t_1, t_2 \in I_0$  definice stejnoměrně normálního okolí implikuje, že bod  $q_2 := \gamma(t_2)$  je obsažen v geodetické kouli se středem v  $q_1 := \gamma(t_1)$ . Z Tvzení 4.19 plyne, že radiální geodetika z  $q_1$  do  $q_2$  je jediná minimalizující křivka, jež tyto body propojuje. Avšak restrikce  $\gamma|_{I_0}$  je rovněž geodetika propojující  $q_1$  a  $q_2$  a ležící ve stejné geodetické kouli, tudíž se musí jednat o minimalizující geodetiku.  $\square$

## 4.9 Úplnost

**Definice 4.24.**  $M$  je *geodeticky úplná*, pokud

$$\forall p \in M, V \in T_p M, \quad \exists \exp_p(V).$$

Jinými slovy,  $M$  je geodeticky úplná, pokud jakákoli geodetika  $t \mapsto \gamma(t)$  startující z bodu  $p$  je definována pro všechny hodnoty parametru  $t$ .

**Příklad 4.25.** Modelové prostory  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{S}_R^n$  a  $\mathbb{H}_R^n$  jsou geodeticky úplné variety.  $\diamond$

**Příklad 4.26.** Geodeticky neúplná varieta je například jakákoli otevřená podmnožina

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n$$

vybavená eukleidovskou metrikou, jelikož v ní existují geodetiky, jež dosáhnou hranice v konečném čase.  $\diamond$

**Příklad 4.27.** Zajímavějším příkladem je varieta

$$(\mathbb{R}^n, (\sigma^{-1})^* \mathring{g}_R),$$

kde  $\mathring{g}_R$  je metrika sféry  $\mathbb{S}_R^n$  a  $\sigma$  je stereografická projekce. Skutečně, maximální geodetika  $\gamma_{E_1}$  uteče do nekonečna v  $\mathbb{R}^n$  v konečném čase, kde  $E_1$  je první vektor standardní báze v  $\mathbb{R}^n$ .  $\diamond$

Pro důkaz následující věty máme nyní všechny ingredience.

**Věta 4.28** (Hopf–Rinow). *Nechť  $M$  je souvislá. Potom*

$$M \text{ je geodeticky úplná} \iff M \text{ je úplná coby metrický prostor.}$$

*Důkaz.* Směr  $\Leftarrow$  je snadný, zatímco opačná implikace  $\Rightarrow$  je technicky poměrně náročnější, tudíž ji z časových důvodů vynecháme.

$\Leftarrow$  Předpokládejme, že  $M$  je metricky úplná, avšak geodeticky neúplná. Potom existuje geodetika  $\gamma : [0, b) \rightarrow M$  s jednotkovou rychlostí  $|\gamma'| = 1$ , jež není definována na větším intervalu  $[0, b + \varepsilon)$  s  $\varepsilon > 0$ . Nechť  $\{t_i\} \nearrow b$  (rostoucí posloupnost konvergující k bodu  $b$ ) a definujme  $q := \gamma(t_i)$ . Poněvadž je  $\gamma$  parametrizovaná obloukem, platí

$$d(q_i, q_j) \leq L(\gamma|_{[t_i, t_j]}) = |t_j - t_i|$$

pro všechna  $j \geq i$ , a tudíž  $\{q_i\}$  je cauchyovská posloupnost. Z metrické úplnosti plyne, že  $\{q_i\}$  konverguje k nějakému bodu  $q \in M$ .

Nechť  $\mathcal{W}$  je stejnoměrně normální okolí bodu  $q$  takové, že geodetická koule  $B_\delta(r) \supset \mathcal{W}$  pro všechny body  $r \in \mathcal{W}$  s nějakým fixním  $\delta > 0$ . Pro dostatečně velká  $j$  platí  $q_j \in \mathcal{W}$  a  $t_j > b - \delta$ . Fakt, že  $B_\delta(q_j)$  je geodetická koule, zaručuje, že jakákoli geodetika startující v bodě  $q_j$  existuje přinejmenším ještě v čase  $\delta$ . Toto speciálně platí pro geodetiku  $\sigma$  splňující  $\sigma(0) = q_j$  a  $\sigma'(0) = \gamma'(t_j)$ . Z jednoznačnosti geodetik však plyne, že  $\sigma$  je pouhou reparametrizací  $\gamma$ . Tudíž  $\tilde{\gamma}(t) := \sigma(t_j + t)$  je rozšíření  $\gamma$  za bod  $b$ , což je spor.  $\square$



## 5 Křivost

Pro křivku  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d : \{t \mapsto \gamma(t)\}$  parametrizovanou obloukem je křivost definována vztahem  $|\gamma''|$ . Poněvadž  $\gamma'(t)$  je tečný vektor (aneb jednotková rychlost), lze křivost interpretovat jako odchylku (derivaci) od přímky (aneb zrychlení). Obecněji, pro křivku  $\gamma : I \rightarrow M$  se definuje (geodetická) křivost  $|D_t \gamma'|$  coby odchylka od geodetiky. Jak definovat s derivací související *tenzorovou* veličinu pro vícedimenzionální variety?

### 5.1 Tenzor křivosti

První konstrukce, co člověka napadne, je kovariantní derivace

$$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y,$$

avšak nejedná se o tenzor. Tenzor z kovariantní derivace lze vyrobit kombinací (*tenzor torze*)

$$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0,$$

avšak tento je skutečně identicky roven nule pro riemannovskou konexi (viz Definice 3.3). Další tenzorovou kombinací, jež zahrnuje druhé derivace, je (*riemannovský*) *endomorfismus křivosti*

$$(X, Y, Z) \mapsto \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z =: R(X, Y)Z.$$

Uvidíme, že toto je dobrá definice, jež skutečně souvisí s křivostí.

Všimněte si, že namísto standardního zápisu  $R(X, Y, Z)$ , jak je obvyklé pro funkce, bizarně píšeme  $R(X, Y)Z$ , poněvadž role vektoru  $Z$  je specifická. Podle definice je endomorfismus křivosti zobrazení

$$R : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M) : \{(X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z\}.$$

Zafixujeme-li vektory  $X, Y$ , máme tedy endomorfismus

$$R : \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M) : \{Z \mapsto R(X, Y)Z\}.$$

V lokálních souřadnicích  $x$  definujeme koeficienty

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k} =: R_{ijk}{}^l \frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Pak (coby difeomorfismus  $R : \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M)$ )

$$R(X, Y)Z = X^i Y^j R_{ijk}{}^l Z^k \frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Přímým výpočtem lze ověřit formulkou

$$R_{ijk}{}^l = \Gamma_{jk,i}^l - \Gamma_{ik,j}^l + \Gamma_{i\rho}^l \Gamma_{jk}^\rho - \Gamma_{j\rho}^l \Gamma_{ik}^\rho.$$

Užitím metriky můžeme definovat (*riemannovský*) *tenzor křivosti* coby tenzor  $Rm$  řádu 4 definovaný předpisem

$$Rm(X, Y, Z, W) := \langle R(X, Y)Z, W \rangle,$$

kde  $X, Y, Z, W \in \mathcal{T}(M)$ . Tedy

$$Rm : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow C^\infty(M) : \{(X, Y, Z, W) \mapsto \langle R(X, Y)Z, W \rangle\}.$$

Ověření, že se skutečně jedná o tenzor podle Definice 0.3, je přenecháno čtenáři.

V lokálních souřadnicích platí

$$Rm = R_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l,$$

kde

$$R_{ijkl} := R_{ijk}{}^p g_{pl}.$$

Lze ukázat, že  $R$  a  $Rm$  jsou lokální izometrické invarianty, což znamená, že pro libovolnou lokální izometrii

$$\varphi : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$$

platí

$$\varphi^* \widetilde{Rm} = Rm \quad \text{a} \quad \widetilde{R}(\varphi_* X, \varphi_* Y) \varphi_* Z = \varphi_*(R(X, Y)Z).$$

## 5.2 Ploché variety

Užitím eukleidovské konexe se snadno ukáže, že  $\overline{R} = 0$  a  $\overline{Rm} = 0$  pro  $\mathbb{R}^n$ . To je první argument ospravedlňující definici riemannovského tenzoru: Očekáváme, že bude měřit odchylku variety  $M$  od eukleidovského prostoru  $\mathbb{R}^n$ . To nyní formalizujeme následující větou.

**Definice 5.1.**  $M$  je plochá  $:\iff M$  je lokálně izometrická  $\mathbb{R}^n$ .

To, že  $M$  je lokálně izometrická prostoru  $\mathbb{R}^n$ , znamená, že pro libovolný bod v  $M$  existuje okolí izometrické otevřené množině v  $\mathbb{R}^n$  vybavené eukleidovskou metrikou.

**Věta 5.2.**  $M$  je plochá  $\iff Rm = 0$ .

*Důkaz.*

$\boxed{\implies}$  Jak už jsme zmínili,  $\overline{R} = 0$  a  $\overline{Rm} = 0$  pro  $\mathbb{R}^n$ . Poněvadž je  $M$  plochá, pro libovolný bod v  $M$  existuje okolí  $\mathcal{U}$  a izometrie  $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \overline{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^n$  takové, že  $Rm = \varphi^* \overline{Rm} = 0$ .

$\boxed{\impliedby}$  Pro jednoduchost se omezme na dimenzi  $n = 2$ . Necht'  $(E_1|_p, E_2|_p)$  je ortonormální báze pro  $T_p M$ . Existují souřadnice (například normální souřadnice) takové, že  $E_i|_p = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ . Případným smrsknutím souřadnicového okolí můžeme předpokládat, že obraz souřadnicové mapy je čtverec

$$Q_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x^i| < \varepsilon, i = 1, 2\}.$$

- Paralelně přenesme  $E_1|_p$  a  $E_2|_p$  podél osy  $x^1$ .
- V každém bodě osy  $x^1$  přenesme přenesený vektor podél souřadnicové čáry paralelní s osou  $x^2$ .

Tímto postupem obdržíme ortonormální repér  $(E_1, E_2)$  definovaný na  $Q_\varepsilon$ . *Hladkost* plyne z hladké závislosti řešení obyčejných diferenciálních rovnic na počátečních podmínkách. *Ortonormálnost* plyne z toho, že paralelní přenos zachovává skalární součin (viz bod (iv) Tvrzení 3.2). Tvrdíme, že se jedná o *paralelní* repér. Za tímto účelem stačí ukázat, že

$$\forall i, j = 1, 2, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} E_j = 0$$

(poněvadž  $\nabla_X E_j$  je lineární nad  $C^\infty(M)$  v  $X$ ). Z konstrukce je zřejmé, že

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} E_j &= 0 \quad \text{na ose } x^1, \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} E_j &= 0 \quad \text{v rovině } (x^1, x^2). \end{aligned}$$

Pro zbytek stačí ukázat, že

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} E_j) = 0.$$

Avšak díky  $[\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}] = 0$  a předpokladu  $Rm = 0$  platí

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} E_j) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} E_j) = 0.$$

Tudíž  $(E_1, E_2)$  je skutečně ortonormální paralelní repér na  $Q_\varepsilon$ .

Platí

$$[E_1, E_2] = \nabla_{E_1} E_2 - \nabla_{E_2} E_1 = 0,$$

kde první rovnost plyne ze symetrie riemannovské konexe a druhá rovnost platí díky paralelnosti  $(E_1, E_2)$ . Máme tedy *komutující* nezávislé vektorové pole  $(E_1, E_2)$  na  $Q_\varepsilon \ni p$ . Tvrzení 0.7 pak tvrdí, že existují souřadnice  $(y^1, y^2)$  definované na okolí bodu  $p$  takové, že

$$E_1 = \frac{\partial}{\partial y^1} \quad \text{a} \quad E_2 = \frac{\partial}{\partial y^2}.$$

V těchto souřadnicích

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = g(E_i, E_j) = \delta_{ij},$$

tudíž zobrazení  $y = (y^1, y^2)$  představuje izometrii z okolí bodu  $p \in M$  na otevřenou podmnožinu eukleidovského prostoru  $\mathbb{R}^2$ .  $\square$

### 5.3 Symetrie

Následující symetrie je zřejmá přímo z definice.

**Tvrzení 5.3** (Prohození prvních dvou argumentů).

$$Rm(X, Y, Z, W) = -Rm(Y, X, Z, W)$$

neboli ve složkách

$$R_{ijkl} = -R_{jikl}.$$

Následující symetrie platí díky kompatibilitě riemannovské konexe s metrikou.

**Tvrzení 5.4** (Prohození posledních dvou argumentů).

$$Rm(W, X, Y, Z) = -Rm(W, X, Z, Y)$$

neboli ve složkách

$$R_{ijkl} = -R_{ijlk}.$$

*Důkaz.* Stačí ukázat

$$\forall Y, \quad Rm(W, X, Y, Y) = 0,$$

poněvadž pak požadované tvrzení bude plynout rozvojem  $Rm(W, X, Y + Z, Y + Z)$ . Užitím kompatibility konexe s metrikou máme

$$\begin{aligned} \oplus \quad WX|Y|^2 &= WX\langle Y, Y \rangle = W2\langle \nabla_X Y, Y \rangle = 2\langle \nabla_W \nabla_X Y, Y \rangle + 2\langle \nabla_X Y, \nabla_W Y \rangle, \\ \ominus \quad XW|Y|^2 &= \phantom{WX|Y|^2} = 2\langle \nabla_X \nabla_W Y, Y \rangle + 2\langle \nabla_W Y, \nabla_X Y \rangle, \\ \ominus \quad [W, X]|Y|^2 &= \phantom{WX|Y|^2} = 2\langle \nabla_{[W, X]} Y, Y \rangle. \end{aligned}$$

Odečteme-li poslední dvě identity od první, dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= 2\langle \nabla_W \nabla_X Y, Y \rangle - 2\langle \nabla_X \nabla_W Y, Y \rangle - 2\langle \nabla_{[W, X]} Y, Y \rangle \\ &= 2\langle R(W, X)Y, Y \rangle = 2Rm(W, X, Y, Y), \end{aligned}$$

což je to, co jsme chtěli dokázat. □

Následující symetrie plyne ze symetrie riemannovské konexe.

**Tvrzení 5.5** (*První (algebraická) Bianchiho identita*).

$$Rm(W, X, Y, Z) + Rm(X, Y, W, Z) + Rm(Y, W, X, Z) = 0$$

neboli ve složkách (cyklická permutace prvních tří argumentů)

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0.$$

*Důkaz.* Platí

$$\begin{aligned} &R(W, X)Y + R(X, Y)W + R(Y, W)X \\ &= \nabla_W \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_W Y - \nabla_{[W, X]} Y \\ &\quad + \nabla_X \nabla_Y W - \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_{[X, Y]} W \\ &\quad + \nabla_Y \nabla_W X - \nabla_W \nabla_Y X - \nabla_{[Y, W]} X \\ &= \nabla_W (\nabla_X Y - \nabla_Y X) + \nabla_X (\nabla_Y W - \nabla_W Y) + \nabla_Y (\nabla_W X - \nabla_X W) \\ &\quad - \nabla_{[W, X]} Y - \nabla_{[X, Y]} W - \nabla_{[Y, W]} X \\ &= \nabla_W [X, Y] + \nabla_X [Y, W] + \nabla_Y [W, X] \\ &\quad - \nabla_{[X, Y]} W - \nabla_{[Y, W]} X - \nabla_{[W, X]} Y \\ &= [W, [X, Y]] + [X, [Y, W]] + [Y, [W, X]] = 0. \end{aligned}$$

Zde třetí rovnost platí díky symetrii konexe ( $\Leftrightarrow$  tenzor torze je identicky nulový) a poslední rovnost je Jacobiho identita.  $\square$

**Tvrzení 5.6** (Prohození prvního a posledního páru argumentů).

$$Rm(W, X, Y, Z) = Rm(Y, Z, W, X)$$

neboli ve složkách

$$R_{ijkl} = R_{klij}.$$

*Důkaz.* Užitím algebraické Bianchiho identity cyklicky permutované dostáváme

$$\begin{aligned} Rm(W, X, Y, Z) + Rm(X, Y, W, Z) + Rm(Y, W, X, Z) &= 0, \\ Rm(X, Y, Z, W) + Rm(Y, Z, X, W) + Rm(Z, X, Y, W) &= 0, \\ Rm(Y, Z, W, X) + Rm(Z, W, Y, X) + Rm(W, Y, Z, X) &= 0, \\ Rm(Z, W, X, Y) + Rm(W, X, Z, Y) + Rm(X, Z, W, Y) &= 0. \end{aligned}$$

Sečteme-li tyto identity a uijeme-li symetrií Tvrzení 5.3 a 5.4, dostaneme

$$2Rm(Y, W, X, Z) - 2Rm(X, Z, Y, W) = 0,$$

což je požadovaná identita.  $\square$

**Tvrzení 5.7** (*Druhá (diferenciální) Bianchiho identita*).

$$\nabla Rm(X, Y, Z, V, W) + \nabla Rm(X, Y, V, W, Z) + \nabla Rm(X, Y, W, Z, V) = 0$$

neboli ve složkách (cyklická permutace posledních tří argumentů)

$$R_{ijkl;m} + R_{ijlm;k} + R_{ijmk;l} = 0. \quad (5.1)$$

*Důkaz.* Užitím symetrie Tvrzení 5.6 je požadovaná identita ekvivalentní vztahu

$$\nabla Rm(Z, V, X, Y, W) + \nabla Rm(V, W, X, Y, Z) + \nabla Rm(W, Z, X, Y, V) = 0,$$

kteřý díky multilinearitě stačí dokázat pro vektory nějaké báze. Toto tvrzení se klasicky dokazuje pracným výpočtem, který lze však významně zjednodušit užitím normálních souřadnic. Necht'  $(x^i)$  jsou normální souřadnice v  $p \in M$ . Necht'  $X, Y, Z, V, W$  jsou libovolné vektory souřadnicové báze  $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ . Zjednodušení následujícího výpočtu je způsobeno těmito vlastnostmi:

- (1)  $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$ ;
- (2)  $\nabla \frac{\partial}{\partial x^i}|_p = 0$  ( $\Leftarrow \Gamma_{ij}^k(p) = 0$ ).

Užitím vlastnosti (1) máme

$$\begin{aligned}\nabla_W Rm(Z, V, X, Y) &= \nabla_W \langle R(Z, V)X, Y \rangle = \langle \nabla_W \nabla_Z \nabla_V X - \nabla_W \nabla_V \nabla_Z X, Y \rangle, \\ \nabla_Z Rm(V, W, X, Y) &= \langle \nabla_Z \nabla_V \nabla_W X - \nabla_Z \nabla_W \nabla_V X, Y \rangle, \\ \nabla_V Rm(W, Z, X, Y) &= \langle \nabla_V \nabla_W \nabla_Z X - \nabla_V \nabla_Z \nabla_W X, Y \rangle,\end{aligned}$$

kde poslední dvě identity jsou pouze variantou první po cyklické permutaci vektorů  $W, Z, V$ . Sečteme-li tyto identity, dostaneme

$$\begin{aligned}\nabla_W Rm(Z, V, X, Y) + \nabla_Z Rm(V, W, X, Y) + \nabla_V Rm(W, Z, X, Y) \\ = \langle R(W, Z)\nabla_V X + R(Z, V)\nabla_W X + R(V, W)\nabla_Z X, Y \rangle \\ = 0,\end{aligned}$$

kde poslední rovnost platí díky vlastnosti (2).  $\square$

## 5.4 Ricciho a skalární křivosti

*Ricciho křivost* (nebo *tenzor*) je tenzor  $Rc = (R_{ij})$  řádu 2 definovaný předpisem (kontrakce přes první a poslední index)

$$R_{ij} := R_{kij}{}^k.$$

Užitím symetrií (d) a (a)–(b) výše platí

$$R_{ij} = g^{km} R_{kijm} = g^{km} R_{jmki} = g^{km} R_{mjik} = R_{ji},$$

z čehož vidíme, že Ricciho křivost je *symetrický* tenzor. Podobně

$$R_{ij} = g^{km} R_{kijm} = g^{km} R_{ikmj} = R_{ik}{}^k{}_j = -R_{ki}{}^k{}_j = -R_{ikj}{}^k,$$

tudíž Ricciho křivost jsme také mohli definovat jako kontrakci přes prostřední indexy či (až na znaménko) jako kontrakci přes první a třetí index nebo přes druhý a čtvrtý index. Naopak kontrakce přes první dva indexy či poslední dva indexy by daly pouze triviální výsledek.

*Skalární křivost* je skalární pole

$$S := R_i{}^i,$$

tedy stopa Ricciho křivosti,  $S = \text{tr}_g Rc$ .

**Tvrzení 5.8** (Kontrahovaná Bianchiho identita).

$$\text{div } Rc = \frac{1}{2} \nabla S \tag{5.2}$$

neboli ve složkách

$$R_i{}^k{}_{;k} = \frac{1}{2} S_{;i}.$$

*Důkaz.* Diferenciální Bianchiho identita (5.1) zní

$$R_{ijkl;m} + R_{ijlm;k} + R_{ijmk;l} = 0.$$

Přenasobením  $g^{il}$  (kontrakce přes indexy  $i = l$ ) dostaneme

$$R_{ljk}{}^l{}_{;m} + R_{ljm}{}^l{}_{;k} + R^l{}_{jmk;l} = 0,$$

což je užitím definice Ricciho křivosti ekvivalentní rovnosti

$$R_{jk;m} - R_{jm;k} + R^l_{jmk;l} = 0.$$

Přenasobením  $g^{jk}$  (kontrakce přes indexy  $j = k$ ) nakonec dostaneme

$$S_{;m} - R^k_{m;k} - R^l_{m;l} = 0.$$

Tato identita je ekvivalentní vztahu (5.2). □

## 5.5 Einsteinova metrika

**Definice 5.9.**  $g$  je *Einsteinova metrika*  $:\iff Rc = \lambda g$ , kde  $\lambda$  je skalární funkce.

Ve složkách to znamená  $R_{ij} = \lambda g_{ij}$ . Přenasobíme-li tuto rovnost  $g^{ji}$ , dostaneme  $S = \lambda n$ . Vidíme tedy, že  $g$  je Einsteinova metrika tehdy a jen tehdy, pokud

$$Rc = \frac{S}{n} g. \quad (5.3)$$

**Tvrzení 5.10.** *Nechť  $M$  je souvislá varieta s  $\dim M \geq 3$ . Potom*

$$g \text{ je Einsteinova metrika} \implies S = \text{const}.$$

*Důkaz.* Kovariantní derivace vztahu (5.3) ve složkách zní

$$R_{ij;k} = \frac{1}{n} S_{;k} g_{ij}.$$

Přenasobíme-li tuto rovnost  $g^{jk}$ , dostaneme

$$R_i^k{}_{;k} = \frac{1}{n} S_{;i}.$$

Užitím kontrahované Bianchiho identity (Tvrzení 5.8) máme

$$\frac{1}{2} S_{;i} = \frac{1}{n} S_{;i},$$

odkud vidíme, že  $\nabla S = 0$  na  $M$ , pokud  $n \neq 2$ . Poněvadž je  $M$  souvislá, dostáváme  $S = \text{const}$  na  $M$ . □

Důkaz zřejmě funguje i pro  $n = 1$ ; pro jednodimenzionální variety je však pojem Einsteinovy metriky triviální, poněvadž tenzor křivosti (a tedy i  $Rc$  a  $S$ ) je identicky roven nule. Pro dvojdimenzionální variety tvrzení neplatí, jak uvidíme v následující kapitole (viz Důsledek 6.10).

## 6 Riemannovské podvariety

Cílem této kapitoly je jednak samotný koncept riemannovských podvariet, avšak především kvantitativní interpretace tenzoru křivosti.

### 6.1 Geometrie podvariet

Značení pro tuto kapitolku je následující:

$$\begin{aligned} (\tilde{M}, \tilde{g}) & \text{ riemannovská varieta (ambientní prostor), } \dim \tilde{M} =: m, \\ (M, g) & \text{ riemannovská podvarieta, } M \subset \tilde{M}, \quad \dim M =: n, \\ \iota : M & \rightarrow \tilde{M} \text{ injektivní vnoření, } \quad g := \iota^* \tilde{g}. \end{aligned}$$

Vnoření  $\iota$  je izometrické kvůli speciálnímu tvaru  $g$ . Předpokládáme, že vnoření je injektivní, abychom mohli mluvit o podvarietě. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že se jedná o vložení, jelikož nás zajímají pouze lokální výpočty (vnoření je lokálně vložení).

Dále:

$$\begin{aligned} T\tilde{M} &= \bigcup_{p \in \tilde{M}} T_p \tilde{M} \quad \text{tečný svazek nad } \tilde{M}, \\ TM &= \bigcup_{p \in M} T_p M \quad \text{tečný svazek nad } M, \\ T\tilde{M}|_M &:= \bigcup_{p \in M} T_p \tilde{M} \quad \text{ambientní tečný svazek nad } M. \end{aligned}$$

V každém bodě  $p \in M$  máme ortogonální direktní součet

$$T_p \tilde{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp, \quad (6.1)$$

kde

$$(T_p M)^\perp =: N_p M \quad \text{je normálový prostor}$$

v bodě  $p$  vzhledem ke skalárnímu součinu  $\tilde{g}$  na  $T_p \tilde{M}$ . Nakonec zavedeme

$$NM := \bigcup_{p \in M} N_p M \quad \text{normálový svazek nad } M.$$

Repér z následujícího technického tvrzení se nazývá *adaptovaný repér*.

**Lemma 6.1.**  $\forall p \in M, \exists$  okolí  $\tilde{U} \subset \tilde{M}, (E_1, \dots, E_m)$  ortonormální repér na  $\tilde{U}$ ,

$$\forall q \in \tilde{U} \cap M, (E_1|_q, \dots, E_n|_q) \text{ je ortonormální báze pro } T_q M.$$

*Důkaz.* Důkaz je založen na faktu, že pro libovolný bod  $p \in M$  existuje okolí  $\tilde{U} \subset \tilde{M}$  a souřadnice (tzv. *slice coordinates*)  $(x^1, \dots, x^m)$  na  $\tilde{U}$  takové, že

$$\tilde{U} \cap M = \{x : x^{n+1} = \dots = x^m = 0\} \quad \wedge \quad (x^1, \dots, x^n) \text{ jsou lokální souřadnice pro } M.$$

Nakonec stačí aplikovat Gram–Schmidtův ortogonalizační proces na souřadnicový repér  $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m})$ .  $\square$



**Důsledek 6.2.**  $(E_{n+1}|_p, \dots, E_m|_p)$  je ortonormální báze pro  $N_pM$ .

Máme rozklad

$$\forall X \in T_p\tilde{M}|_M, \quad X = \underbrace{X^1 E_1|_p + \dots + X^n E_n|_p}_{X^\top \in T_p M} + \underbrace{X^{n+1} E_{n+1}|_p + \dots + X^m E_m|_p}_{X^\perp \in N_p M},$$

a odpovídající projekty

$$\pi^\top : T\tilde{M}|_M \rightarrow TM \quad \text{a} \quad \pi^\perp : T\tilde{M}|_M \rightarrow NM.$$

Tedy  $X^\top = \pi^\top X$  a  $X^\perp = \pi^\perp X$ .

## 6.2 Druhá fundamentální forma

Pro libovolná vektorová pole  $X, Y \in \mathcal{T}(M)$  existují rozšíření  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{T}(\tilde{M})$ ; později nebudeme rozšířené vektory vlnovkou obvykle odlišovat. Obdobně budeme stejným symbolem  $\langle X, Y \rangle$  značit skalární součin vzhledem k  $g$  i  $\tilde{g}$ , poněvadž  $g$  je pouze restrikce  $\tilde{g}$  na  $TM$ .

Užitím (6.1) máme ortogonální direktní rozklad

$$\tilde{\nabla}_X Y = (\tilde{\nabla}_X Y)^\top + (\tilde{\nabla}_X Y)^\perp, \quad (6.2)$$

kde všude by měly vystupovat ovlnkované vektory  $\tilde{X}, \tilde{Y}$ . Druhá komponenta v tomto rozkladu definuje *druhou fundamentální formu*

$$II : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{N}(M) : \{(X, Y) \mapsto (\tilde{\nabla}_X Y)^\perp\}.$$

Je toto zobrazení dobře definované (nezávisí na rozšíření vektorů  $X, Y$ )? První pozorování je, že se jedná o *symetrickou* formu, tedy  $II(X, Y) = II(Y, X)$ . Skutečně:

$$II(X, Y) - II(Y, X) = (\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X)^\perp = [X, Y]^\perp = 0,$$

kde poslední rovnost platí díky tomu, že vektory  $X, Y$  jsou tečné k  $M$  ve všech bodech variety  $M$ . Hodnota  $II(X, Y)$  zřejmě nezávisí na rozšíření vektoru  $X$ , poněvadž  $X \mapsto \tilde{\nabla}_X$  je superlokální operátor ( $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_p$  závisí pouze na  $\tilde{X}_p = X_p$ , viz Tvzení 2.3). To, že  $II(X, Y)$  nezávisí rovněž na rozšíření vektoru  $Y$  plyne z předchozího a ze symetrie  $II$ . Nakonec si uvědomme, že zobrazení  $II$  je bilineární nad  $C^\infty(M)$ ; to je zřejmé pro první argument a pro druhý to opět plyne ze symetrie.

(Co je *první fundamentální forma*? Není to rozhodně první člen rozkladu (6.2), avšak stará terminologie pro indukovanou metriku  $g : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M)$ .) Nyní se podívejme na první člen rozkladu (6.2).

**Lemma 6.3.**  $(\tilde{\nabla}_X Y)^\top = \nabla_X Y$ .

*Důkaz.* Definujme

$$\nabla^\top : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M) : \{(X, Y) \mapsto (\tilde{\nabla}_X Y)^\top\},$$

kde vektory  $X, Y$  vystupující v  $(\tilde{\nabla}_X Y)^\top$  by měly být ovlnkované (libovolná rozšíření do  $\tilde{M}$ ). Stejně jako pro tečnou konexi (viz kapitolka 3.1) lze ukázat, že se jedná o konexi. Strategie důkazu spočívá v tom, že se ukáže, že  $\nabla^\top$  je symetrická a kompatibilní s metrikou  $g$ . Potom nezbytně  $\nabla^\top = \nabla$  z jednoznačnosti riemannovské konexe.  $\square$

Jako důsledek předchozího lemmatu dostáváme následující větu.

**Věta 6.4** (Gaussova formule).  $\forall X, Y \in \mathcal{T}(M)$ ,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y)$$

na  $M$ .

Druhá fundamentální forma je tedy míra rozdílu mezi vnitřní konexí  $\nabla$  a vnější konexí  $\tilde{\nabla}$ .

Přestože je druhá fundamentální forma definována skrze kovariantní derivace vektorových polí *tečných* k  $M$ , lze ji rovněž využít k výpočtu kovariantních derivací *normálových* vektorových polí.

**Lemma 6.5** (Weingartenova rovnice).  $\forall X, Y \in \mathcal{T}(M), N \in \mathcal{N}(M)$ ,

$$\langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle = -\langle N, II(X, Y) \rangle$$

na  $M$ .

*Důkaz.* Poněvadž  $\langle N, Y \rangle = 0$  identicky na  $M$ , máme

$$\begin{aligned} 0 &= X \langle N, Y \rangle \\ &= \langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle + \langle N, \tilde{\nabla}_X Y \rangle \\ &= \langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle + \langle N, \nabla_X Y + II(X, Y) \rangle \\ &= \langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle + \langle N, II(X, Y) \rangle, \end{aligned}$$

což je ekvivalentní požadované identitě.  $\square$

**Věta 6.6** (Gaussova rovnice).  $\forall X, Y, Z, W \in \mathcal{T}(M)$ ,

$$\widetilde{Rm}(X, Y, Z, W) = Rm(X, Y, Z, W) - \langle II(X, W), II(Y, Z) \rangle + \langle II(X, Z), II(Y, W) \rangle.$$

*Důkaz.* Rozšiřme  $X, Y, Z, W$  libovolně na vektorová pole na  $\tilde{M}$ , jež jsou tečná k  $M$  v bo-

dech  $M$ . Na  $M$  platí

$$\begin{aligned}
& \widetilde{Rm}(X, Y, Z, W) \\
&= \langle \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z, W \rangle \\
&= \langle \tilde{\nabla}_X (\nabla_Y Z + II(Y, Z)) - \tilde{\nabla}_Y (\nabla_X Z + II(X, Z)) - (\nabla_{[X, Y]} Z + II([X, Y], Z)), W \rangle \\
&= \langle \tilde{\nabla}_X (\nabla_Y Z + II(Y, Z)) - \tilde{\nabla}_Y (\nabla_X Z + II(X, Z)) - \nabla_{[X, Y]} Z, W \rangle \\
&= \langle \tilde{\nabla}_X \nabla_Y Z, W \rangle - \langle II(Y, Z), II(X, W) \rangle \\
&\quad - \langle \tilde{\nabla}_Y \nabla_X Z, W \rangle + \langle II(X, Z), II(Y, W) \rangle \\
&\quad - \langle \nabla_{[X, Y]} Z, W \rangle \\
&= \langle \nabla_X \nabla_Y Z, W \rangle - \langle II(Y, Z), II(X, W) \rangle \\
&\quad - \langle \nabla_Y \nabla_X Z, W \rangle + \langle II(X, Z), II(Y, W) \rangle \\
&\quad - \langle \nabla_{[X, Y]} Z, W \rangle \\
&= Rm(X, Y, Z, W) - \langle II(Y, Z), II(X, W) \rangle + \langle II(X, Z), II(Y, W) \rangle,
\end{aligned}$$

kde druhá rovnost je Gaussova formule (Věta 6.6) a čtvrtá rovnost je Weingartenova rovnice (Lemma 6.5) s volbou  $N := II(Y, Z)$  a  $N := II(X, Z)$ .  $\square$

### 6.3 Křivost křivek

Nechť  $\gamma : I \rightarrow M$  je křivka parametrizovaná obloukem, t.j.  $|\gamma'| = 1$ . Definujeme (*geodetickou křivost*) křivky  $\gamma$  coby funkci

$$\kappa := |D_t \gamma'|.$$

Vidíme, že  $\kappa = 0$  tehdy a jen tehdy, pokud  $\gamma$  je geodetika. Křivost  $\kappa$  tedy měří deviaci křivky  $\gamma$  od bytí geodetikou. (Pokud  $M = \mathbb{R}^n$ ,  $\kappa = |\gamma''|$  je obvyklá křivost.)

Uvažujme nyní, jako výše, že  $M$  je podvarieta variety  $\tilde{M}$ . Potom má křivka  $\gamma$  dvě křivosti: křivost  $\kappa$  (*vnitřní*)  $\gamma$  coby křivky na  $M$  a křivost  $\tilde{\kappa}$  (*vnější*)  $\gamma$  coby křivky na  $\tilde{M}$ . Vztah mezi nimi je dán druhou fundamentální formou.

**Věta 6.7** (Gaussova formule pro křivky).  $\forall V \in \mathcal{T}(\gamma)$ ,  $V \parallel M$  ( $:\Leftrightarrow V$  je tečné k  $M$ ),

$$\tilde{D}_t V = D_t V + II(\gamma', V)$$

na  $M$ .

*Důkaz.* Užitím adaptovaného ortonormálního repéru  $(E_1, \dots, E_m)$  můžeme psát  $V(t) = V^i(t)E_i$ , kde sumujeme pouze přes  $i = 1, \dots, n$  (protože  $V$  je paralelní k  $M$ ). Potom z Gaussovy formule (Věta 6.4) plyne

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_t V &= V^{i'} E_i + V^i \tilde{\nabla}_{\gamma'} E_i \\
&= V^{i'} E_i + V^i \nabla_{\gamma'} E_i + V^i II(\gamma', E_i) \\
&= D_t V + II(\gamma', V),
\end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.  $\square$

Pro speciální volbu  $V := \gamma'$  tedy dostáváme následující formulku pro zrychlení libovolné křivky  $\gamma$  na  $M \subset \tilde{M}$ :

$$\tilde{D}_t \gamma' = D_t \gamma' + II(\gamma', \gamma').$$

Z toho dostáváme hledaný vztah

$$\tilde{\kappa}^2 = \kappa^2 + |II(\gamma', \gamma')|^2.$$

## 6.4 Nadplochy v eukleidovském prostoru

Podívejme se nyní na speciální případ, kdy

$$\tilde{M} = \mathbb{R}^{n+1},$$

tedy  $\text{codim } M = 1$ . V každém bodě  $p \in M$  existují *právě dva* jednotkové normálové vektory. Pokud je  $M$  *orientovatelná* (což můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, poněvadž nás zajímají pouze lokální vlastnosti), můžeme pomocí orientace zvolit *jednoznačně* určené hladké normálové vektorové pole

$$N \in \mathcal{N}(M)$$

(lze volit  $N = \pm E_{n+1}$ , kde  $(E_1, \dots, E_{n+1})$  je adaptovaný ortonormální repér). Tato jednoduchost normálového prostoru razantně zjednodušuje předchozí obecné definice a formulky.

V prvé řadě můžeme namísto vektorového pole  $II$  uvažovat *skalární druhou fundamentální formu*

$$h : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow C^\infty(M) : \{(X, Y) \mapsto \langle II(X, Y), N \rangle\},$$

což je symetrický tenzor řádu 2. Všimněte si, že jiná volba  $N$  změní pouze znaménko  $h(X, Y)$ . Poněvadž  $NM = \text{span } N$ , platí

$$II(X, Y) = h(X, Y)N.$$

V lokálních souřadnicích máme

$$h = h_{ij} dx^i dx^j, \quad h_{ij} := h\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right).$$

Zvednutím jednoho indexu dostaneme *tvarový operátor*

$$s : \mathcal{T}^*(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow C^\infty(M), \quad s = h^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j, \quad h^i_j := g^{ik} h_{kj}.$$

Jako obvykle můžeme takovýto smíšený tenzor ztotožnit s endomorfismem

$$\hat{s} : \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M), \quad s(\omega, X) =: \omega(\hat{s}X),$$

kde  $X \in \mathcal{T}(M)$ ,  $\omega \in \mathcal{T}^*(M)$ . Platí

$$\forall X, Y \in \mathcal{T}(M), \quad \langle \hat{s}X, Y \rangle = h(X, Y).$$

Endomorfismus  $\hat{s}$  je tedy operátor reprezentující formu  $h$ . Poněvadž je  $h$  symetrická, je operátor  $\hat{s}$  samosdružený. V lokálních souřadnicích

$$\hat{s}(X) = h^i_j X^j \frac{\partial}{\partial x^i},$$

kde  $X = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ .

Obecné formulky odvozené výše nabydou jednoduššího tvaru níže.

- **Gaussova formule**

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)N.$$

- **Weingartenova rovnice**  $\langle \bar{\nabla}_X N, Y \rangle = -h(X, Y) = -\langle \hat{s}X, Y \rangle.$

Z identity  $\langle \bar{\nabla}_X N, N \rangle = \frac{1}{2} \bar{\nabla}_X |N|^2 = 0$  vidíme, že  $\bar{\nabla}_X N \parallel M$ , tudíž

$$\bar{\nabla}_X N = -\hat{s}X.$$

- **Gaussova rovnice**

$$Rm(X, Y, Z, W) = h(X, W)h(Y, Z) - h(X, Z)h(Y, W). \quad (6.3)$$

- **Gaussova formule pro křivky**

$$\gamma'' = D_t \gamma' + h(\gamma', \gamma')N.$$

Odtud vidíme, že platí:

$$\gamma \text{ je geodetika na } M \iff \gamma'' \parallel N.$$

Nechť  $p \in M$ . Poněvadž je operátor  $\hat{s} : T_p M \rightarrow T_p M$  samosdružený, má reálné vlastní hodnoty (*hlavní křivosti*),

$$\sigma(\hat{s}) = \{\kappa_1, \dots, \kappa_n\},$$

a odpovídající vlastní vektory (*hlavní směry*)  $E_1, \dots, E_n$  splňující  $\hat{s}E_i = \kappa_i E_i$  pro  $i = 1, \dots, n$  (bez sumace na pravé straně) lze zvolit tak, že tvoří ortonormální bázi na tečném prostoru  $T_p M$ . V této bázi máme následující reprezentaci skalární druhé fundamentální formy

$$h(X, Y) = h(X^i E_i, Y^j E_j) = \kappa_1 X^1 Y^1 + \dots + \kappa_n X^n Y^n.$$

Důležité kombinace hlavních křivosti jsou následující:

$$\text{Gaussova křivost} \quad K := \det \hat{s} = \kappa_1 \dots \kappa_n,$$

$$\text{střední křivost} \quad H := \frac{1}{n} \operatorname{tr} \hat{s} = \frac{1}{n} (\kappa_1 + \dots + \kappa_n).$$

## 6.5 Plochy v trojdimenzionálním eukleidovském prostoru

Podívejme se nyní na ještě speciálnější případ, kdy

$$\tilde{M} = \mathbb{R}^3,$$

tedy  $n = \dim M = 2$ .

### 6.5.1 Interpretace hlavních křivostí

V tomto případě máme velice intuitivní interpretaci hlavních směrů a hlavních křivostí. Uvažujme geodetiku  $\gamma$  parametrizovanou obloukem na  $M$ , jež splňuje  $\gamma(0) = p$  a  $\gamma'(0) = X$ . Počáteční vektor rychlosti můžeme ve dvou dimenzích vhodně parametrizovat užitím hlavních směrů takto

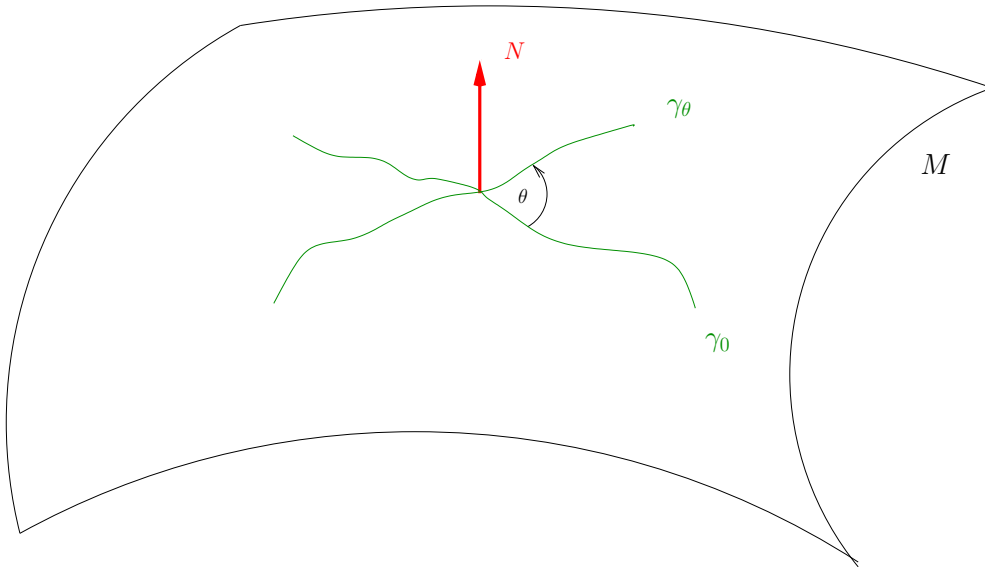
$$X = \cos \theta E_1 + \sin \theta E_2, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Poněvadž  $\gamma'' = h(\gamma', \gamma')N =: h[\gamma']N$ , v čase  $t = 0$  máme

$$\pm \bar{\kappa}(\theta) = \langle \gamma'', N \rangle = h[\cos \theta E_1 + \sin \theta E_2] = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta =: \kappa_N(\theta),$$

kde  $\kappa(\theta) := |\gamma''(0)|$  je eukleidovská křivost křivky  $\gamma$  coby křivky v  $\mathbb{R}^3$  (znaménko  $+$  odpovídá situaci, kdy  $N, \gamma''$  míří ve stejném směru) a  $\kappa_N(\theta)$  je *normálová křivost*. Poněvadž  $\kappa'_N(\theta) = 0$  tehdy a jen tehdy, když  $\theta = 0$  nebo  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , vidíme, že hlavní křivosti  $\kappa_N(0) = \kappa_1$  a  $\kappa_N(\frac{\pi}{2}) = \kappa_2$  jsou extrémy (minima a maxima) funkce  $\theta \mapsto \kappa_N(\theta)$ .

Křivost  $\kappa_N(\theta)$  můžeme rovněž interpretovat jako znaménkovou křivost  $\kappa_\theta$  rovinné křivky  $\gamma_\theta$  v bodě  $p$  (t.j.  $\kappa_\theta := \gamma_\theta^{1'} \gamma_\theta^{2''} - \gamma_\theta^{2'} \gamma_\theta^{1''}$ , pokud je  $\gamma_\theta$  parametrizovaná obloukem), již dostaneme coby průsečík plochy  $M$  s rovinou kolmou k  $T_p M$ . Odtud vidíme, že hlavní křivosti  $\kappa_1, \kappa_2$  jsou minima a maxima mezi všemi křivostmi  $\kappa_\theta$  takovýchto průsečíků (viz Obrázek 6.1).



Obrázek 6.1: Řezy rovinami, v nichž leží zvolený normálový vektor  $n$  v bodě  $p$ , definuje rodinu rovinných křivek  $\gamma_\theta$  procházejících bodem  $p$  a závisících na úhlovém parametru  $\theta$ . Hlavní křivosti plochy  $\Sigma$  jsou maximální a minimální hodnota mezi křivostmi této rodiny:

$$\kappa_1 := \max_{\theta} \kappa_\theta, \quad \kappa_2 := \min_{\theta} \kappa_\theta.$$

### 6.5.2 Theorema Egregium

Pozorování:

$$N \mapsto -N \quad \implies \quad \kappa_i \mapsto -\kappa_i \quad \implies \quad \begin{array}{l} H \mapsto -H, \\ K \mapsto K. \end{array}$$

Při volbě druhého normálového vektoru se tedy Gaussova křivost nezmění (zatímco ostatní křivosti změni znaménko). V každém případě je však Gaussova křivost (stejně jako ostatní

křivosti) definována pomocí vnoření  $M \subset \mathbb{R}^3$ , jedná se tudíž *a priori* o vnější (*extrinsic*) veličinu plochy  $M$  a není sebemenší důvod předpokládat, že by se mělo jednat o vnitřní (*intrinsic*) veličinu variety  $(M, g)$ . Avšak je tomu tak, jak zjistil Gauss v roce 1828, a překvapilo ho to natolik, že výsledek nazval *Theorema Egregium*, což bychom volně mohli přeložit jako “naprosto úchvatná věta”.

**Věta 6.8** (Theorema Egregium). *Nechť  $M \subset \mathbb{R}^3$  je dvojdimenzionální podvarieta s indukovanou metrikou  $g$ . Potom Gaussova křivost  $K$  je izometrický invariant:*

$\forall p \in M, \forall$  báze  $(X, Y)$  pro  $T_p M$ ,

$$K = \frac{Rm(X, Y, Y, X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}. \quad (6.4)$$

Význam tvrzení, že  $K$  je *izometrický invariant* či *vnitřní veličina* variety  $(M, g)$  vnořené do  $(\mathbb{R}^3, \bar{g})$ , je, že nezávisí na volbě izometrického vnoření  $\iota : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Přesněji, pokud  $\iota : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  je vnoření  $(M, g)$  do  $(\mathbb{R}^3, \bar{g})$  s  $g = \iota^* \bar{g}$  a  $\varphi : M \rightarrow M'$  je jakákoli izometrie (připomeňme, že  $g = \varphi^* g'$ ), pak  $\iota' := \iota \circ \varphi^{-1} : M' \rightarrow \mathbb{R}^3$  je vnoření  $(M', g')$  do  $(\mathbb{R}^3, \bar{g})$  s  $g' = \iota'^* \bar{g}$ :

$$\begin{array}{ccc} & (\mathbb{R}^3, \bar{g}) & \\ \iota \nearrow & & \nwarrow \iota \circ \varphi^{-1} \\ (M, g) & \xrightarrow{\varphi} & (M', g') \end{array}$$

Skutečně,

$$\iota'^* \bar{g} = (\iota \circ \varphi^{-1})^* \bar{g} = \varphi^{-1*} \circ \iota^* \bar{g} = \varphi^{-1*} g = \varphi^{*-1} g = g'.$$

Věta 6.8 říká, že Gaussova křivost  $K$  variety  $M$  spočtená pomocí vnoření  $\iota$  a Gaussova křivost  $K'$  variety  $M'$  spočtená pomocí vnoření  $\iota'$  se rovnají,  $K = K'$ .

*Důkaz.*

**Speciální případ:**  $(X, Y) := (E_1, E_2)$  ortonormální báze pro  $T_p M$ .

Potom z formulek

$$g_{ij} := g(E_i, E_j) = \delta_{ij}, \quad h_{ij} := h(E_i, E_j), \quad h^l_i = g^{lr} h_{ri}$$

dostáváme

$$K = \det \hat{s} = \det(h^l_i) = \det(g^{lk}) \det(h_{ri}) = \det(h_{ri}).$$

Gaussova rovnice (6.3) implikuje

$$\begin{aligned} Rm(E_1, E_2, E_2, E_1) &= h(E_1, E_1)h(E_2, E_2) - h(E_1, E_2)h(E_2, E_1) \\ &= h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} \\ &= \det(h_{ri}) = K. \end{aligned}$$

Zároveň  $|E_1|^2|E_2|^2 - \langle E_1, E_2 \rangle^2 = 1$ .

**Obecný případ:**  $(X, Y)$  libovolná báze pro  $T_p M$ .

Aplikací Gram–Schmidtova procesu na  $(X, Y)$  dostaneme ortonormální bázi  $(E_1, E_2)$  ve tvaru

$$E_1 := \frac{X}{|X|}, \quad E_2 := \frac{Y - \left\langle Y, \frac{X}{|X|} \right\rangle \frac{X}{|X|}}{\left| Y - \left\langle Y, \frac{X}{|X|} \right\rangle \frac{X}{|X|} \right|} = \frac{Y - \frac{\langle Y, X \rangle}{|X|^2} X}{\left| Y - \frac{\langle Y, X \rangle}{|X|^2} X \right|}.$$

Ze speciálního případu výše dostáváme

$$\begin{aligned} K &= Rm(E_1, E_2, E_2, E_1) \\ &= \frac{Rm\left(X, Y - \frac{\langle Y, X \rangle}{|X|^2} X, Y - \frac{\langle Y, X \rangle}{|X|^2} X, X\right)}{|X|^2 \left| Y - \frac{\langle Y, X \rangle}{|X|^2} X \right|^2} \\ &= \frac{Rm(X, Y, Y, X)}{|X|^2 \left( |Y|^2 + \frac{\langle Y, X \rangle^2}{|X|^2} - 2 \frac{\langle Y, X \rangle^2}{|X|^2} \right)} \\ &= \frac{Rm(X, Y, Y, X)}{|X|^2 |Y|^2 - \langle Y, X \rangle^2}, \end{aligned}$$

kde jsme ve třetí rovnosti využili symetrií  $Rm(X, X, \cdot, \cdot) = 0 = Rm(\cdot, \cdot, X, X)$ .  $\square$

Motivováni Větou 6.8, definujeme Gaussovu křivost  $K$  pro *libovolnou* dvojdimenzionální riemannovskou varietu  $(M, g)$ , jež není nezbytně vnořená v  $\mathbb{R}^3$ , pomocí formulky (6.4) v libovolném lokálním repéru. Následující tvrzení říká, že tato Gaussova křivost zcela určuje tenzor křivosti a že je nezávislá na volbě repéru.

**Tvrzení 6.9.** *Nechť  $(M, g)$  je dvojdimenzionální riemannovská varieta. Potom*

$\forall X, Y, Z, W \in T_p M,$

- (i)  $Rm(X, Y, Z, W) = K (\langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle);$
- (ii)  $Rc(X, Y) = K \langle X, Y \rangle;$
- (iii)  $S = 2K.$

*Důkaz.* Jedná se o tenzory, tudíž stačí pracovat s jakoukoli bází. Nechť  $(E_1, E_2)$  je ortonormální báze pro  $T_p M$ .

**ad (i)** Uvažujme koeficienty  $R_{ijkl} := Rm(E_i, E_j, E_k, E_l)$ . Potom

$$\begin{aligned} K &= +R_{1221} = +R_{2112} \\ &= -R_{1212} = -R_{2121}, \end{aligned}$$

kde první řádek je důsledkem Věty 6.8 a druhý řádek plyne ze symetrií tenzoru křivosti. Zbývá si uvědomit, že  $R_{ijkl} = 0$ , pokud  $i = j$  nebo  $k = l$ .

**ad (ii)** Pro Ricciho tenzor máme

$$R_{ij} = Rc(E_i, E_j) = R_{1ij1} + R_{2ij2}.$$



Odtud vidíme, že

$$R_{12} = R_{21} = 0 \quad \text{a} \quad \begin{aligned} R_{11} &= R_{2112} = K, \\ R_{22} &= R_{1221} = K, \end{aligned}$$

což je ekvivalentní druhému vztahu.

ad (iii) Nakonec

$$S = \text{tr}_g Rc = \text{tr} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} = 2K.$$

Poněvadž skalární křivost  $S$  je nezávislá na volbě repéru, to samé musí platit pro Gaussovu křivost  $K$ . □

Tvrzení 6.9(ii) je ekvivalentní vztahu  $Rc = Kg$ . Pro libovolnou dvojdímní riemannovskou varietu  $(M, g)$  je tudíž  $g$  vždy Einsteinova metrika.

**Důsledek 6.10.** *Nechť  $(M, g)$  je riemannovská varieta s  $\dim M = 2$ . Potom  $g$  je Einsteinova metrika.*

Avšak tento obecný fakt nezbytně neimplikuje (oproti vyšším dimenzím, viz Tvrzení 5.10), že  $K$  je konstantní.

### 6.5.3 Praktické počítání

Obrátíme se nakonec od abstraktních výsledků k praktickým výpočetním dovednostem. Uvažujme lokální parametrizaci

$$\pi : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \pi(U) \subset M \xrightarrow{\iota} \mathbb{R}^3,$$

kde  $U \subset \mathbb{R}^2$  a  $p(U) \subset M$  jsou otevřené množiny. Už víme (viz Příklad 1.6), že v souřadnicích  $x := \pi^{-1} \circ \iota$  pro metriku variety  $M$  platí

$$g = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad g_{\alpha\beta} := \partial_\alpha \pi \cdot \partial_\beta \pi,$$

kde nesprávně píšeme  $\partial_\alpha \pi$  namísto  $(\partial_\alpha \pi) \circ x$ , což je však obvyklá identifikace. Při ztotožnění  $T_p \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$  lze vektory  $\partial_1 \pi$  a  $\partial_2 \pi$  chápat jako tečné vektory variety  $M$ . Normálový vektor  $N : M \rightarrow T_p \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$  pak spočteme pomocí vektorového součinu

$$\nu := \frac{\partial_1 \pi \times \partial_2 \pi}{|\partial_1 \pi \times \partial_2 \pi|} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

jako  $N := \nu \circ x$ . Z Weingartenovy rovnice dostáváme

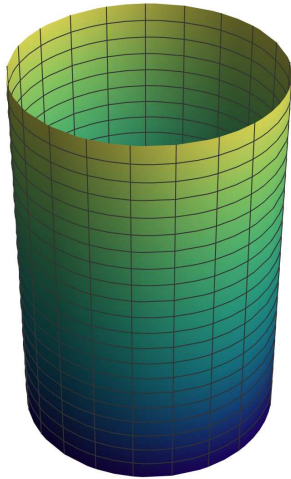
$$h_{\alpha\beta} = - \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} N, \iota_* \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right\rangle_{\bar{g}} = -\delta_{ij} \frac{N^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} = -\delta_{ij} (\partial_\alpha \nu^i) \circ x (\partial_\beta \pi^j) \circ x.$$

Obvyklou identifikací  $(\partial_\alpha \nu)$  s  $(\partial_\alpha \nu) \circ x$  tedy nakonec

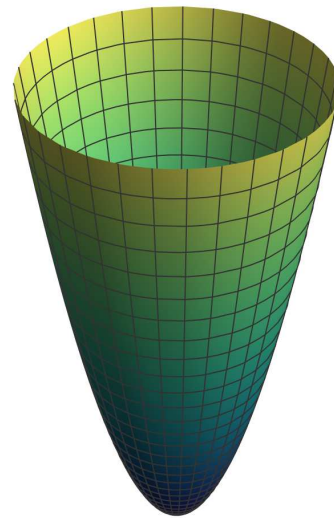
$$h = h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad h_{\alpha\beta} := -\partial_\alpha \nu \cdot \partial_\beta \pi.$$

Z těchto formulek pro metriku a skalární druhou fundamentální formu pak snadno spočteme hlavní křivosti a Gaussovu a střední křivost.

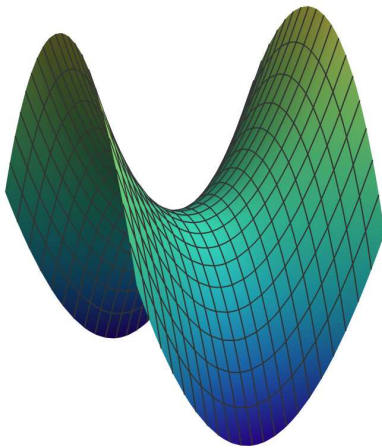
Zkoušku neudělá ten, kdo nebude umět spočítat křivosti ploch na Obrázku 6.2.



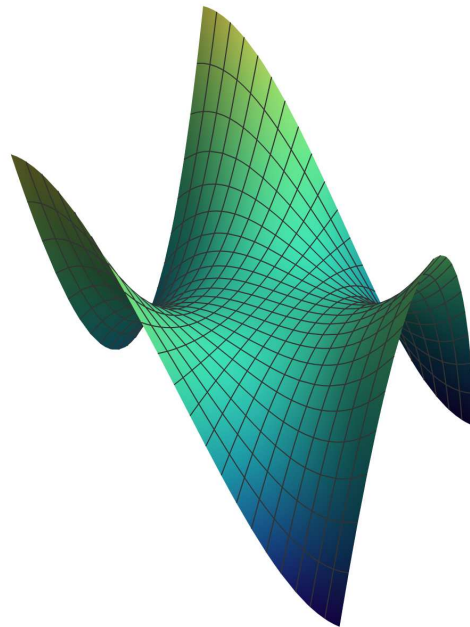
válec  
 $x^2 + y^2 = 1$



paraboloid  
 $z = x^2 + y^2$



hyperbolický paraboloid  
 $z = y^2 - x^2$



opičí sedlo  
 $z = x^3 - 3xy^2$

Obrázek 6.2: Příklady nejslavnějších ploch.

## 7 Gaussova–Bonnetova věta

Nyní máme všechny potřebné ingredience pro důkaz důležitého lokálního-globálního tvrzení pro dvojdimenzionální variety, jež dává do souvislosti křivost a topologii. Notoricky známá tvrzení, že součet vnitřních úhlů trojúhelníku je roven  $\pi$ , že obvod kružnice o poloměru  $R$  je roven  $2\pi R$  a že integrál křivosti jednoduché uzavřené křivky je roven  $\pm 2\pi$ , jsou pouze velice speciální, eukleidovské důsledky.

### 7.1 Rovinná geometrie

Předpokládejme nejdříve, že  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  je *hladká* křivka parametrizovaná obloukem. Připomeňme (či zaveďme) následující pojmy:

- $\gamma$  je *jednoduchá*  $:\Leftrightarrow \gamma|_{[a,b]}$  je injektivní.
- $\gamma$  je *uzavřená*  $:\Leftrightarrow \gamma(a) = \gamma(b)$ .
- *Tečný úhel* je spojitě (ve skutečnosti hladké) zobrazení  $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  takové, že

$$\gamma'(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$$

a splňující normalizaci  $\theta(a) \in (-\pi, \pi]$  (jež ho určuje jednoznačně).

- *Úhel rotace* je číslo  $\text{Rot}(\gamma) := \theta(b) - \theta(a)$ . Pro uzavřenou křivku platí  $\text{Rot}(\gamma) \in 2\pi\mathbb{Z}$  a hodnota nezávisí na normalizaci  $\theta(a)$ .

Předpokládejme nyní, že  $\gamma$  je pouze *po částech hladká*, t.j.  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  je spojitě zobrazení splňující

$$\begin{aligned} \exists \text{ dělení } a =: a_0 < a_1 < \dots < a_{k-1} < a_k =: b, \quad \forall i = 1, \dots, k, \\ \gamma|_{[a_{i-1}, a_i]} \text{ je hladká křivka.} \end{aligned}$$

Jednostranné rychlosti definujeme jako výše

$$\gamma'(a_i^\pm) := \lim_{t \rightarrow a_i^\pm} \gamma'(t).$$

Další terminologie je následující:

- *Vnější úhel* v  $a_i$  je orientovaný úhel  $\varepsilon_i \in [-\pi, \pi]$  z  $\gamma'(a_i^-)$  do  $\gamma'(a_i^+)$  takový, že

$$\text{sgn } \varepsilon_i = \begin{cases} +1 & \Leftrightarrow (\gamma'(a_i^-), \gamma'(a_i^+)) \text{ je kladně orientovaná báze v } \mathbb{R}^2, \\ -1 & \Leftrightarrow (\gamma'(a_i^-), \gamma'(a_i^+)) \text{ je záporně orientovaná báze v } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

V případě, že se nejedná o bázi (např. *cusp*), znaménko úhlu neurčujeme, poněvadž takovéto křivky uvažovat nebudeme (viz následující definice).

- $\gamma$  je *křivý polygon*  $:\Leftrightarrow \gamma$  je jednoduchá, uzavřená a bez vnějších úhlů  $\pm\pi$ , jež je hranicí omezené otevřené oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .

Body  $\gamma(a_i)$  nazýváme *vrcholy* a křivky  $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$  nazýváme *strany* křivého polygonu.

Řekneme, že  $\gamma$  je *kladně orientovaný*, pokud  $\Omega$  je vždy nalevo od  $\gamma$  (křivka je parametrizovaná proti směru hodinových ručiček).

- *Tečný úhel* je zobrazení  $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definované indukcí následovně:
  - $t = a$  :  $\theta(a) \in (-\pi, \pi]$ ;
  - $t \in [a, a_1)$  :  $\theta(t)$  definováno spojitě jako výše (v hladkém případě) ;
  - $t = a_1$  :  $\theta(a_1) := \lim_{t \rightarrow a_1^-} \theta(t) + \varepsilon_1$  ;
  - $t \in [a_1, a_2)$  :  $\theta(t)$  definováno spojitě jako výše (v hladkém případě) ;
  - $\vdots$
  - $t = b = a_k$  :  $\theta(b) := \lim_{t \rightarrow a_k^-} \theta(t) + \varepsilon_k$  .
- *Úhel rotace*  $\text{Rot}(\gamma) := \theta(b) - \theta(a) \in 2\pi\mathbb{Z}$  je definovaný jako výše.

**Věta 7.1** (Umlaufsatz [Hopf 1935]).  $\forall$  kladně orientovaný křivý polygon  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ ,

$$\text{Rot}(\gamma) = 2\pi .$$

## 7.2 Gaussova–Bonnetova formule

Na dvojdímní varietě  $M$  uvažujme po částech hladkou křivku  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ , jež je parametrizovaná obloukem.

- $\gamma$  je křivý polygon  $\iff \gamma$  je hranicí omezené prekompaktní oblasti  $\Omega \subset M$  a  $x(\Omega) \subset \mathbb{R}^2$  je křivý polygon jako výše.

Zde  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$  je souřadnicová mapa taková, že  $\mathcal{U} \supset \gamma$ .

- *Tečný úhel* je zobrazení  $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  takové, že na částech, kde rychlost  $\gamma'$  je spojitá,  $\theta$  je jednoznačná spojitá volba úhlu od vektoru  $\frac{\partial}{\partial x^1}$  k vektoru  $\gamma'$ , plus skoky na vrcholech jako výše.
- *Úhel rotace*  $\text{Rot}(\gamma) := \theta(b) - \theta(a) \in 2\pi\mathbb{Z}$  je definovaný jako výše.

Vzhledem k roli vektoru  $\frac{\partial}{\partial x^1}$  v definici tečného úhlu, není vůbec jasné, že úhel rotace má jakýkoli na souřadnicích nezávislý význam. Následující tvrzení však říká, že tomu tak je.

**Lemma 7.2.**  $\forall$  kladně orientovaný křivý polygon  $\gamma \subset M$ ,

$$\text{Rot}(\gamma) = 2\pi .$$

*Důkaz.* Máme k dispozici dva polygony a tomu odpovídající úhly rotace spočtené vůči různým metrikám:

$$\begin{aligned} \Omega \subset M &\iff \text{Rot}_g(\gamma) \in 2\pi\mathbb{Z} , \\ x(\Omega) \subset \mathbb{R}^2 &\iff \text{Rot}_{\bar{g}}(\gamma) \in 2\pi\mathbb{Z} . \end{aligned}$$

Pro libovolný parametr  $s \in [0, 1]$  definujme metriku

$$g_s := sg + (1 - s)\bar{g}$$

a jí odpovídající úhel rotace  $\text{Rot}_{g_s}(\gamma) \in 2\pi\mathbb{Z}$ . Funkce

$$f(s) := \frac{1}{2\pi} \text{Rot}_{g_s}(\gamma)$$

tudíž nabývá pouze celočíselných hodnot. Jelikož je spojitá v  $s$ , musí být nezbytně konstantní. Avšak  $f(0) = 1$  podle Věty 7.1.  $\square$

Na částech, kde  $\gamma$  je hladká, existuje právě jedno jednotkové vektorové pole  $N$  takové, že  $(\gamma'(t), N(t))$  je kladně orientovaná ortonormální báze tečného prostoru  $T_{\gamma(t)}M$  pro všechna odpovídající  $t$ . ( $N$  směřuje dovnitř  $\Omega$  pro kladně orientovaný polygon.) V hladkých bodech křivky  $\gamma$  definujeme *znaménkovou (geodetickou) křivost* předpisem

$$\kappa_N(t) := \langle D_t \gamma'(t), N(t) \rangle .$$

( $\kappa_N > 0$ , pokud se kladně orientovaná  $\gamma$  kroutí směrem k  $\Omega$ .) Platí

$$|\gamma'|^2 = 1 \implies 2\langle D_t \gamma', \gamma' \rangle = 0 \implies D_t \gamma' \perp \gamma' .$$

Tudíž máme Frenetův vzorec

$$D_t \gamma'(t) = \kappa_N(t) N(t) .$$

**Věta 7.3** (Gaussova–Bonnetova formule). *Nechť  $\gamma$  je křivý polygon na orientované dvojdimenzionální riemannovské varietě  $(M, g)$  a  $\gamma$  je kladně orientovaná coby hranice otevřené prekompaktní oblasti  $\Omega$ . Potom*

$$\int_{\Omega} K \, dA + \int_{\gamma} \kappa_N \, ds + \sum_{i=1}^k \varepsilon_i = 2\pi ,$$

kde  $dA$  je riemannovský objemový element a  $s$  je délka oblouku.

*Důkaz.* Užitím Lemmatu 7.2 máme

$$2\pi = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i + \sum_{i=1}^k \int_{a_{i-1}}^{a_i} \theta'(t) \, dt .$$

Pro důkaz věty potřebujeme dát do souvislosti  $\theta'$  s  $\kappa_N$  a  $K$ .

Nechť  $(x^1, x^2)$  jsou orientované souřadnice na otevřené množině  $\mathcal{U} \supset \Omega, \gamma$ . Aplikací Gram–Schmidtova ortogonalizačního procesu na souřadnicový repér  $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2})$  dostaneme orientovaný ortonormální repér  $(E_1, E_2)$  takový, že  $E_1$  je kladný násobek  $\frac{\partial}{\partial x^1}$ . V hladkých bodech  $t$  křivky  $t \mapsto \gamma(t)$  máme

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \cos \theta(t) E_1 + \sin \theta(t) E_2 , \\ N(t) &= -\sin \theta(t) E_1 + \cos \theta(t) E_2 . \end{aligned} \tag{7.1}$$

Zderivováním  $\gamma'$  dostaneme

$$\begin{aligned} D_t \gamma' &= -\theta' \sin \theta E_1 + \cos \theta \nabla_{\gamma'} E_1 + \theta' \sin \theta E_2 + \sin \theta \nabla_{\gamma'} E_2 \\ &= \theta' N + \cos \theta \nabla_{\gamma'} E_1 + \sin \theta \nabla_{\gamma'} E_2 , \end{aligned} \tag{7.2}$$

kde pro jednoduchost vynecháváme závislost na  $t$  ve značení funkcí. Z ortonormality  $(E_1, E_2)$  zároveň dostáváme,  $\forall X \in TM$ ,

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_X |E_1|^2 = 2 \langle \nabla_X E_1, E_1 \rangle &\implies \nabla_X E_1 = \text{násobek } E_2, \\ 0 = \nabla_X |E_2|^2 = 2 \langle \nabla_X E_2, E_2 \rangle &\implies \nabla_X E_2 = \text{násobek } E_1, \\ 0 = \nabla_X \langle E_1, E_2 \rangle = \langle \nabla_X E_1, E_2 \rangle + \langle E_1, \nabla_X E_2 \rangle &\implies \langle E_1, \nabla_X E_2 \rangle = -\langle \nabla_X E_1, E_2 \rangle. \end{aligned}$$

Definováním funkcionálu (1-formy)  $\omega(X) := \langle E_1, \nabla_X E_2 \rangle$  platí vztahy

$$\begin{aligned} \nabla_X E_1 &= -\omega(X) E_2, \\ \nabla_X E_2 &= \omega(X) E_1, \end{aligned} \tag{7.3}$$

tudíž  $\omega$  zcela určuje konexi na  $\mathcal{U}$ .

Ze vztahů (7.1), (7.2) a (7.3) dostáváme

$$\begin{aligned} \kappa_N &= \langle D_t \gamma', N \rangle \\ &= \langle \theta' N, N \rangle + \cos \theta \langle \nabla_{\gamma'} E_1, N \rangle + \sin \theta \langle \nabla_{\gamma'} E_2, N \rangle \\ &= \theta' - \cos \theta \langle \omega(\gamma') E_2, N \rangle + \sin \theta \langle \omega(\gamma') E_1, N \rangle \\ &= \theta' - \cos^2 \theta \omega(\gamma') - \sin^2 \theta \omega(\gamma') \\ &= \theta' - \omega(\gamma'). \end{aligned}$$

Zbývá tedy ukázat

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\Omega} K \, dA.$$

Poněvadž  $\int_{\gamma} \omega = \int_{\Omega} d\omega$  díky Stokesově větě (okamžitě v případě hladké oblasti  $\Omega$ , obecně nutno použít aproximaci), stačí ukázat  $d\omega = K \, dA$ , což však plyne z následujícího výpočtu:

$$\begin{aligned} K \, dA(E_1, E_2) &= K \\ &= Rm(E_1, E_2, E_2, E_1) \\ &= \langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_2 - \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_2 - \nabla_{[E_1, E_2]} E_2, E_1 \rangle \\ &= \langle \nabla_{E_1} (\omega(E_2) E_1) - \nabla_{E_2} (\omega(E_1) E_1) - \omega([E_1, E_2]) E_1, E_1 \rangle \\ &= \langle E_1 (\omega(E_2)) E_1 + \omega(E_2) \nabla_{E_1} E_1 - E_2 (\omega(E_1)) E_1 - \omega(E_1) \nabla_{E_2} E_1 - \omega([E_1, E_2]) E_1, E_1 \rangle \\ &= E_1 (\omega(E_2)) - E_2 (\omega(E_1)) - \omega([E_1, E_2]) \\ &= d\omega(E_1, E_2). \end{aligned}$$

Zde první rovnost platí, protože repér  $(E_1, E_2)$  je ortonormální (viz kapitolka 1.5), a poslední rovnost je definice akce vnější derivace  $d\omega$  (2-forma) na obecnou bázi (v souřadnicové bázi platí dobře známý vztah  $(d\omega)_{ij} = \partial_i \omega_j - \partial_j \omega_i$ ).  $\square$

Rozmyslete si, že na začátku této kapitolky zmíněné elementární varianty pro kružnice a trojúhelníky plynou coby důsledek Věty 7.3.

### 7.3 Globalizace skrze triangulaci

Nechť  $M$  je (hladká) kompaktní 2-varieta. (Hladká) *triangulace* variety  $M$  je množina  $\{\Omega_i\}_{i=1}^{N_f}$  taková, že

$$\bigcup_{i=1}^{N_f} \bar{\Omega}_i = M,$$

kde  $N_f < \infty$  a  $\Omega_i$  jsou křivé trojúhelníky (křivé polygony o třech stranách) takové, že průsečík libovolného páru je buď prázdná množina, nebo jeden vrchol, nebo jedna strana. Triangulace vždy existuje.

Eulerova charakteristika variety  $M$  je číslo

$$\chi(M) := N_v - N_e + N_f,$$

kde

$$\begin{aligned} N_v &:= \text{počet vrcholů (vertices)}, \\ N_e &:= \text{počet stran (edges)}, \\ N_f &:= \text{počet trojúhelníků (faces)}. \end{aligned}$$

Eulerova charakteristika je čistě topologický invariant, jež nezávisí na triangulaci. Platí  $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$  pro sféru,  $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$  pro torus a obecně  $\chi(M) = 2 - 2g$  pro orientovanou plochu s  $g$  drážadly.

Nyní jsme v pozici dokázat úchvatné lokální-globální tvrzení, jenž dává do souvislosti křivost a topologii.

**Věta 7.4** (Gaussova–Bonnetova věta). *Nechť  $M$  je kompaktní, orientovaná 2-varieta. Potom*

$$\int_M K \, dA = 2\pi \chi(M).$$

*Důkaz.* Mějme:

$$\begin{aligned} \{\Omega_i\}_{i=1,\dots,N_f} & \text{ triangulace,} \\ \{\gamma_{ij}\}_{i=1,\dots,N_f}^{j=1,2,3} & \text{ hrany trojúhelníků, } \gamma_{i1} \cup \gamma_{i2} \cup \gamma_{i3} = \partial\Omega_i, \\ \{\theta_{ij}\}_{i=1,\dots,N_f}^{j=1,2,3} & \text{ vnitřní úhly trojúhelníků.} \end{aligned}$$

Poněvadž vnější úhel je roven  $\pi$  minus vnitřní úhel, aplikace Gaussovy–Bonnetovy formule (Věta 7.3) na každý trojúhelník a přesčítání přes  $i$  dá

$$\sum_{i=1}^{N_f} \int_{\Omega_i} K \, dA + \underbrace{\sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^3 \int_{\gamma_{ij}} \kappa_N \, ds}_{=0} + \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^3 (\pi - \theta_{ij}) = \sum_{i=1}^{N_f} 2\pi.$$

Zde druhý člen vymizí, jelikož v součtu vystupuje každá strana trojúhelníku právě dvakrát, avšak s opačnou orientací. Máme tudíž

$$\int_M K \, dA + 3\pi N_f - \underbrace{\sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^3 \theta_{ij}}_{2\pi N_v} = 2\pi N_f.$$

Zde dvojitá suma je skutečně rovna  $2\pi N_v$ , protože každý úhel  $\theta_{ij}$  se v sumě vyskytuje právě

jednou a v každém vrcholu je součet úhlů, jež se vrcholu dotýkají, roven  $2\pi$ . Máme tudíž

$$\begin{aligned} \int_M K \, dA &= 2\pi N_v - \pi N_f \\ &= 2\pi N_v - 3\pi N_f + 2\pi N_f \\ &= 2\pi N_v - 2\pi N_e + 2\pi N_f \\ &= 2\pi \chi(M). \end{aligned}$$

Zde třetí rovnost platí díky vztahu

$$2N_e = 3N_f,$$

kde na levé straně vystupuje počet stran včetně násobností (každé straně odpovídají právě dva trojúhelníky) a pravá strana odráží fakt, že každý trojúhelník má právě tři strany.  $\square$

Význam Gaussovy–Bonnetovy věty je nedocenitelný. Zmíníme jen pár zřejmých důsledků. Pro stručnost značme symbolem  $\sim$  relaci homeomorfismu dvou variet.

#### Důsledek 7.5.

- (a)  $M \sim \mathbb{S}^2$  ( $g = 0$ )  $\implies K > 0$  někde;
- (b)  $M \sim \mathbb{T}^2$  ( $g = 1$ )  $\implies K = 0$  všude  $\vee (K > 0$  někde  $\wedge K < 0$  někde);
- (c) jiná topologie ( $g \geq 2$ )  $\implies K < 0$  někde.

#### Důsledek 7.6.

- (a)  $K > 0 \implies M \sim \mathbb{S}^2$  ( $g = 0$ );
- (b)  $K \leq 0 \implies g \geq 1$ .

Jeden z hlavních cílů moderní riemannovské geometrie je zobecnění Gaussovy–Bonnetovy věty (a jejích topologických důsledků) do vyšších dimenzí.



## Reference

- [1] M. P. do Carmo, *Riemannian geometry*, Birkhäuser, Boston, 1992.
- [2] O. Kowalski, *Úvod do Riemannovy geometrie*, Univerzita Karlova v Praze, Praha, 1995.
- [3] J. M. Lee, *Riemannian manifolds: An introduction to curvature*, Springer, New York, 1997.
- [4] ———, *Introduction to smooth manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 218, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [5] ———, *Introduction to Riemannian manifolds*, Springer, New York, 2018.
- [6] M. Spivak, *Calculus on manifolds*, Addison-Wesley Publishing Company, United States of America, 1965.
- [7] ———, *A comprehensive introduction to differential geometry*, vol. III, Publish or Perish, Berkeley, Calif., 1975.
- [8] ———, *A comprehensive introduction to differential geometry*, vol. IV, Publish or Perish, Boston, Mass., 1975.
- [9] ———, *A comprehensive introduction to differential geometry*, vol. II, Publish or Perish, Houston, Texas, 1999.
- [10] ———, *A comprehensive introduction to differential geometry*, vol. V, Publish or Perish, Boston, Mass., 1999.
- [11] ———, *A comprehensive introduction to differential geometry*, vol. I, Publish or Perish, Houston, Texas, 2005.