LAA - řešení příkladů

David Krejčiřík & Tereza Kurimaiová

11. května 2020

Obsah

1 Regulární operátor

Domácí úloha 4

Nechť $A \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$. Nechť existuje právě jeden operátor $B \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$ takový, že $AB = I$ nebo $BA = I$. Potom A je regulární.

Nechť existuje právě jeden operátor $B \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$ takový, že (B je *pravá inverze* A)

$$AB = I.$$

Potom

$$A(BA + B - I) = A(BA) + AB - A = (AB)A + AB - A = IA + I - A = I.$$

Tedy $AB' = I$, kde $B' := BA + B - I$. Poněvadž předpokládáme, že pravá inverze k A je jedinečná, platí

$$BA + B - I = B,$$

z čehož plyne, že (B je *levá inverze* A)

$$BA = I.$$

Tudíž B je pravou i levou inverzí k A, z čehož plyne, že A je invertibilní a $A^{-1} = B$. Avšak invertibilita je ekvivalentní s bijektivitou, pomocí níž se definuje regularita.

Důkaz v případě, kdy existuje jednoznačně určená levá inverze k A, je analogický.

2 Duální báze

Cvičení 2

Je $\varphi \in \mathcal{P}^{\#}$?

$$\varphi(x) := x(2).$$

ANO.

$$\forall \alpha \in \mathbb{C},\ x_1, x_2 \in \mathcal{P}, \qquad \begin{aligned} \varphi(x_1 + x_2) &= (x_1 + x_2)(2) = x_1(2) + x_2(2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2), && \text{(aditivita)} \\ \varphi(\alpha x_1) &= (\alpha x_1)(2) = \alpha x_1(2) = \alpha \varphi(x_1). && \text{(homogenita)} \end{aligned}$$

Cvičení 7

Nechť $\varphi \in \mathcal{P}_2^{\#}$. $\mathcal{X} := (x_1, x_2)$ a $\mathcal{Y} := (y_1, y_2)$ jsou báze $\mathcal{P}_2$, kde

$$\forall t \in \mathbb{C}, \qquad x_1(t) := 1 + t, \quad x_2(t) := 1 - t, \quad y_1(t) := 1 - 2t, \quad y_2(t) := 3 + 2t.$$

Nechť $(\varphi)_{\mathcal{X}^{\#}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. Najděte $(\varphi)_{\mathcal{Y}^{\#}}$.

Užitím standardní báze $\mathcal{E} := (e_0, e_1)$ platí

$$x_1 := e_0 + e_1, \quad x_2 := e_0 - e_1, \quad y_1 := e_0 - 2e_1, \quad y_2 := 3e_0 + 2e_1.$$

Z posledních dvou vztahů vyjádříme

$$e_0 = \frac{y_1 + y_2}{4} \qquad \text{a} \qquad e_1 = -\frac{3y_1 - y_2}{8}$$

a dosadíme do prvních dvou

$$x_1 = -\frac{y_1 + 3y_2}{8} \qquad \text{a} \qquad x_2 = -\frac{5y_1 + y_2}{8}.$$

Užitím linearity pak dostáváme

$$1 = \varphi(x_1) = -\frac{\varphi(y_1) + 3\varphi(y_2)}{8} \qquad \text{a} \qquad 2 = \varphi(x_2) = -\frac{5\varphi(y_1) + \varphi(y_2)}{8},$$

odkud spočítáme

$$\varphi(y_1) = \frac{5}{2} \qquad \text{a} \qquad \varphi(y_2) = \frac{7}{2}.$$

Tedy $(\varphi)_{\mathcal{Y}^{\#}} = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$.

Cvičení 9

Nechť $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \in \mathcal{P}^{\#}$. Pro každé $x \in \mathcal{P}$ platí

$$\varphi_1(x) := x(1) - x(0), \quad \varphi_2(x) := x(2), \quad \varphi_3(x) := 2x(1) - 3x(2), \quad \varphi_4(x) := 2x(0) + x(1) + 4x(2).$$

Jsou $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ LN?

NE.

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ jsou LN tehdy a jen tehdy, pokud nekonečné vektory $(\varphi_1)_{\mathcal{E}^{\#}}, (\varphi_2)_{\mathcal{E}^{\#}}, (\varphi_3)_{\mathcal{E}^{\#}}, (\varphi_4)_{\mathcal{E}^{\#}}$ jsou LN, kde $\mathcal{E} := (e_0, e_1, e_2, \dots)$ je standardní báze, tedy

$$e_0(t) := 1, \quad e_1(t) := t, \quad e_2(t) := t^2, \quad \dots$$

Užitím definičních vztahů dostáváme

$$(\varphi_1)_{\mathcal{E}^\#} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (\varphi_2)_{\mathcal{E}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2^1 \\ 2^2 \\ 2^3 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (\varphi_3)_{\mathcal{E}^\#} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2-3\,2^1 \\ 2-3\,2^2 \\ 2-3\,2^3 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (\varphi_4)_{\mathcal{E}^\#} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1+4\,2^1 \\ 1+4\,2^2 \\ 1+4\,2^3 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Jak bývá zvykem pro ověřování LN/LZ, vezmeme libovolnou lineární kombinaci těchto vektorů a položíme ji rovnou nule; to vede na následující nekonečnou soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_3 + 7\alpha_4 &= 0\,, \\ \alpha_1 + 2^k\alpha_2 + (2-3\,2^k)\alpha_3 + (1+4\,2^k)\alpha_4 &= 0\,, \quad (k \geq 1) \end{aligned}$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$ jsou neznámé. Zajímá nás, jestli tato homogenní soustava má pouze triviální řešení (LN), či existuje i netriviální řešení (LZ).

Z první rovnice vyjádříme $\alpha_2 = \alpha_3 - 7\alpha_4$ a dosadíme do ostatních rovnic, čímž obdržíme nekonečnou soustavu rovnic o třech neznámých $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$:

$$\alpha_1 + 2\,(1-2^k)\alpha_3 + (1-3\,2^k)\alpha_4 = 0\,. \quad (k \geq 1)$$

Problém jsme tedy redukovali na LN/LZ nekonečných vektorů

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 2\,(1-2^1) \\ 2\,(1-2^2) \\ 2\,(1-2^3) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix} 1-3\,2^1 \\ 1-3\,2^2 \\ 1-3\,2^3 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Ovšem tyto vektory jsou zřejmě LZ, poněvadž $3v_3 - 2v_4 = 4v_1$. Tudíž i $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ jsou LZ (netriviální kombinace: $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = -17$, $\alpha_3 = -3$, $\alpha_4 = 2$).

Cvičení 11

Nechť $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}^{3\#}$.

$$\varphi_1(x) := x_1 - x_2, \qquad (\varphi_2)_{\mathcal{B}^\#} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right),$$

kde $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ a $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3) := \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$. Najděte bázi průniku jader funkcionálů.

Existují čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ taková, že $\varphi_2(x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$. Ze vztahů

$$\begin{aligned} \varphi_2(b_1) &= 1 &&= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\,, \\ \varphi_2(b_2) &= 1 &&= \alpha_1 + \alpha_2\,, \\ \varphi_2(b_3) &= -1 &&= \alpha_1 + \alpha_3\,, \end{aligned}$$

zjistíme, že $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 2$ a $\alpha_3 = 0$. Tedy $\varphi_2(x) = -x_1 + 2x_2$.

$\varphi_1(x) = 0$ tehdy a jen tehdy, pokud $x_1 = x_2$; tedy

$$\ker \varphi_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

$\varphi_2(x) = 0$ tehdy a jen tehdy, pokud $x_1 = 2x_2$; tedy

$$\ker \varphi_1 = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

Odtud vidíme, že

$$\ker \varphi_1 \cap \ker \varphi_2 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

3 Inverzní matice a operátor

Domácí úloha 5

Nechť $A \in \mathbb{T}^{n,n}$ je regulární. Jak se změní matice A^{-1} , jestliže v matici A:
(a) zaměníme i-tý a j-tý řádek,
(b) i-tý řádek vynásobíme číslem $\alpha \in \mathbb{T}$, $\alpha \neq 0$,
(c) k i-tému řádku přičteme libovolný násobek j-tého řádku ($i \neq j$)?

Strategie důkazu pro matici libovolného stupně n je psát

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad A^{-1} = (b^1 \ \dots \ b_n),$$

kde a_j značí j-tý řádek matice A a b^k značí k-tý sloupec matice A^{-1}. Potom

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a_1b^1 & \dots & a_1b^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb^1 & \dots & a_nb^n \end{pmatrix} = (a_jb^k)_{j,k=1,\dots,n}$$

a podmínka na inverzi zní $a_jb^k = \delta_{jk}$ pro všechna $j,k = 1,\dots,n$. Nechť $\tilde{A}$ značí transformovanou matici a obdobně vlnovkou značme odpovídající transformované objekty.

ad (a)

$$\tilde{A}\tilde{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b^1 \ \dots \ \tilde{b}^i \ \dots \ \tilde{b}^j \ \dots \ b^n) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_1b^1 & \dots & a_1\tilde{b}^i & \dots & a_1\tilde{b}^j & \dots & a_1b^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_jb^1 & \dots & a_j\tilde{b}^i & \dots & a_j\tilde{b}^j & \dots & a_jb^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_ib^1 & \dots & a_i\tilde{b}^i & \dots & a_i\tilde{b}^j & \dots & a_ib^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_nb^1 & \dots & a_n\tilde{b}^i & \dots & a_n\tilde{b}^j & \dots & a_nb^n \end{pmatrix} \end{array}.$$

Zde jsme ovlnkovali pouze ty koeficienty inverzní matice $\tilde{A}^{-1}$, u nichž není *a priori* jasné, jak mají vypadat (ostatní podmínku na inverzi zřejmě splňují). Odtud je vidět, že podmínku na inverzi $\tilde{A}\tilde{A}^{-1} = I$ splníme, pokud

$$\tilde{b}^i := b^j \qquad \text{a} \qquad \tilde{b}^j := b^i.$$

Tedy matice $\tilde{A}^{-1}$ bude mít prohozený i-tý a j-tý sloupec.

ad (b)

$$\tilde{A}\tilde{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \alpha a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b^1 \ \dots \ \tilde{b}^i \ \dots \ b^n) = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_1b^1 & \dots & a_1\tilde{b}^i & \dots & a_1b^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_ib^1 & \dots & \alpha a_i\tilde{b}^i & \dots & \alpha a_ib^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_nb^1 & \dots & a_n\tilde{b}^i & \dots & a_nb^n \end{pmatrix} \end{array}.$$

Odtud je vidět, že podmínku na inverzi $\tilde{A}\tilde{A}^{-1} = I$ splníme, pokud

$$\tilde{b}^i := \alpha^{-1}b^i.$$

Tedy matice $\tilde{A}^{-1}$ bude mít i-tý sloupec vydělený číslem α.

ad (c)

$$
\tilde{A}\tilde{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + \alpha a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b^1 \; \dots \; b^i \; \dots \; b^j \; \dots \; b^n)
$$

$$
= \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix}
a_1 b^1 & \dots & a_1 b^i & \dots & a_1 \tilde{b}^j & \dots & a_1 b^n \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
(a_i + \alpha a_j) b^1 & \dots & (a_i + \alpha a_j) b^i & \dots & (a_i + \alpha a_j) \tilde{b}^j & \dots & (a_i + \alpha a_j) b^n \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_j b^1 & \dots & a_j b^i & \dots & a_j \tilde{b}^j & \dots & a_j b^n \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_n b^1 & \dots & a_n b^i & \dots & a_n \tilde{b}^j & \dots & a_n b^n
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

Odtud je vidět, že podmínku na inverzi $\tilde{A}\tilde{A}^{-1} = I$ splníme, pokud

$$
\tilde{b}^j := -\alpha b^i + b^j.
$$

Tedy j-tý sloupec matice $\tilde{A}^{-1}$ bude součet j-tého sloupce matice A^{-1} a $-\alpha$ násobku i-tého sloupce matice A^{-1}.

Domácí úloha 5

Nechť M je množina matic z $\mathbb{R}^{n,n}$ ve tvaru

$$
A := \begin{pmatrix}
a & b & b & \dots & b & b \\
b & a & b & \dots & b & b \\
b & b & a & \dots & b & b \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
b & b & b & \dots & a & b \\
b & b & b & \dots & b & a
\end{pmatrix}, \qquad \text{kde} \qquad a, b \in \mathbb{R}^n.
$$

(a) Pro jaké parametry jsou matice z M regulární?
(b) Ukažte, že pro regulární matici A z M je také A^{-1} z M.

Předveďme elegantní (tudíž spektrální) řešení. Uvažujme na $\mathbb{R}^n$ lineárně nezávislé vektory

$$
u_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad
u_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \dots, \qquad
u_{n-1} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad
u_n := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Potom

$$
Au_1 = (a-b)u_1, \qquad Au_2 = (a-b)u_2, \qquad \dots, \qquad Au_{n-1} = (a-b)u_{n-1}, \qquad Au_n = [a + (n-1)b]u_n.
$$

Tedy

$$
\sigma(A) = \{a - b, a + (n-1)b\},
$$

kde násobnost vlastní hodnoty $a - b$ je $n - 1$ a násobnost vlastní hodnoty $a + (n-1)b$ je 1.

ad (a)

Matice A je regulární tehdy a jen tehdy, pokud má všechny vlastní hodnoty různé od nuly. Tedy podmínka na regularitu zní

$$a \neq b \qquad \wedge \qquad a + (n-1)b \neq 0. \tag{3.1}$$

ad (b)

Matice A je diagonalizovatelná:

$$A = QDQ^{-1}, \qquad D := \begin{pmatrix} a-b & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & a-b & \\ 0 & & & a+(n-1)b \end{pmatrix}, \qquad Q := (u_1, \dots, u_n),$$

kde matice přechodu Q nezávisí na parametrech a, b. Potom

$$A^{-1} = QD^{-1}Q^{-1}, \qquad D^{-1} := \begin{pmatrix} \frac{1}{a-b} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{a-b} & \\ 0 & & & \frac{1}{a+(n-1)b} \end{pmatrix}.$$

Stačí tedy ukázat, že pro $a, b \in \mathbb{R}$ splňující (3.1) existují $a', b' \in \mathbb{R}$ splňující

$$a' - b' = \frac{1}{a-b} \qquad \text{a} \qquad a' + (n-1)b' = \frac{1}{a+(n-1)b}.$$

Avšak tato soustava má právě jedno řešení, poněvadž

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & n-1 \end{vmatrix} = n \neq 0.$$

4 Permutace a determinant

4.1 Permutace

Cvičení 2

Nechť $\pi \in S_7$
$$\pi := (2,3,6,7,1,4,5).$$
Pozor, jde o zápis pomocí cyklu, tedy $\pi(2) = 3$, $\pi(3) = 6$, $\pi(6) = 7$, $\pi(7) = 1$, $\pi(1) = 4$, $\pi(4) = 5$, $\pi(5) = 2$. Dokažte, že $\pi^{259} = \mathrm{id}$.

Stačí si uvědomit, že pro permutaci π zapsanou pomocí cyklu o n prvcích platí $\pi^n = \mathrm{id}$. Víme, že $\pi(2) = 3$, což je první číslo napravo od 2. Dále pak $\pi^2(2) = \pi(3) = 6$, tedy druhé číslo napravo od 2, atd. Vidíme tedy, že $\pi^7(2) = 2$, a obdobně pro ostatní čísla. Jelikož je číslo 259 dělitelné číslem 7, platí $\pi^{259} = \mathrm{id}$.

4.2 Determinant

Cvičení 1

Rozhodněte, zda jde o člen determinantu matice $\mathbb{A}$ řádu 6.
(a) $\mathbb{A}_{42}\mathbb{A}_{64}\mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{53}\mathbb{A}_{26}\mathbb{A}_{65}$,
(b) $\mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{42}\mathbb{A}_{53}\mathbb{A}_{64}\mathbb{A}_{35}\mathbb{A}_{26}$.

ad (a)

Člen odpovídá relaci $4 \mapsto 2$, $6 \mapsto 4$, $1 \mapsto 1$, $5 \mapsto 3$, $2 \mapsto 6$, $6 \mapsto 5$, což není ani zobrazení, tudíž se nejedná o člen determinantu.

ad (b)

Výraz odpovídá permutaci, kterou můžeme zapsat jako složení transpozic následovně:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \tau_{35} \circ \tau_{24} \circ \tau_{64}.$$
Jedná se tedy o lichou permutaci a člen determinantu jí odpovídající by před sebou měl mít znaménko mínus. Nejedná se tedy o člen determinantu.

Cvičení 2

Pro jaké i, k jde o člen determinantu matice $\mathbb{A}$ řádu 7?
$$-\mathbb{A}_{22}\mathbb{A}_{3k}\mathbb{A}_{76}\mathbb{A}_{13}\mathbb{A}_{57}\mathbb{A}_{4i}\mathbb{A}_{65}.$$

Výraz odpovídá permutaci pro $(i,k) \in \{(1,4),(4,1)\}$. Nyní postupně zjistíme její znaménko.

- $i = 1$, $k = 4$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \tau_{41} \circ \tau_{34} \circ \tau_{65} \circ \tau_{67}.$$
  Znaménko je tedy $(-1)^4 = 1$ a výraz není členem determinantu.

- $i = 4,\ k = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \tau_{31} \circ \tau_{65} \circ \tau_{67}.$$

Znaménko je $(-1)^3 = -1$ a výraz v tomto případě je členem determinantu.

Cvičení 3

Určete, jaké znaménko má v determinantu $\mathbb{A}$ řádu n součin prvků
(a) na hlavní diagonále,
(b) na vedlejší diagonále.

ad (a)

Jedná se o člen, který odpovídá identické permutaci, proto je znaménko 1.

ad (b)

Jedná se o člen, který odpovídá permutaci (tzv. symetrická permutace)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Každá uspořádaná dvojice čísel $i, j \in \hat{n}$, $i < j$ tvoří inverzi. Počet takovýchto dvojic je $\frac{1}{2}n(n-1)$ a dostáváme znaménko $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}$.

Cvičení 4

Rozložte polynom p na kořenové činitele bez výpočtu determinantu.

$$p(x) := \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ x & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & x & 3 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x & n \end{vmatrix}.$$

Pomocí výpočtu

Platí

$$\begin{aligned} p(x) &= \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ x-1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-(n-1) & 0 \end{vmatrix}}^{n} = n(-1)^{1+n} \overbrace{\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x-2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-(n-1) \end{vmatrix}}^{n-1} \\ &= n(-1)^{1+n}(x-1)(x-2)\dots(x-(n-1))\,, \end{aligned}$$

kde první rovnost dostaneme odečtením prvního řádku od všech ostatních a druhá rovnost je rozvoj podle posledního sloupce.

Bez pomoci výpočtu

$p(x)$ je z definice determinantu polynomem $n-1$ stupně. Čísla $1, 2$ až $n-1$ jsou jeho kořeny, neboť dosazením libovolného z nich za x dostáváme determinant s dvěma stejnými řádky, který je roven 0. Můžeme tedy psát

$$p(x) = C(x-1)(x-2)\dots(x-(n-1)),$$

kde C je konstanta která odpovídá koeficientu u nejvyšší mocniny x. Člen determinantu, který odpovídá této mocnině, je (až na znaménko) $\mathbb{A}_{21}\mathbb{A}_{32}\mathbb{A}_{43}\dots\mathbb{A}_{nn-1}\mathbb{A}_{1n} = nx^n$, kde $\mathbb{A}_{ij}$ značí prvky matice ze zadání. Permutaci odpovídající tomuto členu můžeme zapsat následovně

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ n & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že inverze tvoří všechny uspořádané dvojice typu $(1, k)$, $k \in \{2, 3, 4, \dots, n\}$. Znaménko permutace je tedy $(-1)^{n-1}$ a platí

$$p(x) = (-1)^{n-1} n(x-1)(x-2)\dots(x-(n-1)).$$

Cvičení 5

Čemu se rovná determinant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y + c_3 \end{vmatrix}?$$

S použitím Věty 2.21, konkrétně bodů 1., 4. a 5. (nebo faktu, že determinant jako funkce sloupců je multilineární antisymetrická forma), můžeme psát:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y + c_3 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Cvičení 6

Spočtěte následující determinant opakovaným rozvojem podle řádku či sloupce.

$$\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & y & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix},$$

kde všechny prvky matice jsou komplexní čísla.

Rozvojem podle např. podle posledního řádku a poté posledního sloupce dostaneme determinant matice 3×3, který snadno spočítáme např. Sarrusovým pravidlem nebo opět rozvojem:

$$\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & y & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix} = v \begin{vmatrix} x & a & b & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & e & y & 0 \\ g & h & k & u \end{vmatrix} = vu \begin{vmatrix} x & a & b \\ 0 & y & 0 \\ 0 & e & y \end{vmatrix} = vuxy^2.$$

5

Cvičení 7

Vypočtěte

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

(b)

$$\begin{vmatrix} x & y & y & y & \dots & y & y \\ y & x & y & y & \dots & y & y \\ y & y & x & y & \dots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & y & \dots & y & x \end{vmatrix}, \qquad x, y \in \mathbb{C},$$

(c)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & x & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix} \qquad x \in \mathbb{C}.$$

ad (a)

Od každého řádku kromě prvního odečteme první řádek a dostaneme determinant matice v horním stupňovitém tvaru, který se rovná součinu prvků na diagonále:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}}_{n \times n} = (-1)^{n-1}.$$

ad (b)

Nejprve od každého řádku kromě posledního odečteme následující řádek a v dalším kroku ke každému sloupci kromě prvního přičteme předchozí sloupec. Obdržíme determinant matice v dolním stupňovitém tvaru, který se opět rovná součinu prvků na diagonále:

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix}
x & y & y & \dots & y & y \\
y & x & y & \dots & y & y \\
y & y & x & \dots & y & y \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
y & y & y & \dots & x & y \\
y & y & y & \dots & y & x
\end{vmatrix}
&= \underbrace{\begin{vmatrix}
x-y & y-x & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & x-y & y-x & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & x-y & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & x-y & y-x \\
y & y & y & \dots & y & x
\end{vmatrix}}_{n\times n} \\
&= \begin{vmatrix}
x-y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & x-y & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & x-y & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & x-y & 0 \\
y & 2y & 3y & \dots & (n-1)y & (n-1)y+x
\end{vmatrix} \\
&= (x-y)^{n-1}[(n-1)y+x].
\end{aligned}
$$

ad (c)

Pro $x = 0$ nebo $n = 1$ je determinant roven 0 a pro $n = 2$ je roven -1. Dále pro $x \neq 0$ a $n > 2$ odečteme x násobek prvního řádku od každého řádku kromě prvního a poté přičteme $\frac{1}{x}$ násobek každého sloupce kromě prvního k prvnímu sloupci. Dostaneme opět determinant horní trojúhelníkové matice:

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix}
0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
1 & 0 & x & \dots & x & x \\
1 & x & 0 & \dots & x & x \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
1 & x & x & \dots & 0 & x \\
1 & x & x & \dots & x & 0
\end{vmatrix}
&= \underbrace{\begin{vmatrix}
0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
1 & -x & 0 & \dots & 0 & 0 \\
1 & 0 & -x & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
1 & 0 & 0 & \dots & -x & 0 \\
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -x
\end{vmatrix}}_{n\times n}
= \begin{vmatrix}
\frac{n-1}{x} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
0 & -x & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & -x & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & -x & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -x
\end{vmatrix} \\
&= (1-n)(-x)^{n-2}.
\end{aligned}
$$

Cvičení 8

Spočtěte determinant
(a) pomocí faktu, že jde o n-lineární formu,
(b) rozložením příslušné matice na součin dvou matic.

$$
D_n := \begin{vmatrix}
a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\
a_2+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n
\end{vmatrix}.
$$

Pro $n = 1$ platí $D_1 = a_1 + b_1$ a pro $n = 2$ platí

$$
D_2 = \begin{vmatrix}
a_1+b_1 & a_1+b_2 \\
a_2+b_1 & a_2+b_2
\end{vmatrix} = (a_1-a_2)(b_2-b_1).
$$

Pro $n \geq 3$ tvrdíme, že $D_n = 0$.

ad (a)

$$
\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ a_2 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_2 & b_3 & \dots & b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & b_3 & \dots & b_n \\ b_1 & a_2 & b_3 & \dots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & a_n & b_3 & \dots & b_n \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & a_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & a_n \end{vmatrix} \\
&= b_2 b_3 \dots b_n \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}}_{=0} + b_1 b_3 \dots b_n \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_2 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}}_{=0} + \dots + b_1 b_3 \dots b_{n-1} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & a_1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a_n \end{vmatrix}}_{=0} \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

pokud $n \geq 3$ (determinanty mají $n-1$ stejných sloupců).

ad (b)

$$
\begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & a_2+b_3 & \dots & a_2+b_n \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & a_3+b_3 & \dots & a_3+b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & a_n+b_3 & \dots & a_n+b_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{=:A_n} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{=:B_n},
$$

kde $\det A_n = 0 = \det B_n$, jakmile $n \geq 3$ (matice A_n má $n-2$ nulových sloupců a matice B_n má $n-2$ nulových řádků).

5 Determinant

Pro libovolnou matici $A = (a_{jk})_{j,k=1,\ldots,n}$ definujme *kofaktorovou* matici $\operatorname{cof} A = (a^{jk})_{j,k=1,\ldots,n}$ vztahy $(j,k = 1,\ldots,n)$

$$a^{jk} := (-1)^{j+k} \det A_{jk} \,,$$

kde A_{jk} značí matici, jež dostaneme z matice A vyškrtnutím j-tého řádku a k-tého sloupce. Pokud je A regulární, můžeme inverzní matici spočíst ze vztahu

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \, (\operatorname{cof} A)^T \,. \tag{5.1}$$

Připomeňme, že A je regulární tehdy a jen tehdy, pokud $\det A \neq 0$.

Nechť $b \in \mathbb{C}^n$ je libovolný (sloupcový) vektor. Užitím definice determinantu přes rozvoj podle j-tého řádku, dostáváme ze vztahu (5.1) *Cramerovo pravidlo*

$$A^{-1}b = \frac{\det(A_j; b)}{\det A}, \tag{5.2}$$

kde $(A_j; b)$ je matice, kterou dostaneme z matice A nahrazením j-tého řádku (řádkovým) vektorem b^T. Poněvadž $\det(A_j; b) = \det(A_j; b)^T$, lze v čitateli (5.2) uvažovat determinant matice, kterou dostaneme z matice A nahrazením j-tého sloupce (sloupcovým) vektorem b.

Cvičení 1

Nechť $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Najděte $[A^{-1}]_{13}$ a $[A^{-1}]_{31}$ pomocí matice adjungované.

(b) Vyřešte soustavu $Ax = b$ pomocí Cramerova pravidla, je-li $b := \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

ad (a)

Potřebujeme určit determinant $\det A = -12$ a koeficienty kofaktorové matice

$$a^{31} = (-1)^{3+1} \det A_{31} = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -7,$$

$$a^{13} = (-1)^{1+3} \det A_{13} = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -5.$$

Ze vztahu (5.1) dostáváme

$$[A^{-1}]_{13} = \frac{a^{31}}{\det A} = \frac{7}{12} \qquad \text{a} \qquad [A^{-1}]_{31} = \frac{a^{31}}{\det A} = \frac{5}{12}.$$

ad (b)

Poněvadž $\det A \neq 0$, soustava $Ax = b$ má právě jedno řešení $x = A^{-1}b$. Užitím

$$\det(A_1; b)^T = \det \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -12,$$

$$\det(A_2; b)^T = \det \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} = -12,$$

$$\det(A_3; b)^T = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} - 12,$$

a připomenutím, že $\det A = -12$, dostáváme ze vztahu (5.2) řešení

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 2

Určete hodnost matice pomocí subdeterminantů.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podle obecného tvrzení $h(A) = k$, kde k je stupeň submatice, jejíž determinant je nenulový a všechny ostatní submatice vyššího stupně mají nulové determinanty. *A priori* víme, že $h(A) \leq \min\{3, 4\} = 3$. Začněme tedy výpočtem determinantů submatic stupně 3:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 5.$$

Alespoň jeden z těchto determinantů je nenulový, tudíž $h(A) = 3$. (V praxi bychom skončili po výpočtu prvního, který už je nenulový.)

Cvičení 2'

Určete hodnost matice pomocí subdeterminantů.

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Opět *a priori* víme, že $h(A) \leq \min\{3, 4\} = 3$. Začněme tedy výpočtem determinantů submatic stupně 3:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 5.$$

Všechny tyto determinanty jsou nulové, tudíž $h(A) < 3$. V tuto chvíli už je zřejmé, že $h(A) = 2$, jelikož matice má zřejmě dva sloupce lineárně nezávislé. Ověřme to nicméně i výpočtem determinantů submatic stupně 2. Stačí vzít hned první submatici, jejíž determinant už je nenulový:

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -3.$$

Cvičení 3

Víte-li, že 23 dělí beze zbytku čísla 253, 529, 391, dokažte bez výpočtu determinantu, že je také dělitelný beze zbytku číslem 23.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 9 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix}.$$

Trik je užít toho, že determinant se nezmění, pokud k libovolnému řádku (nebo sloupci) přičteme lineární kombinaci ostatních řádků (nebo sloupců). Tedy

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 9 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 9 \\ 3+5\times 10+2\times 100 & 9+2\times 10+5\times 100 & 1+9\times 10+3\times 100 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 9 \\ 253 & 529 & 391 \end{vmatrix} \\
&= 23 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 9 \\ \frac{252}{23} & \frac{529}{23} & \frac{391}{23} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Poslední rovnost využívá vlastnosti, že je-li libovolný řádek (nebo sloupec) determinantu vynásoben libovolným číslem, lze toto číslo vytknout před determinant (determinant se chová jako lineární zobrazení vzhledem k libovolnému řádku či sloupci). Poněvadž zlomky na posledním řádku jsou celá čísla, dostáváme požadované tvrzení.

Cvičení 4

Víte-li, že a, b, c jsou kořeny polynomu $x^3 + px + q$, dokažte, že $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0.$

V první řadě si uvědomme, že pokud a, b, c jsou kořeny polynomu $x^3 + px + q$, pak

$$x^3 + px + q = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc$$

pro všechna $x \in \mathbb{C}$. Z tohoto vztahu speciálně dostáváme, že $a + b + c = 0$. Potom

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ b+c+a & c & a \\ c+a+b & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & c & a \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = 0,$$

kde první rovnost využívá obecné vlastnosti, že determinant se nezmění, pokud k libovolnému sloupci přičteme lineární kombinaci ostatních sloupců.

Cvičení 5

Spočtěte $\det D$, kde $D \in \mathscr{L}(\mathcal{P}_n)$ je operátor derivování.

Připomeňme, že $Dp := p'$, kde $p \in \mathcal{P}_n$. Podle definice $\det D = \det {}^{\mathcal{B}}D$, kde $\mathcal{B}$ je libovolná báze prostoru $\mathcal{P}_n$. Zvolme standardní bázi $\mathcal{E} = (e_0, e_1, \ldots, e_{n-1})$, kde e_k je monom stupně k. Potom

$$
\begin{aligned}
De_0 &= 0 && = 0e_0 + 0e_1 + 0e_2 + \cdots + 0e_{k-1} + \cdots + 0e_{n-2} + 0e_{n-1}, \\
De_1 &= e_0 && = 1e_0 + 0e_1 + 0e_2 + \cdots + 0e_{k-1} + \cdots + 0e_{n-2} + 0e_{n-1}, \\
De_2 &= 2e_1 && = 0e_0 + 2e_1 + 0e_2 + \cdots + 0e_{k-1} + \cdots + 0e_{n-2} + 0e_{n-1}, \\
De_3 &= 3e_2 && = 0e_0 + 0e_1 + 3e_2 + \cdots + 0e_{k-1} + \cdots + 0e_{n-2} + 0e_{n-1}, \\
&\vdots \\
De_k &= ke_{k-1} && = 0e_0 + 0e_1 + 0e_2 + \cdots + ke_{k-1} + \cdots + 0e_{n-2} + 0e_{n-1}, \\
&\vdots \\
De_{n-1} &= (n-1)e_{n-2} && = 0e_0 + 0e_1 + 0e_2 + \cdots + 0e_{k-1} + \cdots + (n-1)e_{n-2} + 0e_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Tedy

$$
{}^{\mathcal{E}}D = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & & & \ddots & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

Jelikož má matice jeden sloupec (řádek) nulový, platí $\det D = \det {}^{\mathcal{E}}D = 0$.

Cvičení 6

Jak se změní determinant matice n-tého řádu s komplexními prvky, pokud
- (a) napíšeme řádky v opačném pořadí,
- (b) napíšeme sloupce v opačném pořadí,
- (c) překlopíme matici podle hlavní diagonály,
- (d) překlopíme matici podle vedlejší diagonály,
- (e) zrcadlíme prvky matice podle středu,
- (f) každý prvek vynásobíme číslem $\alpha \neq 0$,
- (g) každý prvek A_{ij} vynásobíme α^{i-j}, $\alpha \neq 0$,
- (h) od každého řádku kromě posledního odečteme následující řádek a od posledního odečteme původní první řádek,
- (i) ke každému sloupci (počínaje posledním a konče druhým) přičteme předcházející a k prvnímu sloupci přičteme původní poslední sloupec,
- (j) každý prvek matice nahradíme číslem komplexně sdruženým.

Značme původní matici $A = (a_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$ a transformovanou matici $\tilde{A}$. Dále uvažujme j-tý řádek matice A jako řádkový vektor $a_j := (a_{j1}, \dots, a_{jn})$ a k-tý sloupec matice A jako sloupcový vektor $a^k := (a_{1k}, \dots, a_{nk})^T$.

ad (a)

$\boxed{\det \tilde{A} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det A\,,}$ poněvadž

$$
\det \tilde{A} = \det \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = (-1)^{n-1} \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_3 \\ a_2 \end{pmatrix} = (-1)^{n-1}(-1)^{n-2} \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_n \\ \vdots \\ a_5 \\ a_4 \end{pmatrix}
$$

$$
= \dots = (-1)^{n-1}(-1)^{n-2} \dots (-1)^{n-(n-1)} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = (-1)^{1+2+\dots+(n-2)+(n-1)} \det A
$$

a stačí použít formulku pro součet aritmetické posloupnosti.

Alternativně můžeme psát

$$
\det \tilde{A} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \det A & \Leftrightarrow \ n \text{ sudé}, \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \det A & \Leftrightarrow \ n \text{ liché}, \end{cases}
$$

což se dostane alternativním řešením, kdy se prohodí první a poslední řádek matice $\tilde{A}$, psk druhý a předposlední, etc.

ad (b)

$\boxed{\det \tilde{A} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det A\,,}$ poněvadž vztah $\det A = \det A^T$ převede problém na předchozí případ.

ad (c)

$\boxed{\det \tilde{A} = \det A\,,}$ poněvadž $\tilde{A} = A^T$ a platí $\det A = \det A^T$.

ad (d)

$\boxed{\det \tilde{A} = \det A\,,}$ poněvadž transformaci (d) lze chápat jako složení předchozích transformací (a), (b) a (c), schematicky (d)=(c)∘(b)∘(a), tudíž

$$\det \tilde{A} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det A^T = (-1)^{n(n-1)} \det A = \det A,$$

kde poslední rovnost platí, jelikož $n(n-1)$ je vždy sudé číslo.

ad (e)

$\boxed{\det \tilde{A} = \det A\,,}$ poněvadž transformaci (e) lze chápat jako složení předchozích transformací (c) a (d), schematicky (e)=(d)∘(c), a obě transformace determinant nemění.

ad (f)

$\boxed{\det \tilde{A} = \alpha^n \det A\,,}$ poněvadž

$$\det \tilde{A} = \det \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_{n-1} \\ \alpha a_n \end{pmatrix} = \underbrace{\alpha \dots \alpha}_{n\text{-krát}} \det A.$$

ad (g)

$\boxed{\det \tilde{A} = \det A\,,}$ poněvadž

$$\begin{aligned}
\det \tilde{A} &= \sum_{\pi} (-1)^{\operatorname{sgn} \pi}\, \alpha^{1-\pi(1)} a_{1\pi(1)}\, \alpha^{2-\pi(2)} a_{2\pi(2)} \,\dots\, \alpha^{n-\pi(n)} a_{n\pi(n)} \\
&= \sum_{\pi} (-1)^{\operatorname{sgn} \pi}\, \alpha^{1+2\dots+n-[\pi(1)+\pi(2)+\dots+\pi(n)]}\, a_{1\pi(1)}\, a_{2\pi(2)} \,\dots\, a_{n\pi(n)} \\
&= \sum_{\pi} (-1)^{\operatorname{sgn} \pi}\, a_{1\pi(1)}\, a_{2\pi(2)} \,\dots\, a_{n\pi(n)} \\
&= \det A,
\end{aligned}$$

kde předposlední rovnost využívá bijektivitu π, díky níž $\pi(1) + \pi(2) + \dots + \pi(n) = 1 + 2 + \dots + n$.

ad (h)

$\boxed{\det \tilde{A} = 0\,,}$ poněvadž

$$\det \tilde{A} = \det \begin{pmatrix} a_1 - a_2 \\ a_2 - a_3 \\ a_3 - a_4 \\ \vdots \\ a_{n-2} - a_{n-1} \\ a_{n-1} - a_n \\ a_n - a_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) + (a_n - a_1) \\ a_2 - a_3 \\ a_3 - a_4 \\ \vdots \\ a_{n-2} - a_{n-1} \\ a_{n-1} - a_n \\ a_n - a_1 \end{pmatrix}$$
$$= \det \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 - a_3 \\ a_3 - a_4 \\ \vdots \\ a_{n-2} - a_{n-1} \\ a_{n-1} - a_n \\ a_n - a_1 \end{pmatrix} = 0,$$

kde v druhé rovnosti jsme k prvnímu řádku přičetli všechny ostatní řádky.

ad (i)

$\boxed{\det \tilde{A} = [1 + (-1)^{n-1}] \det A\,,}$ poněvadž

$$\begin{aligned}
\det \tilde{A} &= \det \begin{pmatrix} a^1 + a^n & a^2 + a^1 & a^3 + a^2 & \dots & a^{n-1} + a^{n-2} & a^n + a^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} a^1 & a^2 + a^1 & a^3 + a^2 & \dots & a^{n-1} + a^{n-2} & a^n + a^{n-1} \end{pmatrix} \\
&\quad + \det \begin{pmatrix} a^n & a^2 + a^1 & a^3 + a^2 & \dots & a^{n-1} + a^{n-2} & a^n + a^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} a^1 & a^2 & a^3 & \dots & a^{n-1} & a^n \end{pmatrix} \\
&\quad + \det \begin{pmatrix} a^n & a^1 & a^2 & \dots & a^{n-2} & a^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \det A \\
&\quad + \det \begin{pmatrix} a^n & a^1 & a^2 & \dots & a^{n-2} & a^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \det A \\
&\quad + (-1)^{n-1} \det A.
\end{aligned}$$

ad (j)

$\boxed{\det \tilde{A} = \overline{\det A}\,.}$

Cvičení 7

Spočtěte determinant

$$D_n := \begin{vmatrix} 0 & a & a & \dots & a \\ b & 0 & a & \dots & a \\ b & b & 0 & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Pokud $a = 0$ nebo $b = 0$ nebo $n = 1$, pak $D_n = 0$. Pokud $n = 2$, pak $D_2 = -ab$. Předpokládejme nadále, že $a \neq 0$ a $b \neq 0$ a $n \geq 3$.

Učiňme následující úpravy

$$D_n := \overbrace{\begin{vmatrix} 0 & a & a & \dots & a & a \\ b & 0 & a & \dots & a & a \\ b & b & 0 & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \dots & 0 & a \\ b & b & b & \dots & b & 0 \end{vmatrix}}^{n} = \overbrace{\begin{vmatrix} -b & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -b & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b & a \\ b & b & b & \dots & b & 0 \end{vmatrix}}^{n} = -a \underbrace{\overbrace{\begin{vmatrix} -b & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -b & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b & a \\ b & b & b & \dots & b & b \end{vmatrix}}^{n-1}}_{=:I_{n-1}},$$

kde jsme v první rovnosti od každého řádku kromě posledního odečetli následující a v druhé rovnosti jsme učinili rozvoj podle posledního sloupce. V determinantu I_{n-1} učiňme rozvoj podle prvního sloupce:

$$I_{n-1} = -b \underbrace{\overbrace{\begin{vmatrix} -b & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -b & a \\ b & b & \dots & b & b \end{vmatrix}}^{n-2}}_{=I_{n-2}} + (-1)^n\, b \underbrace{\overbrace{\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -b & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -b & a \end{vmatrix}}^{n-2}}_{=a^{n-2}}.$$

Dostáváme tedy rekurentní vztah

$$I_{n-1} = -b\, I_{n-2} + (-1)^n\, b\, a^{n-2} = -b\, I_{n-2} + b\,(-a)^{n-2}.$$

Pro první člen platí

$$I_2 = \begin{vmatrix} -b & a \\ b & b \end{vmatrix} = -b\,(a+b),$$

zatímco další členy splňují

$$\begin{aligned} I_3 + bI_2 &= b\,(-a)^2, && \mid \cdot (-b)^{n-4} \\ I_4 + bI_3 &= b\,(-a)^3, && \mid \cdot (-b)^{n-5} \\ &\vdots && \vdots \\ I_{n-3} + bI_{n-4} &= b\,(-a)^{n-4}, && \mid \cdot (-b)^2 \\ I_{n-2} + bI_{n-3} &= b\,(-a)^{n-3}, && \mid \cdot (-b) \\ I_{n-1} + bI_{n-2} &= b\,(-a)^{n-2}. \end{aligned}$$

Proveďme naznačené přenásobení a výsledné identity sečtěme:

$$I_{n-1} + (-b)^{n-4} bI_2 = b\Big[(-a)^{n-2} + (-a)^{n-3}(-b) + (-a)^{n-4}(-b)^2 + \dots + (-a)^3(-b)^{n-5} + (-a)^2(-b)^{n-4}\Big].$$

Užitím vztahu pro I_2 dostáváme

$$\begin{aligned} I_{n-1} &= b\Big[(-a)^{n-2} + (-a)^{n-3}(-b) + (-a)^{n-4}(-b)^2 \\ &\qquad + \dots + (-a)^3(-b)^{n-5} + (-a)^2(-b)^{n-4} + (-a)(-b)^{n-3} + (-b)^{n-2}\Big] \\ &= b \sum_{j=0}^{n-2} (-a)^{n-2-j}(-b)^j = b\,(-1)^{n-2} \sum_{j=0}^{n-2} a^{n-2-j} b^j \\ &= b\,(-1)^{n-2}\, \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a-b}. \end{aligned}$$

Konečný výsledek (pro libovolná čísla a, b a $n \geq 1$) tedy zní

$$D_n = ab\,(-1)^{n-1}\, \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a-b}.$$

Cvičení 8

Nechť $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ je komplexní posloupnost vyhovující rekurentnímu vztahu $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$ pro každé $n \geq 3$, kde $p, q \in \mathbb{C}$ a $p \neq 0 \vee q \neq 0$. Potom platí:

(a) Pro $q = 0$ je $D_n = p^{n-2}D_2$ pro $n \geq 3$.

(b) Pro $q \neq 0$ označme λ_1, λ_2 kořeny rovnice $x^2 = px + q$.

(i) Pro $\lambda_1 \neq \lambda_2$ je $D_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ pro $n \geq 1$, kde c_1, c_2 jsou konstanty jednoznačně určené členy D_1 a D_2.

(ii) Pro $\lambda_1 = \lambda_2$ je $D_n = (c_1 + nc_2)\lambda_1^n$ pro $n \geq 1$, kde c_1, c_2 jsou konstanty jednoznačně určené členy D_1 a D_2.

ad (a)

Z rekurentního vztahu dostáváme

$$D_n = pD_{n-1} = ppD_{n-2} = \cdots = \underbrace{pp\dots p}_{k\text{-krát}} D_{n-k} = p^k D_{n-k}$$

pro všechna $0 \leq k \leq n-2$. Dokazovaný vztah plyne speciální volbou $k = n-2$. $\square$

ad (b), (i)

Postupujme indukcí.

Pro $n = 3$ rekurentní vztah říká, že $D_3 = pD_2 + qD_1$. Zároveň, užitím rovnice, kterou λ_1, λ_2 splňují,

$$\begin{aligned} c_1\lambda_1^3 + c_2\lambda_2^3 &= c_1\lambda_1(p\lambda_1 + q) + c_2\lambda_2(p\lambda_2 + q) \\ &= p(c_1\lambda_1^2 + c_2\lambda_2^2) + q(c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2). \end{aligned}$$

Tedy požadovaná rovnost plyne, pokud lze zvolit konstanty c_1, c_2 tak, aby

$$D_2 = c_1\lambda_1^2 + c_2\lambda_2^2 \qquad \text{a} \qquad D_1 = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2. \tag{5.3}$$

To lze, poněvadž (Cramerovo pravidlo)

$$\det\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} = \lambda_1\lambda_2^2 - \lambda_1^2\lambda_2 = \lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0,$$

kde nerovnost platí díky tomu, že předpokládáme, že $\lambda_1 \neq \lambda_2$, a zároveň rovnice $x^2 = px + q$ nemá nulové kořeny za našeho předpokladu $q \neq 0$. Vztahy (5.3) ukazují, že platnost dokazovaného vztahu lze skutečně rozšířit i pro $n = 1, 2$.

Předpokládejme, že vztah $D_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ platí pro libovolné $n \geq 3$.

Dokažme jeho platnost pro $n + 1$:

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= pD_n + qD_{n-1} \\ &= p(c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n) + q(c_1\lambda_1^{n-1} + c_2\lambda_2^{n-1}) \\ &= c_1\lambda_1^{n-1}(p\lambda_1 + q) + c_2\lambda_2^{n-1}(p\lambda_2 + q) \\ &= c_1\lambda_1^{n+1} + c_2\lambda_2^{n+1}, \end{aligned}$$

kde jsme v poslední rovnosti užili rovnice, kterou λ_1, λ_2 splňují. $\square$

ad (b), (ii)

Nejdříve ze všeho si uvědomme, že podmínka, že rovnice $x^2 = px + q$ má stejné kořeny, implikuje

$$p^2 = -4q \qquad \text{a} \qquad \lambda_1 = \frac{p}{2} = \lambda_2.$$

Tedy daný rekurentní vztah nyní zní ($n \geq 3$)

$$D_n = pD_{n-1} - \frac{p^2}{4} D_{n-2}, \tag{5.4}$$

kde $p \neq 0$, a dokazovaný vztah zní ($n \geq 1$)

$$D_n = (c_1 + nc_2) \left(\frac{p}{2}\right)^n. \tag{5.5}$$

Dále postupujme indukcí.

Určeme konstanty c_1, c_2 jednoznačně požadavkem, aby formulka (5.5) platila pro $n = 1, 2$, tedy

$$\begin{aligned} D_1 &= (c_1 + c_2)\frac{p}{2}, \\ D_2 &= (c_1 + 2c_2) \left(\frac{p}{2}\right)^2, \end{aligned} \tag{5.6}$$

(pro ověření, že to jde, lze opět využít Cramerovo pravidlo). Jako první indukční krok je potřeba ukázat, že formulka (5.5) platí i pro $n = 3$. Z rekurentního vztahu (5.4) a užitím (5.6) dostáváme

$$\begin{aligned} D_3 &= pD_2 - \frac{p^2}{4} D_1 \\ &= p \left[(c_1 + 2c_2) \left(\frac{p}{2}\right)^2\right] - \frac{p^2}{4} \left[(c_1 + c_2)\frac{p}{2}\right] \\ &= [2(c_1 + 2c_2) - (c_1 + c_2)] \left(\frac{p}{2}\right)^3 \\ &= (c_1 + 3c_2) \left(\frac{p}{2}\right)^3, \end{aligned}$$

což bylo dokázati.

Předpokládejme nyní, že vztah (5.5) platí pro libovolné $n \geq 3$.

Dokažme jeho platnost pro $n + 1$:

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= pD_n - \frac{p^2}{4} D_{n-1} \\ &= p(c_1 + nc_2) \left(\frac{p}{2}\right)^n - \frac{p^2}{4}(c_1 + (n-1)c_2) \left(\frac{p}{2}\right)^{n-1} \\ &= [2(c_1 + nc_2) - (c_1 + (n-1)c_2)] \left(\frac{p}{2}\right)^{n+1} \\ &= (c_1 + (n+1)c_2) \left(\frac{p}{2}\right)^{n+1}, \end{aligned}$$

což bylo dokázati. □

Cvičení 9

Pomocí předchozího příkladu spočtěte

(a)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

(b)

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix},$$

kde $\alpha \neq 0 \ \vee \ \beta \neq 0$.

ad (a)

Označme hledaný determinant symbolem D_n, kde n je stupeň matice, jejíž determinant počítáme. Snadno spočteme, že

$$D_1 = 2 \qquad \text{a} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

Pro $n \geq 3$ rozvoj podle prvního řádku dává

$$D_n = \overbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}}^{n} = 2\overbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}}^{n-1} - \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}}^{n-1} = 2D_{n-1} - D_{n-2},$$

kde druhá rovnost plyne rozvojem podle prvního sloupce v druhém determinantu. Jsme tedy v situaci předchozího příkladu s $p = 2$ a $q = -1$. Rovnice $x^2 = px + q$ má jeden dvojnásobný kořen 1, jsme tedy v situaci (b), (ii) předchozího příkladu. Řešením soustavy (5.6) je $c_1, c_2 = 1$, tudíž ($n \geq 1$)

$$D_n = 1 + n.$$

ad (b)

Označme hledaný determinant symbolem $\tilde{D}_n$, kde n je stupeň matice, jejíž determinant počítáme. Snadno spočteme, že

$$\tilde{D}_1 = \alpha + \beta \qquad \text{a} \qquad \tilde{D}_2 = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 2 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \alpha^2 + \beta^2.$$

Pro $n \geq 3$ rozvoj podle prvního sloupce dává

$$\begin{aligned} \tilde{D}_n &= \overbrace{\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}}^{n} \\ &= (\alpha+\beta)\underbrace{\overbrace{\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}}^{n-1}}_{=:D_{n-1}} - 2\overbrace{\begin{vmatrix} \alpha\beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}}^{n-1} \\ &= (\alpha+\beta)D_{n-1} - 2\alpha\beta D_{n-2}, \end{aligned}$$

kde poslední rovnost plyne rozvojem podle prvního řádku v druhém determinantu na druhém řádku. Pro spočtení hledaného determinantu $\tilde{D}_n$ stačí tedy znát determinant D_n.

Ten však, postupem jako pro $\tilde{D}_n$, splňuje rekurentní vztah ($n \geq 3$)

$$D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$$

s

$$D_1 = \alpha + \beta \qquad \text{a} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 2 & \alpha + \beta \end{vmatrix} = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta.$$

Jsme tedy v situaci předchozího příkladu s $p = \alpha + \beta$ a $q = -\alpha\beta$. Rovnice $x^2 = px + q$ má kořeny

$$\lambda_\pm := \frac{\alpha + \beta \pm |\alpha - \beta|}{2}.$$

$\boxed{\alpha = 0 \ \vee \ \beta = 0.}$ Pak $D_n = (\alpha + \beta)^{n-2} D_2 = (\alpha + \beta)^{n-2}(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)$.

$\boxed{\alpha \neq 0 \ \wedge \ \beta \neq 0 \ \wedge \ \alpha \neq \beta.}$ Pak $D_n = c_1 \lambda_+^n + c_2 \lambda_-^n$, kde konstanty c_1, c_2 jsou jednoznačně určeny rovnicemi (5.3).

$\boxed{\alpha \neq 0 \ \wedge \ \beta \neq 0 \ \wedge \ \alpha = \beta.}$ Pak $D_n = (c_1 + n c_2) \lambda_+^n$, kde konstanty c_1, c_2 jsou jednoznačně určeny rovnicemi (5.6).

Domácí úloha 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-1 \end{vmatrix}.$$

Počínaje posledním řádkem, konče druhým, od každého řádku odečtěte řádek nad ním. Poté, počínaje druhým řádkem, konče předposledním, od každého řádku odečtěte řádek pod ním. Nakonec, počínaje předposledním sloupcem, konče prvním, ke každému sloupci přičtěte sloupec napravo. Rozvojem podle prvního sloupce, kde je nyní pouze jediné nenulové číslo, a přerovnáním řádků se problém redukuje na determinant dolní trojúhelníkové matice.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-1 & n & \cdots & n-5 & n-4 & n-3 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-4 & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n & -n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & -n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2}-1 & \frac{n(n+1)}{2}-3 & \cdots & 3n-3 & 2n-1 & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}_{n-1 \times n-1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(n+1)n^{n-1}}{2}.$$

Domácí úloha 2

$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{vmatrix}, \qquad \text{kde} \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R} \quad \text{pro každé} \quad i \in \hat{n}.$$

Použijte vzorec pro cosinus rozdílu dvou úhlů

$$\cos(\alpha_i-\beta_j) = \cos\alpha_i\cos\beta_j + \sin\alpha_i\sin\beta_j$$

a matici vyjádřete jako součin dvou matic, kde první má nenulové pouze první dva sloupce a druhá má nenulové pouze první dva řádky.

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos\alpha_n & \sin\alpha_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 & \cdots & \cos\beta_n \\ \sin\beta_1 & \sin\beta_2 & \sin\beta_3 & \cdots & \sin\beta_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \ n>2, \\ (\cos\alpha_1\sin\alpha_2 - \cos\alpha_2\sin\alpha_1)(\cos\beta_1\sin\beta_2 - \cos\beta_2\sin\beta_1) = \sin(\alpha_2-\alpha_1)\sin(\beta_2-\beta_1) & \Leftrightarrow \ n=2, \\ \cos(\alpha_1-\beta_1) & \Leftrightarrow \ n=1. \end{cases} \end{aligned}$$

Domácí úloha 3

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{2}{x} \end{vmatrix}, \qquad \text{kde} \quad x \neq 0.$$

Nejprve k-tý sloupec vynásobte x^{k-1}. Vznikne matice, kde je v každém řádku stejná mocnina x. Tuto z každého řádku vytkněte a výsledná matice je právě ta z příkladu 9(a) tohoto cvičení.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{x} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{2}{x} \end{vmatrix}
&= x^{-\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} \frac{2}{x} & \frac{1}{x} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 2x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2x^{n-3} & x^{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x^{n-2} & 2x^{n-2} \end{vmatrix} \\
&= x^{-\frac{n(n-1)}{2}} x^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} \frac{1}{x} \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{=1+n} \\
&= x^{-n}(1+n).
\end{aligned}$$

Domácí úloha 4

$$\begin{vmatrix} (2n-1)^n & (2n-2)^n & \cdots & n^n & (2n)^n \\ (2n-1)^{n-1} & (2n-2)^{n-1} & \cdots & n^{n-1} & (2n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2n-1 & 2n-2 & \cdots & n & 2n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Poslední sloupec přehoďte na první místo a řádky napište v opačném pořadí. Až na transpozici dostanete Vandermondův determinant (viz Úkol 2.47 ze skript).

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} (2n-1)^n & (2n-2)^n & \cdots & n^n & (2n)^n \\ (2n-1)^{n-1} & (2n-2)^{n-1} & \cdots & n^{n-1} & (2n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2n-1 & 2n-2 & \cdots & n & 2n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^n (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2n & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (2n)^{n-1} & (2n-1)^{n-1} & (2n-2)^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \\ (2n)^n & (2n-1)^n & (2n-2)^n & \cdots & n^n \end{vmatrix} \\
&= (-1)^n (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{i>j} (2n-i+1-(2n-j+1)) = (-1)^n (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{i>j} (j-i) \\
&= (-1)^n (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=1}^{n} k! \\
&= (-1)^n \prod_{k=1}^{n} k!\,.
\end{aligned}$$

Domácí úloha 5

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ 1 & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \cdots & \binom{n+1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \binom{n}{n-1} & \binom{n+1}{n-1} & \cdots & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix}.$$

S použitím vzorcem pro rozdíl dvou kombinačních čísel, jejichž vrchní argument se liší o 1 a spodní je stejný,

$$\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{k-1},$$

odečtěte počínaje posledním sloupcem, konče druhým, od každého sloupce předchozí. Poté rozviňte matici podle prvního sloupce. Výsledná matice je totožná s původní, ve které chybí první sloupec a poslední řádek. Po $n-1$ těchto krocích dostanete matici 1×1 s jediným prvkem 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ 1 & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \cdots & \binom{n+1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \binom{n}{n-1} & \binom{n+1}{n-1} & \cdots & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n}{n-2} & \cdots & \binom{2n-3}{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n-1}{n-2} & \binom{n}{n-2} & \cdots & \binom{2n-3}{n-2} \end{vmatrix}}_{n-1\times n-1}$$

$$= \cdots = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \binom{n-1}{1} & \binom{n}{1} \end{vmatrix} = 1.$$

6 Vlastní čísla a vlastní vektory matic

Spektrum $\sigma(A)$ matice $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ je množina *vlastních čísel* $\lambda \in \mathbb{C}$ takových, že $A - \lambda I$ není invertibilní. Můžeme tedy využít vlastností determinantů a vlastní čísla hledat coby kořeny *charakteristického* polynomu $p(\lambda) := \det(A - \lambda I)$. *Algebraická násobnost* $\nu_a(\lambda)$ vlastního čísla $\lambda \in \sigma(A)$ je násobnost λ coby kořene $p(\lambda)$. *Geometrická násobnost* $\nu_g(\lambda)$ vlastního čísla $\lambda \in \sigma(A)$ je dimenze prostoru $\ker(A - \lambda I)$; zde $A - \lambda I$ chápeme jako zobrazení na $\mathbb{C}^n$, jež tato matice přirozeně generuje. *Vlastní vektor* $u \in \mathbb{C}^n$ odpovídající vlastnímu číslu $\lambda \in \sigma(A)$ je jakýkoli nenulový vektor z $\ker(A - \lambda I)$. Matice A je tzv. *diagonalizovatelná*, pokud vlastní vektory tvoří bázi na $\mathbb{C}^n$, což je ekvivalentní tomu, že geometrické a algebraické násobnosti všech vlastních hodnot se rovnají.

Cvičení 1

Najděte vlastní čísla a vlastní vektory následujících matic. Rozhodněte o jejich diagonalizovatelnosti. Jsou-li diagonalizovatelné, najděte regulární X a diagonální D tak, aby $A = XDX^{-1}$. Ověřte, že matice jsou kořeny svých charakteristických polynomů.

$$\text{(a)}\quad A := \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)}\quad A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(c)}\quad A := \begin{pmatrix} -20 & 9 & -18 \\ 6 & -5 & 6 \\ 24 & -12 & 22 \end{pmatrix}.$$

ad (a)

$p(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$. Tudíž $\sigma(A) = \{1, 2, 3\}$. Zřejmě $\nu_a(1) = \nu_a(2) = \nu_a(3) = 1$. Poněvadž geometrická násobnost je vždy menší než geometrická násobnost, rovnou víme, že rovněž $\nu_g(1) = \nu_g(2) = \nu_g(3) = 1$, a tudíž matice A je diagonalizovatelná, aniž bychom hledali vlastní vektory. Vlastní vektory u však snadno najdeme coby řešení rovnice $(A - \lambda I)u = 0$.

$\boxed{\lambda = 1}$ *A priori* víme, že hodnost matice $A - 1I$ je 2, poněvadž $\nu_g(1) = 1$. Snadno to však ověříme i obvyklým výpočtem (vaše schůdky):

$$A - 1I = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

odkud navíc vidíme, že odpovídající vlastní vektor je (nebo jakýkoli jeho nenulový násobek)

$$u_{(1)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\lambda = 2}$ Podobně

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -4 \\ 6 & 4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tudíž

$$u_{(2)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\lambda = 3}$ Nakonec

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & -4 \\ 6 & 4 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tudíž

$$u_{(3)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Diagonální matice D se vytvoří naskládáním vlastních hodnot na diagonálu a matice přechodu X se vytvoří naskládáním vlastních vektorů do sloupečků (ve správném pořadí!):

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad X := \begin{pmatrix} u_{(1)} & u_{(2)} & u_{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Ověřte si platnost vztahu $A = XDX^{-1}$.)

Ověření platnosti vztahu $p(A) = 0$ je rutinní záležitost (násobení a sčítání matic).

ad (b)

$p(\lambda) = -(\lambda - 2)^3$. Tudíž $\sigma(A) = \{2\}$ a $\nu_a(2) = 3$. V tomto případě není diagonalizovatelnost zřejmá a je nutné se podívat na strukturu jádra $\ker(A - 2I)$.

$\boxed{\lambda = 2}$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

odkud je rovnou vidět, že hodnost matice $A - 2I$ je 1, tudíž $\nu_g(2) = 3 - 1 = 2$. Jelikož $\nu_g(2) \neq \nu_a(2)$, matice A není diagonalizovatelná.

ad (c)

$p(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$. Tudíž $\sigma(A) = \{-2, 1\}$ a $\nu_a(-2) = 2$ a $\nu_a(1) = 1$. Z poslední rovnosti rovnou plyne $\nu_g(1) = 1$. Pro rozhodnutí, zda je matice A diagonalizovatelná, je však pořád nezbytné se podívat na strukturu jádra $\ker(A - (-2)I)$.

$\boxed{\lambda = -2}$

$$A - (-2)I = \begin{pmatrix} -18 & 9 & -18 \\ 6 & -3 & 6 \\ 24 & -12 & 24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

odkud je rovnou vidět, že hodnost matice $A + 2I$ je 1, tudíž $\nu_g(-2) = 3 - 1 = 2$. Jelikož $\nu_g(-2) = \nu_a(-2)$ (a $\nu_g(1) = \nu_a(1)$ z dřívějška), matice A je diagonalizovatelná.

Pokud by nebyla, v tomto bodě bychom skončili (snad kromě ověření $p(A) = 0$). Poněvadž však diagonalizovatelná je, musíme najít vlastní bázi. Vlastní vektory odpovídající vlastní hodnotě -2 snadno najdeme z úpravy matice $A + 2I$ výše, například:

$$u_{(-2),1} := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_{(-2),2} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\lambda = 1}$

$$A - 1I = \begin{pmatrix} -21 & 9 & -18 \\ 6 & -6 & 6 \\ 24 & -12 & 21 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -7 & 3 & -6 \\ 8 & -4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

odkud

$$u_{(1)} := \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Nakonec tedy

$$D := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X := \begin{pmatrix} u_{(-2),1} & u_{(-2),2} & u_{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Alternativně bychom také mohli položit $X := \begin{pmatrix} u_{(-2),2} & u_{(-2),1} & u_{(1)} \end{pmatrix}$, avšak $u_{(1)}$ na jiné místo přemístit nemůžeme (bez přemístění jedničky v D).

Cvičení 2

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ je regulární. Vyšetřete vztah:
(a) spekter A a A^{-1},
(b) algebraických násobností vlastních čísel A a A^{-1},
(c) geometrických násobností vlastních čísel A a A^{-1},
(d) diagonalizovatelnosti A a A^{-1}.

ad (a)

$\boxed{\sigma(A^{-1}) = \sigma(A)^{-1}.}$ Tento vztah interpretujeme ekvivalencí $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \lambda^{-1} \in \sigma(A^{-1})$.

Důkaz. $Au = \lambda u \ \Leftrightarrow\ \lambda^{-1}u = A^{-1}u$, kde využíváme toho, že 0 není ve spektru regulárního operátoru. □

ad (b)

$\boxed{\nu_a(\lambda^{-1}; A^{-1}) = \nu_a(\lambda; A).}$ Zde $\nu_a(\lambda; A)$ značí algebraickou násobnost vlastní hodnoty λ matice A.

Důkaz. Ze vztahu $(\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$

$$A^{-1} - \lambda^{-1}I = \lambda^{-1}\lambda(A^{-1} - \lambda^{-1}I) = \lambda^{-1}(\lambda A^{-1} - I) = \lambda^{-1}A^{-1}A(\lambda A^{-1} - I) = -\lambda^{-1}A^{-1}(A - \lambda I) \tag{6.1}$$

dostáváme

$$\det(A^{-1} - \lambda^{-1}I) = (-\lambda^{-1})^n \det(A^{-1}) \det(A - \lambda I).$$

Charakteristický polynom matice A má strukturu

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{\nu_k},$$

kde $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ a $\nu_j := \nu_a(\lambda_j; A)$ pro $j = 1, \dots, k$. Poněvadž $\nu_1 + \cdots + \nu_k = n$, platí

$$(-\lambda^{-1})^n \det(A - \lambda I) = \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{\nu_1} \dots \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^{\nu_k} = (-1)^n \lambda_1^{\nu_1} \dots \lambda_k^{\nu_k} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_1}\right)^{\nu_1} \dots \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_k}\right)^{\nu_k}.$$

Charakteristický polynom matice A^{-1} má tedy strukturu

$$\det(A^{-1} - \lambda^{-1}I) = (-1)^n \frac{\lambda_1^{\nu_1} \dots \lambda_k^{\nu_k}}{\det A} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_1}\right)^{\nu_1} \dots \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_k}\right)^{\nu_k} = (-1)^n \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_1}\right)^{\nu_1} \dots \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_k}\right)^{\nu_k},$$

kde druhá rovnost využívá vztahu $\det A = \lambda_1^{\nu_1} \dots \lambda_k^{\nu_k}$. Tedy $\nu_a(\lambda_j^{-1}; A^{-1}) = \nu_j$ pro všechna $j = 1, \dots, k$. □

ad (c)

$\boxed{\nu_g(\lambda^{-1}; A^{-1}) = \nu_g(\lambda; A).}$ Zde $\nu_g(\lambda; A)$ značí geometrickou násobnost vlastní hodnoty λ matice A.

Důkaz. Ze vztahu (6.1) plyne rovnost $\ker(A^{-1} - \lambda^{-1}I) = \ker(A - \lambda I)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. □

ad (d)

$\boxed{A^{-1} \text{ diagonalizovatelná } \Leftrightarrow A \text{ diagonalizovatelná.}}$

Důkaz. Plyne z dokázaných vlastností (a)–(c). □

Cvičení 3

Je A^{-1} diagonalizovatelná matice? Pokud ano, najděte regulární X a diagonální D tak, aby $A^{-1} = XDX^{-1}$.

$$A := \begin{pmatrix} -20 & 9 & -18 \\ 6 & -5 & 6 \\ 24 & -12 & 22 \end{pmatrix}.$$

Řešení plyne kombinací cvičení 1(c) a 2. Matice A^{-1} je regulární, poněvadž A je regulární. $\sigma(A^{-1}) = \sigma(A)^{-1} = \{-\frac{1}{2}, 1\}$ a $\nu_a(-\frac{1}{2}) = \nu_g(-\frac{1}{2}) = 2$ a $\nu_g(1) = \nu_g(1) = 1$. Vlastní podprostor matice A odpovídající vlastnímu číslu -2 (resp. 1) je shodný s vlastním podprostorem matice A^{-1} odpovídající vlastnímu číslu $-\frac{1}{2}$ (resp. 1). Tedy

$$D := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 4

Nechť jsou dány matice $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$. Jaký je vztah mezi vlastními čísly a vlastními vektory matic:

(a) A a A^2,
(b) A a $A + \alpha I$, kde $\alpha \in \mathbb{C}$,
(c) A a A^T,
(d) A, B a $A + B$,
(e) A, B a AB,
(f) AB a BA pro A, B regulární.

ad (a)

$\boxed{\lambda \in \sigma(A) \ \Rightarrow\ \lambda^2 \in \sigma(A^2).}$

Důkaz. $Au = \lambda u \ \Rightarrow\ A^2 u = \lambda A u = \lambda^2 u.$ □

$\boxed{\lambda^2 \in \sigma(A^2) \ \Rightarrow\ [\lambda \in \sigma(A) \vee -\lambda \in \sigma(A)].}$

Důkaz. $A^2 u = \lambda^2 u \ \Rightarrow\ (A - \lambda)(A + \lambda)u = (A + \lambda)(A - \lambda)u = 0.$ □

ad (b)

$\boxed{\sigma(A + \alpha I) = \sigma(A) + \alpha.}$ Tento vztah interpretujeme ekvivalencí $\lambda \in \sigma(A) \ \Leftrightarrow\ \lambda + \alpha \in \sigma(A + \alpha I)$.

Důkaz. $(A + \alpha I)u = (\lambda + \alpha)u \ \Leftrightarrow\ Au = \lambda u.$ □

ad (c)

$\boxed{\sigma(A^T) = \sigma(A).}$

Důkaz. $\det(A^T - \lambda I) = \det(A^T - (\lambda I)^T) = \det((A - \lambda I)^T) = \det(A - \lambda I)$. □

ad (d)

$\boxed{\text{Žádný obecný vztah neexistuje.}}$

ad (e)

$\boxed{\text{Žádný obecný vztah neexistuje.}}$ Avšak platí (vlastní hodnoty opakujeme tolikrát, kolik je jejich algebraická násobnost):

$$\text{součin vlastních hodnot } AB \;=\; \text{součin vlastních hodnot } A \;\times\; \text{součin vlastních hodnot } B,$$

poněvadž $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

ad (f)

$\boxed{\sigma(AB) = \sigma(BA).}$

Důkaz. Z identity

$$AB - \lambda I = A(B - \lambda A^{-1}) = A(BA - \lambda I)A^{-1}$$

dostáváme

$$\det(AB - \lambda I) = \det(A)\det(BA - \lambda I)\det(A^{-1}) = \det(BA - \lambda I)\det(A^{-1}A) = \det(BA - \lambda I)\,.$$

Tedy AB a BA mají stejný charakteristický polynom. □

Z důkazu je zřejmé, že stačí, aby pouze jedna z matic A, B byla regulární. Ve skutečnosti platí relace $\sigma(AB) = \sigma(BA)$ v plné obecnosti.

Důkaz (obecný). Nechť je matice $I - AB$ invertibilní. Potom

$$I = (I - AB)(I - AB)^{-1} = (I - AB)^{-1} - AB(I - AB)^{-1},$$

z čehož dostáváme $(I - AB)^{-1} = I + AB(I - AB)^{-1}$. Užitím tohoto vztahu dále dostáváme

$$I + B(I - AB)^{-1}A = I + B[I + AB(I - AB)^{-1}]A = I + BA + BAB(I - AB)^{-1}A\,.$$

Přepišme tento vztah do tvaru

$$\begin{aligned} I &= I + B(I - AB)^{-1}A - BA - BAB(I - AB)^{-1}A \\ &= [I + B(I - AB)^{-1}A] - BA[I + B(I - AB)^{-1}A] \\ &= (I - BA)[I + B(I - AB)^{-1}A]. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že matice $(I - BA)$ je invertibilní a její inverze je rovna $I + B(I - AB)^{-1}A$. Dokázali jsme tudíž tuto obecnou ekvivalenci

$$I - AB \text{ invertibilní} \quad \Leftrightarrow \quad I - BA \text{ invertibilní}. \tag{6.2}$$

Důkaz vztahu $\sigma(AB) = \sigma(BA)$ je pouze jednou z aplikací.

- Nechť $0 \in \sigma(AB)$. Potom

$$0 = \det(AB - 0I) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA - 0I),$$

a tedy $0 \in \sigma(BA)$.

• Nechť $0 \neq \lambda \in \sigma(AB)$. Chceme ukázat, že pak $\lambda \in \sigma(BA)$. Postupujme sporem a předpokládejme, že $\lambda \notin \sigma(BA)$. Potom

$$0 \neq \det(\lambda I - BA) = \lambda^n \det(I - \lambda^{-1} BA),$$

z čehož plyne, že $I - \lambda^{-1} BA$ je invertibilní. Z ekvivalence (6.2) dostáváme, že i $I - \lambda^{-1} AB$ je invertibilní. Potom

$$0 \neq \det(I - \lambda^{-1} AB) = \lambda^{-n} \det(\lambda I - AB),$$

z čehož plyne $\lambda \notin \sigma(AB)$, což je spor. □

Domácí úloha 2

Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je matice $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná?

$$\mathbb{A} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Použijte fakt, že matice je diagonalizovatelná právě tehdy, když má každé vlastní číslo stejnou algebraickou a geometrickou násobnost, a dále nerovnost mezi algebraickou a geometrickou násobností.

$$\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha - \lambda & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 4\alpha)(\lambda^2 - \lambda\alpha - 2\alpha) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\implies \sigma(\mathbb{A}) = \left\{ \pm 2\sqrt{\alpha}, \frac{1}{2}(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha}) \right\}.$$

Zjišťujeme, kdy nemáme 4 různá vlastní čísla:

$$\pm 2\sqrt{\alpha} = \frac{1}{2}(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha}) \quad \text{(platí alespoň 1 ze 4 rovnic)} \iff \alpha = 0 \wedge \alpha = 1$$

nebo

$$2\sqrt{\alpha} = -2\sqrt{\alpha} \iff \alpha = 0$$

nebo

$$\frac{1}{2}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha}) = \frac{1}{2}(\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha}) \iff \alpha = -8.$$

- $\alpha = 0:\quad \sigma(\mathbb{A}) = \{0\},\ \nu_{\mathrm{a}}(0) = 4$

$$\ker(\mathbb{A}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda \implies \nu_{\mathrm{g}}(0) = 2$$

  Nelze diagonalizovat.

- $\alpha = 1:\quad \sigma(\mathbb{A}) = \{\pm 2, -1\},\ \nu_{\mathrm{a}}(2) = 2,\ \nu_{\mathrm{a}}(-2) = 1 = \nu_{\mathrm{g}}(-2),\ \nu_{\mathrm{a}}(-1) = 1 = \nu_{\mathrm{g}}(-1)$

$$\ker(\mathbb{A} - 2\mathbb{I}) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda \implies \nu_{\mathrm{g}}(2) = 2$$

  Lze diagonalizovat.

- $\alpha = -8:\quad \sigma(\mathbb{A}) = \{\pm 4i\sqrt{2}, -4\},\ \nu_{\mathrm{a}}(\pm 4i\sqrt{2}) = 1 = \nu_{\mathrm{g}}(\pm 4i\sqrt{2}),\ \nu_{\mathrm{a}}(-4) = 2$

$$\ker(\mathbb{A} + 4\mathbb{I}) = \ker \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -8 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda \implies \nu_{\mathrm{g}}(-4) = 1$$

  Nelze diagonalizovat.

- $\alpha \notin \{0, 1, -8\}:$ Lze diagonalizovat (čtyři různá vlastní čísla)

Závěr: $\mathbb{A}$ lze diagonalizovat $\iff \alpha \notin \{0, -8\}$.

Domácí úloha 3

Najděte $\mathbb{A}^{10}$ z příkladu 1(a), aniž byste ji opravdu samu se sebou opakovaně násobili.

Využijte znalosti spektra a vlastních vektorů matice.

Ze vztahu $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$ dostaneme

$$
\begin{aligned}
\mathbb{A}^{10} &= (\mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1})^{10} \\
&= \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}\mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}\mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}\mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}\mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}\mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}\mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}\mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}\mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}\mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1} \\
&= \mathbb{X}\mathbb{D}^{10}\mathbb{X}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 + 2^{11} + 3^{10} & -1 + 3^{10} & 2 - 2^{10} - 3^{10} \\ -2 + 2 \cdot 3^{10} & -1 + 2 \cdot 3^{10} & 2 - 2 \cdot 3^{10} \\ -4 + 2^{11} + 2 \cdot 3^{10} & -2 + 2 \cdot 3^{10} & 4 - 2^{10} - 2 \cdot 3^{10} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

7 Vlastní čísla a vlastní vektory operátorů

Cvičení 1

Nechť $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ je operátor zrcadlení podle osy x. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory operátoru A. Je diagonalizovatelný?

Z definice

$$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\}$$

vidíme, že matice zobrazení A vzhledem ke standardní bázi v $\mathbb{R}^2$ má diagonální tvar

$$^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tedy $\sigma(^{\mathcal{E}}A) = \{-1, 1\}$. Poněvadž obě vlastní čísla ± 1 jsou reálná, máme rovněž $\sigma(A) = \{-1, 1\}$. Jelikož spektrum je tvořeno dvěma různými vlastními čísly na dvojrozměrném vektorovém prostoru, je operátor A diagonalizovatelný.

Výsledek můžeme rovněž obdržet čistě geometrickou úvahou. Z definiční rovnosti $Au = \lambda u$ vidíme, že vlastní vektory u zobrazení A jsou charakterizovány podmínkou, že transformovaný vektor Au je násobkem původního (nenulového) vektoru u a násobek je právě vlastní číslo λ. Které vektory v $\mathbb{R}^2$ toto splňují v případě, kde A je zrcadlení podle osy x? Zřejmě e_1, jenž se zrcadlením přetransformuje sám na sebe (tedy $\lambda_1 = 1$), a e_2, jenž se zrcadlením přetransformuje na opačný vektor $-e_2$ (tedy $\lambda_2 = -1$).

Cvičení 2

Nechť $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ je operátor rotace o $\frac{\pi}{2}$ proti směru ručiček hodin. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory operátoru A. Je diagonalizovatelný?

Nejjednodušší je použít geometrickou úvahu výše. Který nenulový vektor v $\mathbb{R}^2$ pootočený o $90°$ je násobkem původního vektoru? Je zřejmé, že žádný takový vektor neexistuje. Tudíž $\sigma(A) = \varnothing$. Poněvadž spektrum A je prázdná množina, není operátor A diagonalizovatelný.

Nyní tento výsledek ověřme i analytickým výpočtem. Z definice

$$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\}$$

vidíme, že matice zobrazení A vzhledem ke standardní bázi v $\mathbb{R}^2$ má tvar

$$^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom

$$p(\lambda) := \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i)$$

má kořeny $\pm i$, tudíž $\sigma(^{\mathcal{E}}A) = \{-i, i\}$. Poněvadž ani jedno z vlastních čísel není reálné, zatímco operátor A funguje na reálném prostoru $\mathbb{R}^2$, dostáváme $\sigma(A) = \varnothing$.

Cvičení 3

Nechť $A \in \mathscr{L}(\mathcal{V}_3)$, $\mathcal{X}$ je báze ve $\mathcal{V}_3$. Je A diagonalizovatelný operátor? Pokud ano, najděte bázi $\mathcal{Y}$ takovou, že ${}^{\mathcal{Y}}A$ je diagonální matice.

(a)

$$^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix},$$

(b)

$$^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ad (a)

V Cvičení 1(a) předchozí kapitolky 6 jsme zjistili, že matice ${}^{\mathcal{X}}A$ je diagonalizovatelná, $\sigma({}^{\mathcal{X}}A) = \{1, 2, 3\}$ a vlastní báze na $\mathbb{C}^3$ je tvořená vektory

$$u_{(1)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad u_{(2)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_{(3)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tedy operátor A na $\mathcal{V}_3$ je diagonalizovatelný, $\sigma(A) = \{1, 2, 3\}$ a báze $\mathcal{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ ve $\mathcal{V}_3$, vzhledem k níž je ${}^{\mathcal{Y}}A$ diagonální matice, je dána vektory

$$(y_1)_{\mathcal{X}} := u_{(1)}, \qquad (y_2)_{\mathcal{X}} := u_{(2)}, \qquad (y_3)_{\mathcal{X}} := u_{(3)}.$$

Platí ${}^{\mathcal{X}}A = Q\ {}^{\mathcal{Y}}A\ Q^{-1}$, kde

$$^{\mathcal{Y}}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad Q = {}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} u_{(1)} & u_{(2)} & u_{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ad (b)

V Cvičení 1(b) předchozí kapitolky 6 jsme zjistili, že matice ${}^{\mathcal{X}}A$ není diagonalizovatelná. Tudíž operátor A na $\mathcal{V}_3$ není diagonalizovatelný.

Cvičení 4

Nechť $A \in \mathscr{L}(\mathcal{V}_3)$, $\mathcal{X}$ je báze ve $\mathcal{V}_3$. Je A^{-1} diagonalizovatelný operátor? Pokud ano, najděte bázi $\mathcal{Y}$ takovou, že ${}^{\mathcal{Y}}(A^{-1})$ je diagonální matice.

$$^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} -20 & 9 & -18 \\ 6 & -5 & 6 \\ 24 & -12 & 22 \end{pmatrix}.$$

V Cvičení 1(c) předchozí kapitolky 6 jsme zjistili, že matice ${}^{\mathcal{X}}A$ je diagonalizovatelná, $\sigma({}^{\mathcal{X}}A) = \{-2, 1\}$ a vlastní báze na $\mathbb{C}^3$ je tvořená vektory

$$u_{(-2),1} := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_{(-2),2} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_{(1)} := \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Podle Cvičení 3 předchozí kapitolky 6 víme, že rovněž $({}^{\mathcal{X}}A)^{-1}$ je diagonalizovatelná matice. Poněvadž $({}^{\mathcal{X}}A)^{-1} = {}^{\mathcal{X}}(A^{-1})$, vidíme, že A^{-1} je diagonalizovatelný operátor, $\sigma(A^{-1}) = \{-\frac{1}{2}, 1\}$ a báze $\mathcal{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ ve $\mathcal{V}_3$, vzhledem k níž je ${}^{\mathcal{Y}}(A^{-1})$ diagonální matice, je dána vektory

$$(y_1)_{\mathcal{X}} := u_{(-2),1}, \qquad (y_2)_{\mathcal{X}} := u_{(-2),2}, \qquad (y_3)_{\mathcal{X}} := u_{(1)}.$$

Platí ${}^{\mathcal{X}}(A^{-1}) = Q\ {}^{\mathcal{Y}}(A^{-1})\ Q^{-1}$, kde

$${}^{\mathcal{Y}}(A^{-1}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q = {}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} u_{(-2),1} & u_{(-2),2} & u_{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 5

Nechť $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$,

$$\mathcal{X} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

je báze $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{E}$ je standardní báze $\mathbb{R}^4$. Je A diagonalizovatelný operátor? Pokud ano, najděte bázi $\mathcal{Y}$ takovou, že ${}^{\mathcal{Y}}A$ je diagonální matice.

$${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Najdříve je potřeba najít matici zobrazení $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ vzhledem ke stejné bázi v prostoru $\mathbb{R}^4$ coby výchozího prostoru a v prostoru $\mathbb{R}^4$ coby cílového prostoru, například

$${}^{\mathcal{X}}A = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{X}} = {}^{\mathcal{E}}I^{\mathcal{X}}\ {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

kde jsme využili formulek

$${}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad {}^{\mathcal{E}}I^{\mathcal{X}} = ({}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{E}})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zbytek je rutinní záležitost. Z charakteristického polynomu

$$p(\lambda) := \det({}^{\mathcal{X}}A - \lambda I) = \lambda^2(\lambda - 1)^2$$

vidíme, že $\sigma(A) = \sigma({}^{\mathcal{X}}A) = \{0, 1\}$ a $\nu_a(0) = 2 = \nu_a(1)$.

$\boxed{\lambda = 0}$

$${}^{\mathcal{X}}A - 0I = {}^{\mathcal{X}}A$$

a poněvadž hodnost matice ${}^{\mathcal{X}}A$ je zřejmě 2, dostáváme $\nu_g(0) = 4 - 2 = 2$. Za odpovídající vlastní vektory lze zvolit například

$$u_{(0),1} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_{(0),2} := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\lambda = 1}$

$$ {}^{\mathcal{X}}A - 1I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} $$

a poněvadž hodnost matice ${}^{\mathcal{X}}A - 1I$ je opět zřejmě 2, dostáváme $\nu_g(1) = 4 - 2 = 2$. Za odpovídající vlastní vektory lze zvolit například

$$ u_{(1),1} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_{(1),2} := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. $$

Matice ${}^{\mathcal{X}}A$ je diagonalizovatelná, poněvadž máme dostatečný počet vlastních vektorů ($\nu_a(0) = \nu_g(0)$ a $\nu_a(1) = \nu_g(1)$). Operátor A je tudíž rovněž diagonalizovatelný a báze $\mathcal{Y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, vzhledem k níž je ${}^{\mathcal{Y}}A$ diagonální matice, splňuje

$$ (y_1)_{\mathcal{X}} := u_{(0),1}, \qquad (y_2)_{\mathcal{X}} := u_{(0),2}, \qquad (y_3)_{\mathcal{X}} := u_{(1),1}, \qquad (y_4)_{\mathcal{X}} := u_{(1),2}. $$

Platí ${}^{\mathcal{X}}A = Q\ {}^{\mathcal{Y}}A\ Q^{-1}$, kde

$$ {}^{\mathcal{Y}}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q = {}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} u_{(0),1} & u_{(0),2} & u_{(1),1} & u_{(1),2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. $$

Cvičení 6

Nechť $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ a $\mathcal{E}$ je standardní báze $\mathbb{R}^4$. Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která je A diagonalizovatelný.

$$ {}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. $$

Z charakteristického polynomu

$$ p(\lambda) := \det({}^{\mathcal{E}}A - \lambda I) = (\lambda + \sqrt{6})(\lambda - \sqrt{6})(\lambda^2 - 4\alpha) $$

vidíme, že $\sigma({}^{\mathcal{X}}A) = \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}, 2\sqrt{\alpha}, -2\sqrt{\alpha}\}$. $\nu_a(\pm\sqrt{6}) = 1$ vždy, zatímco $\nu_a(\pm 2\sqrt{\alpha}) = 1$ pro $\alpha \neq 0$ a $\nu_a(\pm 2\sqrt{\alpha}) = 2$ pro $\alpha = 0$. Poněvadž $\sqrt{\alpha}$ je reálné číslo tehdy a jen tehdy, pokud $\alpha \geq 0$, dostáváme

$$ \sigma(A) = \begin{cases} \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}, -2\sqrt{\alpha}, 2\sqrt{\alpha}\} & \Leftrightarrow\ \alpha \geq 0, \\ \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\} & \Leftrightarrow\ \alpha < 0, \end{cases} $$

a informace o algebraických násobnostech zůstávají stejné.

Okamžitě tedy vidíme, že operátor A není diagonalizovatelný, pokud $\alpha < 0$ (zatímco matice ${}^{\mathcal{X}}A$ za těchto podmínek diagonalizovatelná je), protože máme jen dva vlastní vektory, zatímco vektorový prostor $\mathbb{R}^4$ je čtyřdimenzionální. Zároveň okamžitě vidíme, že operátor A je diagonalizovatelný, pokud $\alpha > 0$, protože pak máme čtyři různé vlastní hodnoty ($\nu_g(\pm 2\sqrt{\alpha}) = 1$ a $\nu_a(\pm 2\sqrt{\alpha}) = 1$). Zbývá vyšetřit vlastní podprostor degenerované vlastní hodnoty 0 v případě $\alpha = 0$.

$\boxed{\lambda = 0 \text{ pro } \alpha = 0}$

$$ {}^{\mathcal{E}}A - 0I = {}^{\mathcal{E}}A $$

a protože hodnost matice ${}^{\mathcal{E}}A$ je 3, dostáváme $\nu_g(0) = 4 - 3 = 1$. Jelikož $\nu_g(0) \neq \nu_a(0)$, matice ${}^{\mathcal{E}}A$ není pro $\alpha = 0$ diagonalizovatelná. Tedy ani operátor A není diagonalizovatelný.

Závěrem:

$$ A \text{ diagonalizovatelný} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 0. $$

Zvídavý student snadno najde odpovídající vlastní vektory

$$u_{(-\sqrt{6}),1} := \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_{(\sqrt{6}),2} := \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_{(-2\sqrt{\alpha}),1} := \begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha} \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad u_{(2\sqrt{\alpha}),2} := \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Přestože jsme je pro řešení úlohy nepotřebovali, je odtud hezky vidět, jak se ze čtyř lineárně nezávislých vektorů pro $\alpha \neq 0$ stanou závislý pro $\alpha = 0$.

Cvičení 7

Nechť $A \in \mathscr{L}(\mathcal{P}_3)$ splňuje $Ax(t) := x(\alpha - 2t)$ pro každé $x \in \mathcal{P}_3$ a každé $t \in \mathbb{C}$. Pro jaká $\alpha \in \mathbb{C}$ je A diagonalizovatelný? Pro taková α najděte $\mathcal{Y}$ bázi $\mathcal{P}_3$ takovou, že ${}^{\mathcal{Y}}A$ je diagonální matice.

Nejdříve najděme matici operátoru A vzhledem ke standardní bázi $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$ v $\mathcal{P}_3$. Poněvadž

$$\begin{aligned}
(Ae_0)(t) &= 1 && = 1e_0(t) + 0e_1(t) + 0e_2(t), \\
(Ae_1)(t) &= \alpha - 2t && = \alpha e_0(t) - 2e_1(t) + 0e_2(t), \\
(Ae_2)(t) &= (\alpha - 2t)^2 = \alpha^2 - 4\alpha t + 4t^2 && = \alpha^2 e_0(t) - 4\alpha e_1(t) + 4e_2(t),
\end{aligned}$$

dostáváme

$${}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & -2 & -4\alpha \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Odtud je rovnou vidět, že $\sigma(A) = \sigma({}^{\mathcal{E}}A) = \{-2, 1, 4\}$. Jelikož se spektrum skládá ze tří různých vlastních hodnot a operátor A funguje na trojrozměrném vektorovém prostoru, je A diagonalizovatelný pro všechna $\alpha \in \mathbb{C}$.

$\boxed{\lambda = -2}$ Z matice

$${}^{\mathcal{E}}A - (-2)I = \begin{pmatrix} 3 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & 0 & -4\alpha \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

snadno najdeme vlastní vektor matice ${}^{\mathcal{E}}A$ odpovídající vlastní hodnotě -2, například

$$u_{(-2)} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\lambda = 1}$ Z matice

$${}^{\mathcal{E}}A - 1I = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & -3 & -4\alpha \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

snadno najdeme vlastní vektor matice ${}^{\mathcal{E}}A$ odpovídající vlastní hodnotě 1, například

$$u_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\lambda = 4}$ Z matice

$${}^{\mathcal{E}}A - 4I = \begin{pmatrix} -3 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & -6 & -4\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

snadno najdeme vlastní vektor matice ${}^{\mathcal{E}}A$ odpovídající vlastní hodnotě 1, například

$$u_{(4)} = \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ -6\alpha \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Báze $\mathcal{Y} = (y_1, y_2, y_3)$, vzhledem k níž je ${}^{\mathcal{Y}}A$ diagonální matice, splňuje

$$(y_1)_{\mathcal{E}} := u_{(-2)}, \qquad (y_2)_{\mathcal{E}} := u_{(1)}, \qquad (y_3)_{\mathcal{E}} := u_{(4)}.$$

Platí ${}^{\mathcal{E}}A = Q\ {}^{\mathcal{Y}}A\ Q^{-1}$, kde

$${}^{\mathcal{Y}}A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad Q = {}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} u_{(-2)} & u_{(1)} & u_{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \alpha^2 \\ -3 & 0 & -6\alpha \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Explicitně

$$y_1(t) = \alpha - 3t, \qquad y_2(t) = 1, \qquad y_3(t) = \alpha^2 - 6\alpha t + 9t^2.$$

Cvičení 8

Nechť $D, S \in \mathscr{L}(\mathcal{P})$ jsou operátory derivování a integrování na $\mathcal{P}$. Najděte spektrum a všechny vlastní vektory D a S.

Poněvadž $Dp = p'$, kde $p \in \mathcal{P}$, rovnice na vlastní čísla $Dp = \lambda p$, kde $\lambda \in \mathbb{C}$, vede na diferenciální rovnici

$$p' = \lambda p,$$

jež má řešení $p(t) = Ce^{\lambda t}$ závisející parametricky na normalizační konstantě $C \in \mathbb{C}$. Aby řešením byl nenulový polynom, nezbytně $C \neq 0$ a $\lambda = 0$. Tedy

$$\sigma(D) = \{0\}$$

a odpovídající vlastní vektory jsou konstantní polynomy (například $p_{(0)}(t) := 1$).

Poněvadž $DS = I$, zapůsobením operátoru D na rovnici na vlastní čísla $Sp = \lambda p$, kde $\lambda \in \mathbb{C}$ a $p \in \mathcal{P}$, dostaneme diferenciální rovnici

$$p = \lambda p',$$

již každý vlastní vektor p a vlastní číslo λ operátoru S musí splňovat. Pro $\lambda = 0$ dostáváme pouze nulový polynom, jenž nemůže být vlastním vektorem. Pro $\lambda \neq 0$ má řešení tvar $p(t) = Ce^{\lambda^{-1}t}$, kde $C \in \mathbb{C}$ je normalizační konstanta, což není polynom pro žádná $\lambda \in \mathbb{C}$ a netriviální $C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tedy

$$\sigma(S) = \varnothing.$$

Cvičení 9

Nechť $A \in \mathscr{L}(\mathcal{P})$ splňuje $Ax(t) := x(t+1)$ pro každé $x \in \mathcal{P}$ a každé $t \in \mathbb{C}$. Najděte spektrum a všechny vlastní vektory A.

Rovnice na vlastní čísla zní

$$\forall t \in \mathbb{C}, \qquad x(t+1) = \lambda x(t), \tag{7.1}$$

kde $x \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ a $\lambda \in \mathbb{C}$. Konstantní polynomy tuto rovnici zjevně splňují s $\lambda = 1$.

Předpokládejme nyní, že x je nenulový polynom stupně $n \geq 2$. Potom x má právě n komplexních kořenů (počítaných včetně násobností) $t_1, \ldots, t_n$. Volbou $t := t_k$ s $k \in \{1, \ldots, n\}$ v rovnici (7.1) dostaneme, že $t_k + 1$ je rovněž kořenem polynomu x. Další volbou $t := t_k + 1$ v (7.1) pak dostaneme, že i $t_k + 2$ je kořenem polynomu x. Opakováním tohoto procesu nakonec dostaneme, že $t_k + m$ je kořenem polynomu x pro všechna $m \in \mathbb{N}$. Polynom x by tedy musel mít nekonečně mnoho kořenů, což je nemožné. Neexistuje tudíž žádný nenulový polynom stupně $n \geq 2$, jenž by vyhovoval rovnici (7.1).

Naše poznatky shrňme do závěru, že

$$\sigma(A) = \{1\}$$

a odpovídající vlastní vektory jsou konstantní polynomy (například $p_{(1)}(t) := 1$).

Domácí úloha 1

Nechť $P, Q \subset\subset V$, $P \neq V$, $Q \neq V$, $P \oplus Q = V$. Nechť A_P je projektor na P podle Q.
(a) Nalezněte $\sigma(A_P)$,
(b) Je-li $\dim V \in \mathbb{N}$, určete algebraickou a geometrickou násobnost vlastních čísel operátoru A_P.
(c) Je operátor A_P diagonalizovatelný v případě $\dim V \in \mathbb{N}$?

Máme rovnici na vlastní čísla

$$A_P\vec{v} = \lambda\vec{v},$$

kde $0 \neq \vec{v} \in V$ nad T a $\lambda \in T$. Díky rozkladu $V = P \oplus Q$ můžeme psát $\vec{v} = \vec{p} + \vec{q}$, kde $\vec{p} \in P$ a $\vec{q} \in Q$ jsou určeny jednoznačně. Rovnice se tedy z vlastností projektoru redukuje na

$$\vec{p} = \lambda(\vec{p} + \vec{q}).$$

Jelikož levá strana leží v P, pravá musí taky. To bude platit buď pokud bude $\lambda = 0$ (v tom případě $\vec{p} = 0$ a $\vec{q} \neq 0$), nebo $\vec{q} = 0$ (a tedy $\lambda = 1$ a $\vec{p} \neq 0$). Spektrum je tedy $\sigma(A_P) = \{0, 1\}$. Zároveň vidíme, že libovolný vektor $0 \neq \vec{q} \in Q$ je vlastní vektor příslušející $\lambda = 0$, proto $\nu_{\mathrm{g}}(0) = \dim Q$. Rovněž libovolný vektor $0 \neq \vec{p} \in P$ je vlastní vektor příslušející $\lambda = 1$, proto $\nu_{\mathrm{g}}(1) = \dim P$. Nakonec s využitím nerovností $\nu_{\mathrm{g}}(\lambda) \leq \nu_{\mathrm{a}}(\lambda)$ a $\nu_{\mathrm{a}}(0) + \nu_{\mathrm{a}}(1) \leq \dim V$ dostáváme $\nu_{\mathrm{a}}(0) = \dim Q$ a $\nu_{\mathrm{a}}(1) = \dim P$.

Domácí úloha 2

Nechť $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$

$$^{\mathcal{E}}\!A := \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

V následujících úlohách využijte teoretické znalosti tak, abyste počítali co nejméně.
(a) Najděte spektrum A a určete, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je A diagonalizovatelný.
(b) Najděte spektrum A^{-1} a určete, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je A^{-1} diagonalizovatelný.

ad (a)

$$\det(A - \lambda I) = \det(^{\mathcal{E}}\!A - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 - \lambda & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - \alpha)(\lambda + 1)(\lambda - 2)^2 \overset{!}{=} 0$$

$$\implies \sigma(A) = \{\alpha, -1, 2\}.$$

Nejprve si všimněme, že pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$\ker(A - 2I) = \ker \begin{pmatrix} \alpha - 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda \implies \nu_{\mathrm{g}}(2) = 2.$$

Musíme vyřešit 3 různé případy:

$\alpha \notin \{-1, 2\}$: $\sigma(A) = \{\alpha, -1, 2\}$, $\nu_{\mathrm{a}}(\alpha) = 1 = \nu_{\mathrm{g}}(\alpha)$, $\nu_{\mathrm{a}}(-1) = 1 = \nu_{\mathrm{g}}(-1)$, $\nu_{\mathrm{a}}(2) = 2 = \nu_{\mathrm{g}}(2)$ $\implies$ Lze diagonalizovat.

$\alpha = 2$: $\sigma(A) = \{-1, 2\}$, $\nu_{\mathrm{a}}(-1) = 1 = \nu_{\mathrm{g}}(-1)$, $\nu_{\mathrm{a}}(2) = 3$, $\nu_{\mathrm{g}}(2) = 2$ $\implies$ Nelze diagonalizovat.

$\alpha = -1:\ \sigma(A) = \{-1, 2\}$, $\nu_{\mathrm{a}}(-1) = 2$, $\nu_{\mathrm{a}}(2) = 2 = \nu_{\mathrm{g}}(2)$,

$$\ker(A + I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda \Longrightarrow \nu_{\mathrm{g}}(-1) = 2 \Longrightarrow \text{Lze diagonalizovat.}$$

Závěr: A lze diagonalizovat $\Longleftrightarrow \alpha \neq 2$.

ad (b)

A^{-1} existuje $\Longleftrightarrow 0 \notin \sigma(A) \Longleftrightarrow \alpha \neq 0$. Jelikož pro A regulární platí

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Longleftrightarrow \lambda^{-1}\vec{x} = A^{-1}\vec{x},$$

dostáváme $\sigma(A^{-1}) = \{\alpha^{-1}, -1, \frac{1}{2}\}$ a $\ker(A - \lambda I) = \ker(A^{-1} - \lambda^{-1} I)$, tedy $\nu_{\mathrm{g}}(\lambda, A) = \nu_{\mathrm{g}}(\lambda^{-1}, A^{-1})$, pro $0 \neq \lambda \in \sigma(A)$. S použitím Poznámky 3.48 ze skript a Příkladu 2 ze souboru vlastní čísla a vlastní vektory operátorů (případně uvědoměním si, že důkaz rovnosti algebraických násobností v Příkladu 2, funguje stejně i pro operátory na V nad $\mathbb{R}$, jejichž charakteristický polynom má pouze reálné kořeny), dostáváme i $\nu_{\mathrm{a}}(\lambda, A) = \nu_{\mathrm{a}}(\lambda^{-1}, A^{-1})$, pro $0 \neq \lambda \in \sigma(A)$. Operátor A^{-1} je tedy diagonalizovatelný $\Longleftrightarrow \alpha \notin \{0, 2\}$.

8 Hermitovské a kvadratické formy I

Sesquilineární forma na $\mathcal{V}$ je funkce $t : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{T}$ taková, že předpis $u \mapsto t(u,v)$ definuje lineární zobrazení pro všechny fixní vektory $v \in \mathcal{V}$ a předpis $v \mapsto t(u,v)$ definuje *antilineární* (či *semilineární*) zobrazení pro všechny fixní vektory $u \in \mathcal{V}$. Antilinearita znamená, že platí aditivita, avšak homogenita platí modulo komplexní sdružení konstant. Latinská předpona *sēsqui* je zkonstruována ze slov *semi* (= "půl") a *que* (= "také") a její význam je "jeden a půl", tedy:

$$\text{sesqui} = 1\tfrac{1}{2}.$$

Tedy t je "skoro" ($= 1\frac{1}{2}$) bilineární zobrazení (z linearity v druhé komponentě platí jen aditivita).

Sesquilineární forma t je *symetrická* (či *hermitovská*), pokud

$$\forall u, v \in \mathcal{V}, \qquad t(u,v) = \overline{t(v,u)}\,.$$

Na reálných vektorových prostorech lze pruh (komplexní sdružení) zřejmě vynechat.

Kvadratická forma na $\mathcal{V}$ odpovídající sesquilineární formě t je zobrazení $t : \mathcal{V} \to \mathbb{T}$ definované předpisem $t[u] := t(u,u)$. Pozor, zde značíme sesquilineární i hermitovskou formu stejným písmenkem, rozdíl je jen v použitých závorkách. Nestandardní hranaté závorky u kvadratické formy mají zdůraznit, že kvadratická forma není lineární zobrazení.

Každé sesquilineární formě zřejmě odpovídá kvadratická forma (definice výše). Na komplexních vektorových prostorech platí i obrácené tvrzení: každé kvadratické formě odpovídá právě jedna sesquilineární forma (polarizační identita), což úzce souvisí s existencí skaláru i. Na reálných vektorových prostorech toto obrácené tvrzení obecně neplatí, avšak platí, pokud je sesquilineární forma symetrická.

Cvičení 1

Nechť $h(x,y) := x_1y_1 + x_2y_2$, kde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ a $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Dokažte, že h je hermitovská forma na $\mathbb{R}^2$.

Linearita v první komponentě. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h(\alpha x + \beta y, z) &= (\alpha x_1 + \beta y_1)z_1 + (\alpha x_2 + \beta y_2)z_2 \\ &= \alpha x_1 z_1 + \beta y_1 z_1 + \alpha x_2 z_2 + \beta y_2 z_2 \\ &= \alpha(x_1 z_1 + x_2 z_2) + \beta(y_1 z_1 + y_2 z_2) \\ &= \alpha h(x,z) + \beta h(y,z). \end{aligned}$$

Antilinearita v druhé komponentě. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h(z, \alpha x + \beta y) &= z_1(\alpha x_1 + \beta y_1) + z_2(\alpha x_2 + \beta y_2) \\ &= \alpha z_1 x_1 + \beta z_1 y_1 + \alpha z_2 x_2 + \beta z_2 y_2 \\ &= \alpha(z_1 x_1 + z_2 x_2) + \beta(z_1 y_1 + z_2 y_2) \\ &= \alpha h(z,x) + \beta h(z,y) \\ &= \overline{\alpha} h(z,x) + \overline{\beta} h(z,y), \end{aligned}$$

kde poslední rovnost platí, protože konstanty α, β jsou reálné.

Symetrie. $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} h(x,y) &= x_1 y_1 + x_2 y_2 \\ &= y_1 x_1 + y_2 x_2 \\ &= \overline{y_1 x_1 + y_2 x_2} \\ &= \overline{h(y,x)}, \end{aligned}$$

kde předposlední rovnost platí, protože souřadnice vektorů x, y jsou reálná čísla.

Poznámka. Antilinearita v druhé komponentě (resp. linearita v první komponentě) plyne z linearity v první komponentě (resp. antilinearity v druhé komponentě) a symetrii. Výše (i níže) tedy ověřujeme zbytečně moc. Důvod je naučit vás pracovat se sesquilineárními formami, jež nejsou nezbytně symetrické.

Cvičení 2

Nechť $h(x,y) := x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}$, kde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ a $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Dokažte, že h je hermitovská forma na $\mathbb{C}^2$.

Linearita v první komponentě. $\forall x, y, z \in \mathbb{C}^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} h(\alpha x + \beta y, z) &= (\alpha x_1 + \beta y_1)\overline{z_1} + (\alpha x_2 + \beta y_2)\overline{z_2} \\ &= \alpha x_1 \overline{z_1} + \beta y_1 \overline{z_1} + \alpha x_2 \overline{z_2} + \beta y_2 \overline{z_2} \\ &= \alpha(x_1\overline{z_1} + x_2\overline{z_2}) + \beta(y_1\overline{z_1} + y_2\overline{z_2}) \\ &= \alpha h(x,z) + \beta h(y,z). \end{aligned}$$

Antilinearita v druhé komponentě. $\forall x, y, z \in \mathbb{C}^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} h(z, \alpha x + \beta y) &= z_1\overline{(\alpha x_1 + \beta y_1)} + z_2\overline{(\alpha x_2 + \beta y_2)} \\ &= z_1(\overline{\alpha}\,\overline{x_1} + \overline{\beta}\,\overline{y_1}) + z_2(\overline{\alpha}\,\overline{x_2} + \overline{\beta}\,\overline{y_2}) \\ &= \overline{\alpha} z_1 \overline{x_1} + \overline{\beta} z_1 \overline{y_1} + \overline{\alpha} z_2 \overline{x_2} + \overline{\beta} z_2 \overline{y_2} \\ &= \overline{\alpha}(z_1\overline{x_1} + z_2\overline{x_2}) + \overline{\beta}(z_1\overline{y_1} + z_2\overline{y_2}) \\ &= \overline{\alpha} h(z,x) + \overline{\beta} h(z,y). \end{aligned}$$

Symetrie. $\forall x, y \in \mathbb{C}^2$,

$$\begin{aligned} h(x,y) &= x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} \\ &= \overline{y_1}x_1 + \overline{y_2}x_2 \\ &= \overline{y_1\overline{x_1} + y_2\overline{x_2}} \\ &= \overline{h(y,x)}. \end{aligned}$$

Cvičení 3

Nechť $h(x,y) := x^T A y$, kde $x, y \in \mathbb{R}^n$ a $A = A^T \in \mathbb{R}^{n,n}$. Dokažte, že h je hermitovská forma na $\mathbb{R}^n$.

Linearita v první komponentě. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h(\alpha x + \beta y, z) &= (\alpha x + \beta y)^T A z \\ &= (\alpha x^T + \beta y^T) A z \\ &= \alpha x^T A z + \beta y^T A z \\ &= \alpha h(x,z) + \beta h(y,z). \end{aligned}$$

Antilinearita v druhé komponentě. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h(z, \alpha x + \beta y) &= z^T A(\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha z^T A x + \beta z^T A y \\ &= \alpha h(z,x) + \beta h(z,y) \\ &= \overline{\alpha} h(z,x) + \overline{\beta} h(z,y), \end{aligned}$$

kde poslední rovnost platí, protože konstanty α, β jsou reálné.

$\boxed{\text{Symetrie.}}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} h(x,y) &= x^T A y \\ &= (y^T A^T x)^T \\ &= y^T A^T x \\ &= y^T A x \\ &= \overline{y^T A x} \\ &= \overline{h(y,x)}, \end{aligned}$$

kde třetí rovnost platí, protože transpozice čísla je to samé číslo, a předposlední rovnost platí, protože souřadnice vektorů x, y a prvky matice A jsou reálná čísla, tudíž $y^T A x$ je reálné číslo.

Cvičení 4

Nechť $h(x,y) := x^T A \overline{y}$, kde $x, y \in \mathbb{C}^n$ a $A = A^* \in \mathbb{C}^{n,n}$. Dokažte, že h je hermitovská forma na $\mathbb{C}^n$.

Zde značíme hvězdičkou hermitovsky sdruženou matici, tedy $A^* = \overline{A}^T = \overline{A^T}$.

$\boxed{\text{Linearita v první komponentě.}}$ $\forall x, y, z \in \mathbb{C}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} h(\alpha x + \beta y, z) &= (\alpha x + \beta y)^T A \overline{z} \\ &= (\alpha x^T + \beta y^T) A \overline{z} \\ &= \alpha x^T A \overline{z} + \beta y^T A \overline{z} \\ &= \alpha h(x,z) + \beta h(y,z). \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Antilinearita v druhé komponentě.}}$ $\forall x, y, z \in \mathbb{C}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} h(z, \alpha x + \beta y) &= z^T A \overline{(\alpha x + \beta y)} \\ &= z^T A (\overline{\alpha}\, \overline{x} + \overline{\beta}\, \overline{y}) \\ &= \overline{\alpha} z^T A \overline{x} + \overline{\beta} z^T A \overline{y} \\ &= \overline{\alpha} h(z,x) + \overline{\beta} h(z,y). \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Symetrie.}}$ $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$,

$$\begin{aligned} h(x,y) &= x^T A \overline{y} \\ &= (\overline{y}^T A^T x)^T \\ &= \overline{y}^T A^T x \\ &= \overline{\overline{\overline{y}^T}\, \overline{A^T}\, \overline{x}} \\ &= \overline{y^T A^* \overline{x}} \\ &= \overline{y^T A \overline{x}} \\ &= \overline{h(y,x)}, \end{aligned}$$

kde třetí rovnost platí, protože transpozice čísla je to samé číslo.

Cvičení 5

Nechť $h : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{C}$, kde pro každé $x, y \in \mathcal{P}$ platí

$$h(x,y) := x(0)\overline{y(1)} + x(1)\overline{y(0)}.$$

Dokažte, že h je hermitovská forma.

Linearita v první komponentě. $\forall x, y, z \in \mathcal{P}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} h(\alpha x + \beta y, z) &= (\alpha x + \beta y)(0)\overline{z(1)} + (\alpha x + \beta y)(1)\overline{z(0)} \\ &= \big(\alpha x(0) + \beta y(0)\big)\overline{z(1)} + \big(\alpha x(1) + \beta y(1)\big)\overline{z(0)} \\ &= \alpha x(0)\overline{z(1)} + \beta y(0)\overline{z(1)} + \alpha x(1)\overline{z(0)} + \beta y(1)\overline{z(0)} \\ &= \alpha\big(x(0)\overline{z(1)} + x(1)\overline{z(0)}\big) + \beta\big(y(0)\overline{z(1)} + y(1)\overline{z(0)}\big) \\ &= \alpha h(x,z) + \beta h(y,z). \end{aligned}$$

Antilinearita v druhé komponentě. $\forall x, y, z \in \mathcal{P}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} h(z, \alpha x + \beta y) &= z(0)\overline{(\alpha x + \beta y)(1)} + z(1)\overline{(\alpha x + \beta y)(0)} \\ &= z(0)\overline{\big(\alpha x(1) + \beta y(1)\big)} + z(1)\overline{\big(\alpha x(0) + \beta y(0)\big)} \\ &= z(0)\big(\overline{\alpha}\,\overline{x(1)} + \overline{\beta}\overline{y(1)}\big) + z(1)\big(\overline{\alpha}\,\overline{x(0)} + \overline{\beta}\overline{y(0)}\big) \\ &= \overline{\alpha}z(0)\overline{x(1)} + \overline{\beta}z(0)\overline{y(1)} + \overline{\alpha}z(1)\overline{x(0)} + \overline{\beta}z(1)\overline{y(0)} \\ &= \overline{\alpha}\big(z(0)\overline{x(1)} + z(1)\overline{x(0)}\big) + \overline{\beta}\big(z(0)\overline{y(1)} + z(1)\overline{y(0)}\big) \\ &= \overline{\alpha}h(z,x) + \overline{\beta}h(z,y). \end{aligned}$$

Symetrie. $\forall x, y \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} h(x,y) &= x(0)\overline{y(1)} + x(1)\overline{y(0)} \\ &= \overline{y(1)}x(0) + \overline{y(0)}x(1) \\ &= \overline{y(0)}x(1) + \overline{y(1)}x(0) \\ &= \overline{y(0)\overline{x(1)} + y(1)\overline{x(0)}} \\ &= \overline{h(y,x)}. \end{aligned}$$

Cvičení 6

Nechť $\mathcal{V}$ je reálný vektorový prostor funkcí definovaných a spojitých na intervalu $[0,1]$. Dokažte, že následující zobrazení je hermitovská forma na $\mathcal{V}$.

$$h(f,g) := \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt \qquad \text{pro každé} \qquad f,g \in \mathcal{V}.$$

Toto cvičení využívá linearitu integrálu, kterou byste měli znát z analýzy.

Linearita v první komponentě. $\forall f, g, k \in \mathcal{V}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h(\alpha f + \beta g, k) &= \int_0^1 (\alpha f + \beta g)(t)\,k(t)\,dt \\ &= \int_0^1 [\alpha f(t) + \beta g(t)]\,k(t)\,dt \\ &= \int_0^1 [\alpha f(t)k(t) + \beta g(t)k(t)]\,dt \\ &= \alpha\int_0^1 f(t)k(t)\,dt + \beta\int_0^1 g(t)k(t)\,dt \\ &= \alpha h(f,k) + \beta h(g,k). \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Antilinearita v druhé komponentě.}}$ $\forall f, g, k \in \mathcal{V},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
h(k, \alpha f + \beta g) &= \int_0^1 k(t)\,(\alpha f + \beta g)(t)\,dt \\
&= \int_0^1 k(t)\,[\alpha f(t) + \beta g(t)]\,dt \\
&= \int_0^1 [\alpha k(t) f(t) + \beta k(t) g(t)]\,dt \\
&= \alpha \int_0^1 k(t) f(t)\,dt + \beta \int_0^1 k(t) g(t)\,dt \\
&= \alpha h(k, f) + \beta h(k, g) \\
&= \overline{\alpha} h(k, f) + \overline{\beta} h(k, g),
\end{aligned}$$

kde poslední rovnost platí, protože konstanty α, β jsou reálné.

$\boxed{\text{Symetrie.}}$ $\forall f, g \in \mathcal{V}$,

$$\begin{aligned}
h(f, g) &= \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt \\
&= \int_0^1 g(t)\,f(t)\,dt \\
&= \overline{\int_0^1 g(t)\,f(t)\,dt} \\
&= \overline{h(g, f)},
\end{aligned}$$

předposlední rovnost platí, protože funkce f, g jsou reálné (a vlastně opět využíváme linearitu integrálu).

Cvičení 7

Nechť $\mathcal{V}_n$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ a $\mathcal{X}$ je báze $\mathcal{V}_n$. Nechť $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ splňuje $A = A^T$. Nechť $h(x, y) := (x)_{\mathcal{X}}^T\, A\, (y)_{\mathcal{X}}$. Dokažte, že h je hermitovská forma.

Toto cvičení je podobné cvičení 3.

$\boxed{\text{Linearita v první komponentě.}}$ $\forall x, y, z \in \mathcal{V}_n,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
h(\alpha x + \beta y, z) &= (\alpha x + \beta y)_{\mathcal{X}}^T\, A\, (z)_{\mathcal{X}} \\
&= \left(\alpha\, (x)_{\mathcal{X}}^T + \beta\, (y)_{\mathcal{X}}^T\right) A\, (z)_{\mathcal{X}} \\
&= \alpha\, (x)_{\mathcal{X}}^T\, A\, (z)_{\mathcal{X}} + \beta\, (y)_{\mathcal{X}}^T\, A\, (z)_{\mathcal{X}} \\
&= \alpha h(x, z) + \beta h(y, z).
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Antilinearita v druhé komponentě.}}$ $\forall x, y, z \in \mathcal{V}_n,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
h(z, \alpha x + \beta y) &= (z)_{\mathcal{X}}^T\, A\, (\alpha x + \beta y)_{\mathcal{X}} \\
&= (z)_{\mathcal{X}}^T\, A \left(\alpha\, (x)_{\mathcal{X}} + \beta\, (y)_{\mathcal{X}}\right) \\
&= \alpha\, (z)_{\mathcal{X}}^T\, A\, (x)_{\mathcal{X}} + \beta\, (z)_{\mathcal{X}}^T\, A\, (y)_{\mathcal{X}} \\
&= \alpha h(z, x) + \beta h(z, y) \\
&= \overline{\alpha} h(z, x) + \overline{\beta} h(z, y),
\end{aligned}$$

kde poslední rovnost platí, protože konstanty α, β jsou reálné.

$\boxed{\text{Symetrie.}}$ $\forall x, y \in \mathcal{V}_n$,

$$\begin{aligned} h(x,y) &= (x)_{\mathcal{X}}^T \, A \, (y)_{\mathcal{X}} \\ &= \big((y)_{\mathcal{X}}^T \, A^T \, (x)_{\mathcal{X}}\big)^T \\ &= (y)_{\mathcal{X}}^T \, A^T \, (x)_{\mathcal{X}} \\ &= (y)_{\mathcal{X}}^T \, A \, (x)_{\mathcal{X}} \\ &= \overline{(y)_{\mathcal{X}}^T \, A \, (x)_{\mathcal{X}}} \\ &= \overline{h(y,x)}, \end{aligned}$$

kde třetí rovnost platí, protože transpozice čísla je to samé číslo, a předposlední rovnost platí, protože souřadnice vektorů x, y a prvky matice A jsou reálná čísla, tudíž $(y)_{\mathcal{X}}^T \, A \, (x)_{\mathcal{X}}$ je reálné číslo.

Cvičení 8

Nechť $\mathcal{V}_n$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{C}$ a $\mathcal{X}$ je báze $\mathcal{V}_n$. Nechť $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ splňuje $A = A^*$. Nechť $h(x,y) := (x)_{\mathcal{X}}^T \, A \, \overline{(y)_{\mathcal{X}}}$. Dokažte, že h je hermitovská forma.

Toto cvičení je podobné cvičení 4.

$\boxed{\text{Linearita v první komponentě.}}$ $\forall x, y, z \in \mathcal{V}_n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} h(\alpha x + \beta y, z) &= (\alpha x + \beta y)_{\mathcal{X}}^T \, A \, \overline{(z)_{\mathcal{X}}} \\ &= \big(\alpha \, (x)_{\mathcal{X}}^T + \beta \, (y)_{\mathcal{X}}^T\big) \, A \, \overline{(z)_{\mathcal{X}}} \\ &= \alpha \, (x)_{\mathcal{X}}^T \, A \, \overline{(z)_{\mathcal{X}}} + \beta \, (y)_{\mathcal{X}}^T \, A \, \overline{(z)_{\mathcal{X}}} \\ &= \alpha h(x,z) + \beta h(y,z). \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Antilinearita v druhé komponentě.}}$ $\forall x, y, z \in \mathcal{V}_n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} h(z, \alpha x + \beta y) &= (z)_{\mathcal{X}}^T \, A \, \overline{(\alpha x + \beta y)_{\mathcal{X}}} \\ &= (z)_{\mathcal{X}}^T \, A \, \overline{\big(\alpha \, (x)_{\mathcal{X}} + \beta \, (y)_{\mathcal{X}}\big)} \\ &= \overline{\alpha} \, (z)_{\mathcal{X}}^T \, A \, \overline{(x)_{\mathcal{X}}} + \overline{\beta} \, (z)_{\mathcal{X}}^T \, A \, \overline{(y)_{\mathcal{X}}} \\ &= \overline{\alpha} h(z,x) + \overline{\beta} h(z,y). \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Symetrie.}}$ $\forall x, y \in \mathcal{V}_n$,

$$\begin{aligned} h(x,y) &= (x)_{\mathcal{X}}^T \, A \, \overline{(y)_{\mathcal{X}}} \\ &= \big(\overline{(y)_{\mathcal{X}}}^T \, A^T \, (x)_{\mathcal{X}}\big)^T \\ &= \overline{(y)_{\mathcal{X}}}^T \, A^T \, (x)_{\mathcal{X}} \\ &= \overline{\overline{\overline{(y)_{\mathcal{X}}}^T} \, \overline{A^T} \, \overline{(x)_{\mathcal{X}}}} \\ &= \overline{(y)_{\mathcal{X}}^T \, A^* \, \overline{(x)_{\mathcal{X}}}} \\ &= \overline{(y)_{\mathcal{X}}^T \, A \, \overline{(x)_{\mathcal{X}}}} \\ &= \overline{h(y,x)}, \end{aligned}$$

kde třetí rovnost platí, protože transpozice čísla je to samé číslo.

Cvičení 9

Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$. Najděte její poláru h, matici ve standardní bázi ${}^{\mathcal{E}}Q$, polární bázi, signaturu, charakter a nulprostor.

Pro $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ definujme
(a) $Q[x] := x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$,
(b) $Q[x] := x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2$,
(c) $Q[x] := 9x_2^2 + 9x_3^2 + 12x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3$,
(d) $Q[x] := -x_3^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$,
(e) $Q[x] := x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

ad (b)

V našem značení je *polára* h hermitovské kvadratické formy Q její odpovídající sesquilineární forma, tedy forma h taková, že $h[x] \equiv h(x,x) = Q[x]$ pro všechny vektory $x \in \mathbb{R}^3$. Od hermitovské kvadratické formy Q k její sesquilineární formě lze v principu přejít použitím polarizační identity. V praxi si však stačí danou kvadratickou formu Q přepsat takovýmto symetrickým způsobem

$$Q[x] := x_1x_1 - 2x_2x_2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1,$$

odkud pak vydedukujeme

$$h(x,y) = x_1y_1 - 2x_2y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1\,.$$

Zkouškou se snadno přesvědčíme, že skutečně $h(x,x) = Q[x]$.

Pro matici ${}^{\mathcal{E}}Q$, kde $\mathcal{E}$ je standardní báze, platí $h(x,y) = x^T\,{}^{\mathcal{E}}Q\,y$. Odtud je rovnou vidět, že (prvek a_{jk} matice ${}^{\mathcal{E}}Q$ je číslo stojící u členu x_jy_k výrazu $h(x,y)$)

$${}^{\mathcal{E}}Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Všimněte si, že $({}^{\mathcal{E}}Q)^T = {}^{\mathcal{E}}Q$.

$\boxed{\text{Spektrální řešení.}}$ Nejelegantnější (i když ne vždy nejjednodušší) způsob, jak zjistit ostatní požadované vlastnosti kvadratické formy Q, je provést spektrální analýzu matice ${}^{\mathcal{E}}Q$:

$$\sigma({}^{\mathcal{E}}Q) = \{-3, 0, 2\}, \qquad u_{(-3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Za polární bázi (není určena jednoznačně!) lze zvolit vlastní bázi $(u_{(-3)}, u_{(0)}, u_{(2)})$. Poněvadž máme jedno kladné vlastní číslo, jedno záporné vlastní číslo a jedno nulové vlastní číslo, je signatura $\operatorname{sg} Q = (1,1,1)$. Jedná se tedy o indefinitní kvadratickou formu. Nulprostor formy h je lineární obal vektorů odpovídajících nulovému vlastnímu číslu, tedy $N_h = \ker {}^{\mathcal{E}}Q = [u_{(0)}]_\lambda$ (forma je singulární).

$\boxed{\text{Standardní řešení.}}$ Od vás očekávané řešení je skrze doplnění na čtverec:

$$\begin{aligned} Q[x] &= x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2 \\ &= x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 \\ &= (x_1 + 2x_2)^2 - 4x_2^2 - 2x_2^2 \\ &= (x_1 + 2x_2)^2 - 6x_2^2 + 0x_3^2. \end{aligned}$$

Dostali jsme jeden kladný kvadrát, jeden záporný kvadrát a jeden nulový kvadrát, tudíž $\operatorname{sg} Q = (1,1,1)$ a jedná se o indefinitní kvadratickou formu. První vektor u polární báze, pro nějž $Q[u] > 0$, dostaneme požadavkem, aby se vynulovaly záporné a nulové kvadráty a kladný kvadrát byl nenulový, což vede na systém $x_2 = 0$ a $x_1 + 2x_2 \neq 0$, tudíž například

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Druhý vektor v polární báze, pro nějž $Q[v] < 0$, dostaneme požadavkem, aby se vynulovaly kladné a nulové kvadráty a záporný kvadrát byl nenulový, což vede na systém $x_2 \neq 0$ a $x_1 + 2x_2 = 0$, tudíž například

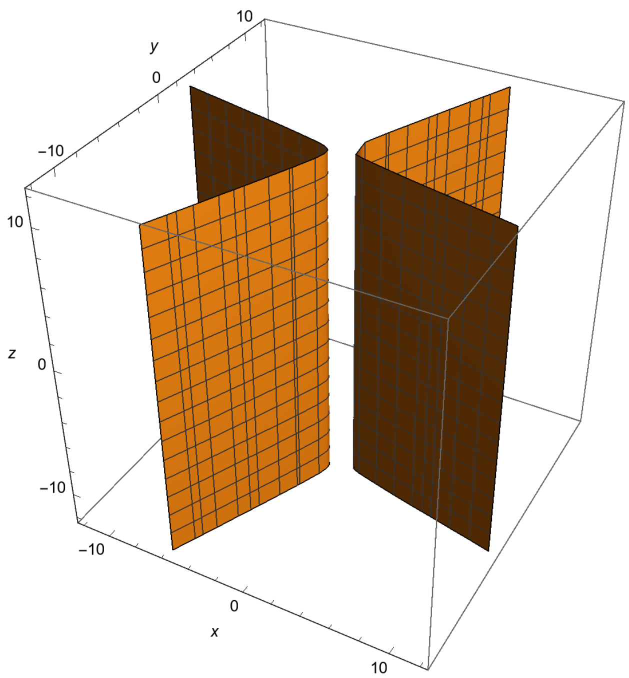
$$v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poslední vektor w polární báze, pro nějž $Q[w] = 0$, dostaneme požadavkem, aby se vynulovaly kladné a záporné kvadráty a vektor byl nenulový, což vede na systém $x_2 = 0$ a $x_1 + 2x_2 = 0$, tudíž například

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Polární báze je tedy například soubor (u, v, w). Zkouškou ověříme, že $h(u, v) = 0$, $h(u, w) = 0$ a $h(v, w) = 0$. Všimněte si, že oproti polární bázi, již jsme dostali spektrální analýzou, tato báze není ortogonální. Nulprostor formy h je lineární obal vektoru polární báze, který odpovídá poslednímu požadavku výše, tedy $N_h = \ker {}^{\mathcal{E}}Q = [w]_\lambda$.

Geometrická interpretace formy Q je kvadrika $\{x \in \mathbb{R}^3 : Q[x] = 1\}$, což je v tomto případě hyperbolický válec (Obrázek 1).



Obrázek 1: Kvadrika odpovídající formě Q, případ (b): hyperbolický válec.

ad (a)

Ze symetrickho zápisu

$$Q[x] := x_1x_1 + 3x_2x_2 + 4x_3x_3 - x_1x_2 - x_2x_1 + 2x_1x_3 + 2x_3x_1 - x_2x_3 - x_3x_2$$

vydedukujeme

$$h(x, y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$$

a

$$^{\mathcal{E}}Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{Spektrální řešení.}}$ Pokusem provést spektrální analýzu zjistíte, proč tato strategie ne vždy vede snadno k cíli (charakteristický polynom vede na řešení kubické rovnice, jež v tomto případě nemá kořeny v hezkém tvaru).

$\boxed{\text{Standardní řešení.}}$ Opět doplnění na čtverec (dvakrát):

$$\begin{aligned} Q[x] &= x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 \\ &= x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 - (-x_2 + 2x_3)^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_2x_3 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + 2\left(x_2 + \frac{x_3}{2}\right)^2 - \frac{x_3^2}{2}. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že $\operatorname{sg}(Q) = (2, 1, 0)$, tudíž se jedná o indefinitní formu a $N_h = \{0\}$ (forma je regulární). První vektor u polární báze, pro nějž $Q[u] > 0$, dostaneme požadavkem, aby se vynuloval záporný kvadrát a druhý kladný kvadrát, zatímco první kladný kvadrát byl nenulový, což vede na systém $x_3 = 0$, $x_2 + x_3/2 = 0$ a $x_1 - x_2 + 2x_3 \neq 0$, tudíž například

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Druhý vektor v polární báze, pro nějž rovněž $Q[v] > 0$, dostaneme požadavkem, aby se vynuloval záporný kvadrát a první kladný kvadrát, zatímco druhý kladný kvadrát byl nenulový, což vede na systém $x_3 = 0$, $x_2 + x_3/2 \neq 0$ a $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$, tudíž například

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poslední vektor w polární báze, pro nějž $Q[w] < 0$, dostaneme požadavkem, aby se vynulovaly kladné kvadráty a záporný kvadrát byl nenulový, což vede na systém $x_3 \neq 0$, $x_2 + x_3/2 = 0$ a $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$, tudíž například

$$w = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Polární báze je tedy například soubor (u, v, w).

Geometrická interpretace formy Q je jednolistý hyperboloid (Obrázek 2).

ad (c)

Stejně jako v předchozích případech snadno najdeme odpovídající sesquilineární formu

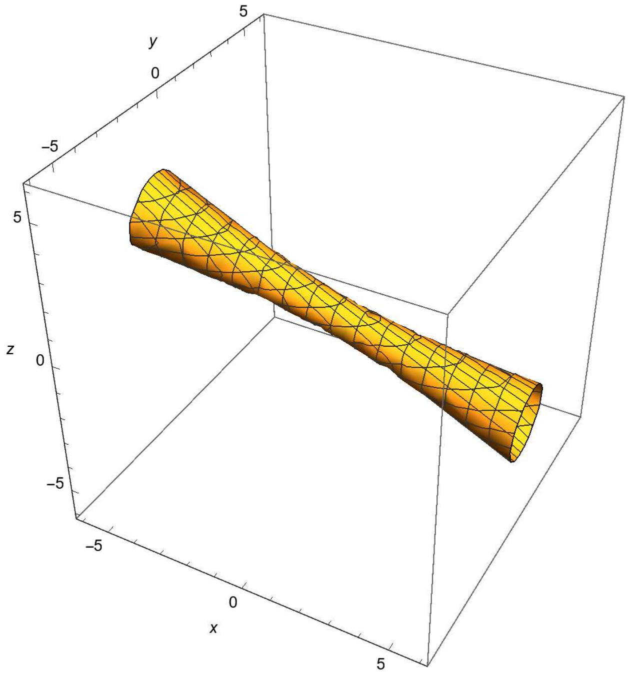
$$h(x, y) = 9x_2y_2 + 9x_3y_3 + 6x_1y_2 + 6x_2y_1 + 6x_1y_3 + 6x_3y_1 - 3x_2y_3 - 3x_3y_2$$

a matici

$$^{\mathcal{E}}Q = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 6 & 9 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{Spektrální řešení.}}$ Spektrální analýzou odhalíme:

$$\sigma(^{\mathcal{E}}Q) = \{-6, 12, 12\}, \qquad u_{(-6)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_{(12),1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_{(12),2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Obrázek 2: Kvadrika odpovídající formě Q, případ (a): jednolistý hyperboloid.

Jedná se tedy o indefinitní formu, $\operatorname{sg} Q = (2,1,0)$ a $N_h = \{0\}$ (forma je regulární). Polární báze je například vlastní báze $(u_{(-6)}, u_{(12),1}, u_{(12),2})$.

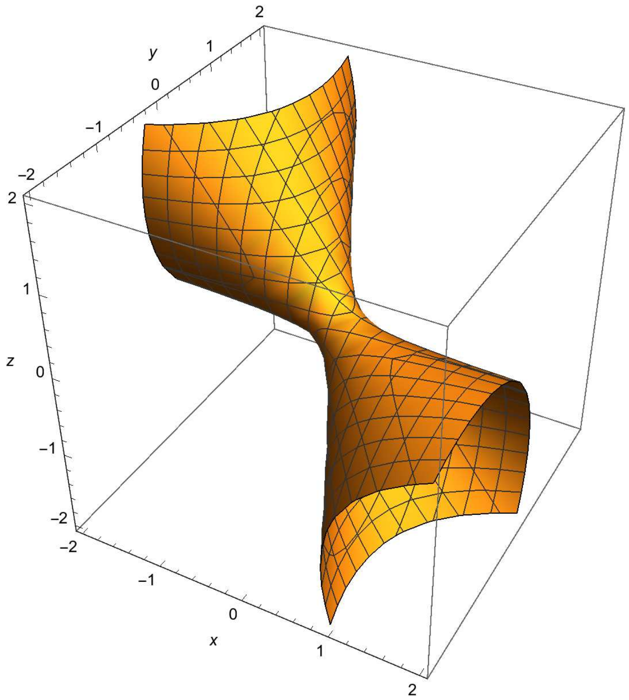
$\boxed{\text{Standardní řešení.}}$ Opět doplnění na čtverec (dvakrát):

$$
\begin{aligned}
Q[x] &= 9x_2^2 + 9x_3^2 + 12x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3 \\
&= 9x_2^2 + 12x_1x_2 - 6x_2x_3 + 9x_3^2 + 12x_1x_3 \\
&= 9\left[x_2^2 + \frac{4}{3}x_1x_2 - \frac{2}{3}x_2x_3\right] + 9x_3^2 + 12x_1x_3 \\
&= 9\left[\left(x_2 + \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3\right)^2 - \left(\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3\right)^2\right] + 9x_3^2 + 12x_1x_3 \\
&= 9\left(x_2 + \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3\right)^2 - 4x_1^2 - x_3^2 + 4x_1x_3 + 9x_3^2 + 12x_1x_3 \\
&= 9\left(x_2 + \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3\right)^2 - 4x_1^2 + 8x_3^2 + 16x_1x_3 \\
&= 9\left(x_2 + \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3\right)^2 + 8x_3^2 + 16x_1x_3 - 4x_1^2 \\
&= 9\left(x_2 + \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3\right)^2 + 8(x_3 + x_1)^2 - 8x_1^2 - 4x_1^2 \\
&= 9\left(x_2 + \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3\right)^2 + 8(x_3 + x_1)^2 - 12x_1^2.
\end{aligned}
$$

Odtud rovněž vidíme, že se jedná o indefinitní formu, $\operatorname{sg} Q = (2,1,0)$ a $N_h = \{0\}$. Polární báze je například

$$
\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \right).
$$

Geometrická interpretace formy Q je jednolistý hyperboloid (Obrázek 3).



Obrázek 3: Kvadrika odpovídající formě Q, případ (c): jednolistý hyperboloid.

ad (d)

Stejně jako v předchozích případech snadno najdeme odpovídající sesquilineární formu

$$h(x,y) = -x_3y_3 - \frac{1}{2}x_1y_2 - \frac{1}{2}x_2y_1 + \frac{1}{2}x_1y_3 + \frac{1}{2}x_3y_1 + \frac{1}{2}x_2y_3 + \frac{1}{2}x_3y_2$$

a matici

$$^{\mathcal{E}}Q = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{Spektrální řešení.}}$ Spektrální analýzou odhalíme:

$$\sigma(^{\mathcal{E}}Q) = \left\{-\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}, \qquad u_{(-3/2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_{(1/2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jedná se tedy o indefinitní formu, $\operatorname{sg} Q = (1,1,1)$ a $N_h = \{u_{(0)}\}$ (forma je singulární). Polární báze je například vlastní báze $(u_{(-3/2)}, u_{(0)}, u_{(1/2)})$.

$\boxed{\text{Standardní řešení.}}$ Opět doplnění na čtverec (dvakrát):

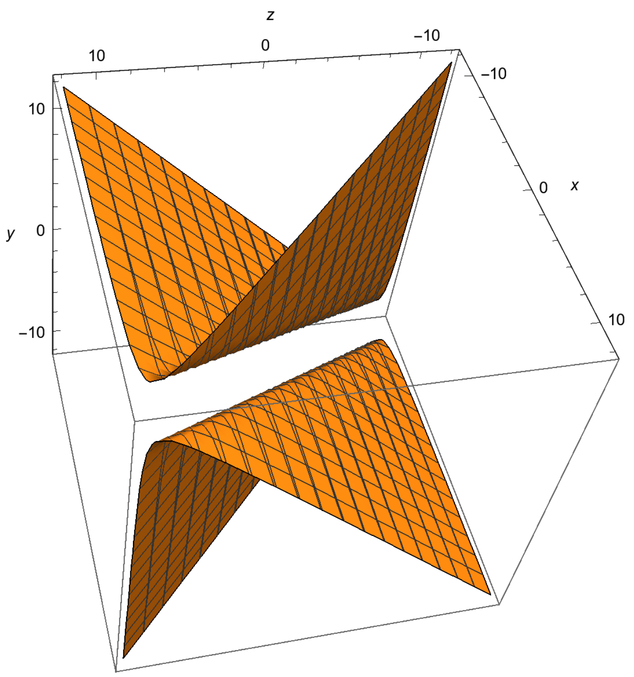
$$\begin{aligned} Q[x] &= -x_3^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ &= -x_3^2 + (x_1+x_2)x_3 - x_1x_2 \\ &= -\left[x_3 - \frac{1}{2}(x_1+x_2)\right]^2 + \frac{1}{4}(x_1+x_2)^2 - x_1x_2 \\ &= -\left[x_3 - \frac{1}{2}(x_1+x_2)\right]^2 + \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 - x_1x_2 \\ &= -\left[x_3 - \frac{1}{2}(x_1+x_2)\right]^2 + \frac{1}{4}\left(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\right) \\ &= -\left[x_3 - \frac{1}{2}(x_1+x_2)\right]^2 + \frac{1}{4}\left(x_1 - x_2\right)^2 + 0x_3^2. \end{aligned}$$

Odtud rovněž vidíme, že se jedná o indefinitní formu a $\operatorname{sg} Q = (1,1,1)$. Polární báze je například

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{a} \qquad N_h = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda .$$

Všimněte si, že nulprostor přirozeně souhlasí s vlastním vektorem $u_{(0)}$, jenž odpovídá nulové vlastní hodnotě. Zbylé prvky báze se však liší.

Geometrická interpretace formy Q je hyperbolický válec (Obrázek 4).



Obrázek 4: Kvadrika odpovídající formě Q, případ (d): hyperbolický válec.

ad (e)

Stejně jako v předchozích případech snadno najdeme odpovídající sesquilineární formu

$$h(x,y) = \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 + \frac{1}{2}x_1y_3 + \frac{1}{2}x_3y_1 + \frac{1}{2}x_2y_3 + \frac{1}{2}x_3y_2$$

a matici

$$^{\mathcal{E}}Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} .$$

$\boxed{\text{Spektrální řešení.}}$ Spektrální analýzou odhalíme:

$$\sigma(^{\mathcal{E}}Q) = \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right\}, \qquad u_{(-1/2),1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_{(-1/2),2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jedná se tedy o indefinitní formu, $\operatorname{sg} Q = (1,2,0)$ a $N_h = \{0\}$ (forma je regulární). Polární báze je například vlastní báze $(u_{(-1/2),1}, u_{(-1/2),2}, u_{(1)})$.

$\boxed{\text{Standardní řešení.}}$ Jak doplnit na čtverec, když nám chybí jakýkoli kvadrát? Vyrobíme si ho! A to například takovouto substitucí

$$\left|\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2 \\ x_2 &= y_1 - y_2 \\ x_3 &= y_3 \end{aligned}\right| \quad \Leftrightarrow \quad \left|\begin{aligned} y_1 &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_2 &= \frac{x_1 - x_2}{2} \\ y_3 &= x_3 \end{aligned}\right|.$$

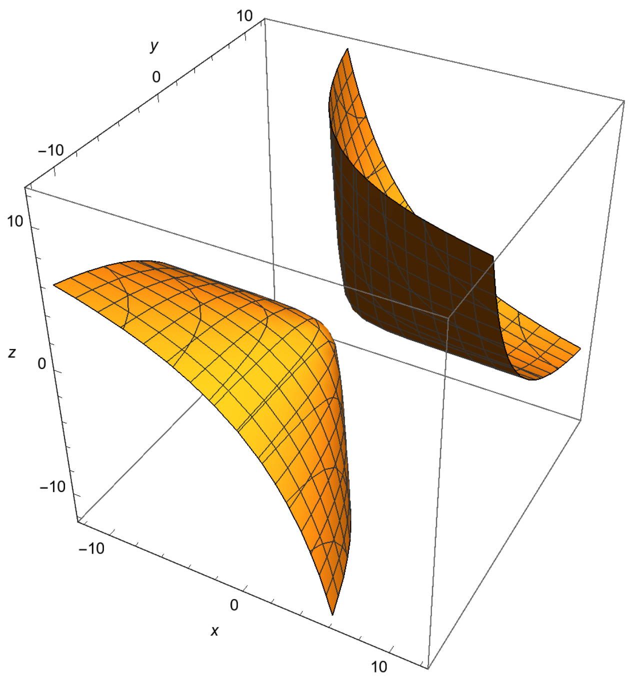
Potom

$$\begin{aligned} Q[x] &= (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + (y_1 + y_2)y_3 + (y_1 - y_2)y_3 \\ &= y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 \\ &= y_1^2 + 2y_1y_3 + y_3^2 - y_3^2 - y_2^2 \\ &= (y_1 + y_3)^2 - y_3^2 - y_2^2 \\ &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2} + x_3\right)^2 - x_3^2 - \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Odtud rovněž vidíme, že se jedná o indefinitní formu a $\operatorname{sg} Q = (1, 2, 0)$ a $N_h = \{0\}$. Polární báze je například

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Geometrická interpretace formy Q je dvojlistý hyperboloid (Obrázek 5).



Obrázek 5: Kvadrika odpovídající formě Q, případ (e): dvojlistý hyperboloid.

Domácí úloha 1

Nechť $h : \mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_3 \to \mathbb{C}$, kde pro každé $x, y \in \mathcal{P}_3$ platí

$$h(x, y) := x(0)\overline{y(1)} + x(1)\overline{y(0)}.$$

Najděte hermitovskou matici, tj. $A = A^*$ tak, aby $h(x, y) = (x)_{\mathcal{E}}^T A\, \overline{(y)_{\mathcal{E}}}$.

Standardní báze $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ splňuje

$$\forall x \in \mathbb{C}, \qquad e_1(x) := 1, \quad e_2(x) := x, \quad e_3(x) := x^2.$$

Tedy

$$\begin{aligned} h(e_1, e_1) &= 2, & h(e_2, e_2) &= 0, & h(e_3, e_3) &= 0, \\ h(e_1, e_2) &= 1, & h(e_1, e_3) &= 1, & h(e_2, e_3) &= 0, \\ h(e_2, e_1) &= 1, & h(e_3, e_1) &= 1, & h(e_3, e_2) &= 0. \end{aligned}$$

(Poslední řádek není potřeba počítat, plyne z druhého řádku pomocí symetrie.) Odtud rovnou můžeme zkonstruovat matici

$$A = \begin{pmatrix} h(e_1, e_1) & h(e_1, e_2) & h(e_1, e_3) \\ h(e_2, e_1) & h(e_2, e_2) & h(e_2, e_3) \\ h(e_3, e_1) & h(e_3, e_2) & h(e_3, e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9 Hermitovské a kvadratické formy II

Cvičení 1

Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$. Najděte její poláru h, matici ve standardní bázi ${}^{\mathcal{E}}Q$, polární bázi, signaturu, charakter a nulprostor.

Pro $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ definujme

(a) $Q[x] := x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$,

(b) $Q[x] := x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2$,

(c) $Q[x] := 9x_2^2 + 9x_3^2 + 12x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3$,

(d) $Q[x] := -x_3^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$,

(e) $Q[x] := x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

Viz cvičení 9 v předchozí kapitolce.

V předchozí kapitolce jsme pro tyto příklady prezentovali standardní řešení pomocí doplnění na čtverec, jakož i spektrální řešení. Paní přednášející nás požádala, abychom vás seznámili ještě s jedním možným postupem, jak najít polární bázi. Demonstrujme si ho na příkladu (b). Můžete si tento postup zkusit aplikovat i na ostatní příklady. Osobně bych doporučoval tento postup používat, jan pokud opravdu rozumíte, jak a proč funguje.

ad (b)

$\boxed{\text{Maticové řešení}}$ Připomeňme tvar matice formy vzhledem ke standardní bázi $\mathcal{E}$:

$$ {}^{\mathcal{E}}Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. $$

Polární báze $\mathcal{A}$ je charakterizována tím, že vzhledem k ní je matice formy ${}^{\mathcal{A}}Q$ diagonální. Poněvadž platí vztah

$$ {}^{\mathcal{A}}Q = ({}^{\mathcal{A}}I^{\mathcal{E}})^T \; {}^{\mathcal{E}}Q \; {}^{\mathcal{A}}I^{\mathcal{E}}, $$

polární báze jsou sloupce matice přechodu ${}^{\mathcal{A}}I^{\mathcal{E}}$. Tuto matici můžeme najít tak, že matici ${}^{\mathcal{E}}Q$ zdiagonalizujeme pomocí současných řádkových a sloupcových úprav a tyto úpravy současně aplikujeme i na jednotkovou matici:

$$ \left({}^{\mathcal{E}}Q, I\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left({}^{\mathcal{A}}Q, {}^{\mathcal{A}}I^{\mathcal{E}}\right). $$

Zde jsme nejdříve k druhému řádku přičetli -2 násobek prvního řádku a pak jsme k druhému sloupci přičetli -2 násobek prvního sloupce. Z výsledku vidíme, že forma je indefinitní a $\operatorname{sg}(Q) = (1, 1, 1)$, protože na diagonále matice ${}^{\mathcal{A}}Q$ je jedno kladné, jedno záporné a jedno nulové číslo, a polární báze jsou odpovídající sloupce matice ${}^{\mathcal{A}}I^{\mathcal{E}}$:

$$ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). $$

Forma Q je singulární a $N_Q = [e_3]_\lambda$, protože vektor e_3 polární báze odpovídá nulovému číslu na diagonále.

Cvičení 2

Nechť Q je kvadratická forma ve $\mathcal{V}_3$ nad $\mathbb{R}$ a $\mathcal{X}$ je báze $\mathcal{V}_3$. Najděte signaturu a polární bázi Q a nulprostor Q. Určete charakter Q (PD, PSD, ND, NSD, indefinitní). Dále určete, zda jde o regulární či singulární formu.

Pro $x \in \mathcal{V}_3$, $(x)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ definujme
(a) $Q[x] := \alpha_1^2 + 3\alpha_2^2 + 4\alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_1\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_3$,
(b) $Q[x] := \alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2$.

Viz cvičení 9 v předchozí kapitolce. Signatura a charakter formy Q na $\mathcal{V}_3$ jsou stejné jako u formy $\tilde{Q}$ generované pravou stranou (vektor o složkách $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) na $\mathbb{R}^3$:

$$Q[x] = (x)_{\mathcal{X}}^T \, {}^{\mathcal{X}}Q \; (x)_{\mathcal{X}} =: \tilde{Q}[\alpha], \qquad \text{kde} \qquad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

U polární báze a nulprostoru je třeba si dát pozor na to, že nalezené vektory ze cvičení 9 v předchozí kapitolce jsou nyní složky abstraktního vektoru x vzhledem k bázi $\mathcal{X}$.

ad (a)

Signatura $\operatorname{sg}(Q) = (2, 1, 0)$, tudíž se jedná o indefinitní formu a $N_Q = \{0\}$ (forma je regulární). Polární báze je soubor (u, v, w), kde

$$(u)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (v)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (w)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

ad (b)

Signatura $\operatorname{sg} Q = (1, 1, 1)$, tudíž se jedná o indefinitní kvadratickou formu a nulprostor je netriviální (forma je singulární). Polární báze je soubor (u, v, w), kde

$$(u)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (v)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (w)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$N_Q = [w]_\lambda$.

Cvičení 3

Nechť Q je kvadratická forma ve $\mathcal{V}_4$ nad $\mathbb{R}$ a $\mathcal{X}$ je báze $\mathcal{V}_4$. Najděte polární bázi Q a nulprostor Q, je-li

$${}^{\mathcal{X}}Q := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Stačí vyšetřit kvadratickou formu $\tilde{Q}$ na $\mathbb{R}^4$, kde

$$\forall x \in \mathbb{R}^4, \qquad \tilde{Q}[x] := x^T \, {}^{\mathcal{X}}Q \, x = x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_3x_4.$$

Spektrální řešení. Spektrální analýzou odhalíme:

$$\sigma({}^{\mathcal{E}}Q) = \{-1, 1, 0, 0\}, \qquad \tilde{u}_{(-1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{u}_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{u}_{(0),1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{u}_{(0),2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jedná se tedy o indefinitní formu a $\operatorname{sg} Q = (1,1,2)$ a $N_Q \neq \{0\}$ (forma je singulární). Polární báze pomocné formy $\tilde{Q}$ na $\mathbb{R}^4$ je například vlastní báze $(\tilde{u}_{(-1)}, \tilde{u}_{(1)}, \tilde{u}_{(0),1}, \tilde{u}_{(0),2})$ a nulprostor $N_{\tilde{Q}} = [\tilde{u}_{(0),1}, \tilde{u}_{(0),2}]_\lambda$. Pro původní formu Q na $\mathcal{V}_4$ to znamená, že polární báze ve $\mathcal{V}_4$ je například soubor $(u_{(-1)}, u_{(1)}, u_{(0),1}, u_{(0),2})$ a $N_Q = [u_{(0),1}, u_{(0),2}]_\lambda$, kde

$$(u_{(-1)})_{\mathcal{X}} := \tilde{u}_{(-1)}, \qquad (u_{(1)})_{\mathcal{X}} := \tilde{u}_{(1)}, \qquad (u_{(0),1})_{\mathcal{X}} := \tilde{u}_{(0),1}, \qquad (u_{(0),2})_{\mathcal{X}} := \tilde{u}_{(0),2}.$$

Standardní řešení. Pro doplnění na čtverec potřebujeme nějaký čtverec mít, tudíž si ho vyrobíme substitucí (viz cvičení 9(e) v předchozí kapitolce)

$$\left| \begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2 \\ x_2 &= y_1 - y_2 \\ x_3 &= y_3 \\ x_4 &= y_4 \end{aligned} \right| \qquad \Leftrightarrow \qquad \left| \begin{aligned} y_1 &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_2 &= \frac{x_1 - x_2}{2} \\ y_3 &= x_3 \\ y_4 &= x_4 \end{aligned} \right| .$$

Potom

$$\begin{aligned} \tilde{Q}[x] &= y_1^2 - y_2^2 + y_1 y_4 + y_2 y_4 + y_1 y_3 - y_2 y_3 + y_3 y_4 \\ &= y_1^2 + y_1(y_4 + y_3) - y_2^2 + y_2(y_4 - y_3) + y_3 y_4 \\ &= \left[y_1 + \frac{1}{2}(y_3 + y_4) \right]^2 - \frac{1}{4}(y_3 + y_4)^2 - \left[y_2 - \frac{1}{2}(y_4 - y_3) \right]^2 + \frac{1}{4}(y_4 - y_3)^2 + y_3 y_4 \\ &= \left[y_1 + \frac{1}{2}(y_3 + y_4) \right]^2 - \left[y_2 - \frac{1}{2}(y_4 - y_3) \right]^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4\right)^2 - \frac{1}{4}\left(x_1 - x_2 + x_3 - x_4\right)^2 + 0x_3^2 + 0x_4^2. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že $\tilde{Q}$, a tudíž Q, je indefinitní forma, $\operatorname{sg} Q = (1,1,2)$ a $N_Q \neq \{0\}$ (forma je singulární). Polární báze pomocné formy $\tilde{Q}$ na $\mathbb{R}^4$ je například soubor $(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d})$, kde

$$\tilde{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nulprostor $N_{\tilde{Q}} = [\tilde{c}, \tilde{d}]_\lambda$, protože vektory $\tilde{c}, \tilde{d}$ jsme vybrali tak, aby $\tilde{Q}[\tilde{c}] = 0x_3^2$ s $x_3 = 1$ a $\tilde{Q}[\tilde{d}] = 0x_4^2$ s $x_4 = 1$, zatímco ostatní kvadráty se vynulovaly. Pro původní formu Q na $\mathcal{V}_4$ to znamená, že polární báze ve $\mathcal{V}_4$ je například soubor (a,b,c,d) a $N_Q = [c,d]_\lambda$, kde

$$(a)_{\mathcal{X}} := \tilde{a}, \qquad (b)_{\mathcal{X}} := \tilde{b}, \qquad (c)_{\mathcal{X}} := \tilde{c}, \qquad (d)_{\mathcal{X}} := \tilde{d}.$$

Cvičení 4

Nechť h je hermitovská forma v $\mathbb{R}^3$, která má ve standardní bázi tvar

$$h(x,y) := 2x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_2 y_2 + 2x_3 y_3.$$

Nechť Q je diagonála h. Najděte $\mathcal{X}$ bázi $\mathbb{R}^3$ tak, aby

$$\text{(a)} \quad {}^{\mathcal{X}}Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

$$\text{(b)} \quad {}^{\mathcal{X}}Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ze zadání formy h rovnou vidíme, že

$$Q[x] = h(x,x) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_3^2.$$

a

$$^{\mathcal{E}}Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

kde $\mathcal{E}$ je standardní báze v $\mathbb{R}^3$.

Poněvadž je matice $^{\mathcal{E}}Q$ hermitovská, víme, že je diagonalizovatelná, a jeden způsob, jak příklad řešit, je provést spektrální analýzu a najít bázi $\mathbb{R}^3$ tvořenou vlastními vektory $^{\mathcal{E}}Q$. To je však v tomto konkrétním případě poněkud komplikované, poněvadž spektrum nevychází v hezkém tvaru.

Pořád však můžeme využít existenci polární báze, kterou je obecně snazší nalézt. Doplněním na čtverec (dvakrát) dostáváme

$$\begin{aligned} Q[x] &= x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2 - x_1^2 + 2x_1^2 + 2x_1x_3 + 2x_3^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 + x_3^2. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že forma Q je pozitivně definitní.

ad (b)

Nemá řešení, protože požadovaná matice $^{\mathcal{X}}Q$ odpovídá formě, jež je pozitivně semidefinitní, což je v rozporu s tím, že naše forma je pozitivně definitní.

ad (a)

V tomto případě je zadání konzistentní. Zbývá najít vhodnou polární bázi. Zvolme vektor u tak, aby $(u_1 - u_2)^2 = 1$, $(u_1 + u_3)^2 = 0$ a $u_3^2 = 0$, tedy například

$$u := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zvolme vektor v tak, aby $(v_1 - v_2)^2 = 0$, $(v_1 + v_3)^2 = 4$ a $v_3^2 = 0$, tedy například

$$v := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nakonec zvolme vektor w tak, aby $(w_1 - w_2)^2 = 0$, $(w_1 + w_3)^2 = 0$ a $w_3^2 = 9$, tedy například

$$w := \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Řešením je tedy například polární báze $\mathcal{X} := (u, v, w)$, poněvadž $Q[u] = 1$, $Q[v] = 4$, $Q[w] = 9$, zatímco $h(u,v) = 0$, $h(u,w) = 0$, $h(v,w) = 0$.

Cvičení 5

Nechť Q je kvadratická forma ve $\mathcal{V}_3$ nad $\mathbb{R}$ a $\mathcal{X}$ je báze $\mathcal{V}_3$. Najděte nulprostor Q.

$$\text{Pro} \quad x \in \mathcal{V}_3, \quad (x)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad \text{definujme} \quad Q[x] := \alpha_1^2 + 3\alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2 - 4\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3.$$

$\boxed{\text{Standardní řešení.}}$ Doplněním na čtverec (dvakrát) dostáváme

$$\begin{aligned} Q[x] &= \alpha_1^2 - 2\alpha_1(\alpha_2 + 2\alpha_3) + 3\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3 \\ &= [\alpha_1 - (\alpha_2 + 2\alpha_3)]^2 - (\alpha_2 + 2\alpha_3)^2 + 3\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3 \\ &= [\alpha_1 - (\alpha_2 + 2\alpha_3)]^2 + 2\alpha_2^2 - 3\alpha_2\alpha_3 - 4\alpha_3^2 \\ &= [\alpha_1 - (\alpha_2 + 2\alpha_3)]^2 + 2\left[\left(\alpha_2 - \frac{3}{4}\alpha_3\right)^2 - \frac{9}{16}\alpha_3^2\right] - 4\alpha_3^2 \\ &= [\alpha_1 - (\alpha_2 + 2\alpha_3)]^2 + 2\left(\alpha_2 - \frac{3}{4}\alpha_3\right)^2 - \frac{41}{8}\alpha_3^2. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že forma Q je indefinitní a $\mathrm{sg}(Q) = (2, 1, 0)$. Tudíž $N_Q = \{0\}$.

$\boxed{\text{Spektrální řešení.}}$ Na $\mathbb{R}^3$ definujme kvadratickou formu

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^3, \qquad \tilde{Q}[\alpha] := \alpha_1^2 + 3\alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2 - 4\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3\,.$$

Vzhledem ke standardní bázi $\mathcal{E}$ v $\mathbb{R}^3$ máme

$${}^{\mathcal{E}}\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & \frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Spektrum matice ${}^{\mathcal{E}}\tilde{Q}$ nevychází v hezkém tvaru, nicméně snadno spočteme determinant

$$\det({}^{\mathcal{E}}\tilde{Q}) = -\frac{41}{4}.$$

Poněvadž je determinant nenulový, nezbytně $0 \notin \sigma({}^{\mathcal{E}}\tilde{Q})$, tudíž je matice ${}^{\mathcal{E}}\tilde{Q}$ regulární. To je ekvivalentní tomu, že forma $\tilde{Q}$ na $\mathbb{R}^3$ je regulární, což je ekvivalentní tomu, že forma Q na $\mathcal{V}_3$ je regulární. Tedy nezbytně $N_Q = \{0\}$.

Domácí úkol 1

Nechť je dána kvadratická forma v $\mathbb{C}^2$. Najděte signaturu a polární bázi Q.

$$Q[x] := |x_1|^2 - i\overline{x_1}x_2 + ix_1\overline{x_2} - |x_2|^2.$$

$\boxed{\text{Spektrální řešení.}}$ Platí

$$Q(x,y) = x^T\ {}^{\mathcal{E}}Q\ \overline{y}, \qquad \text{kde} \qquad {}^{\mathcal{E}}Q = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}.$$

Spektrální analýzou snadno nalezneme

$$\sigma({}^{\mathcal{E}}Q) = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}, \qquad u_{-\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} -i(-1+\sqrt{2}) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} i(1+\sqrt{2}) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Poněvadž spektrum matice ${}^{\mathcal{E}}Q$ obsahuje jednu zápornou a jednu kladnou vlastní hodnotu, je forma Q indefinitní a $\mathrm{sg}(Q) = (1,1,0)$. Polární báze je například vlastní báze $(u_{-\sqrt{2}}, u_{\sqrt{2}})$.

$\boxed{\text{Standardní řešení.}}$ Pro doplnění na čtverec je na komplexním vektorovém prostoru potřeba využít vzoreček

$$\forall a,b \in \mathbb{C}, \qquad |a+b|^2 = |a|^2 + \overline{a}b + a\overline{b} + |b|^2 = |a|^2 + 2\Re(\overline{a}b) + |b|^2. \tag{9.1}$$

V našem případě zvolme například $a := x_1$ a $b := -ix_2$; potom

$$\begin{aligned} Q[x] &= |x_1|^2 - i\overline{x_1}x_2 + ix_1\overline{x_2} + |x_2|^2 - |x_2|^2 - |x_2|^2 \\ &= |x_1 - ix_2|^2 - 2|x_2|^2. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že Q je indefinitní a $\mathrm{sg}(Q) = (1,1,0)$. Za polární bázi lze zvolit například soubor (u,v), kde

$$u := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v := \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Domácí úkol 2

Nechť je dána kvadratická forma v $\mathbb{C}^3$. Najděte signaturu a polární bázi Q.

$$Q[x] := 2|x_1|^2 + x_1\overline{x_3} + \overline{x_1}x_3 - ix_2\overline{x_3} + ix_3\overline{x_2}.$$

$\boxed{\text{Standardní řešení.}}$ Doplněním na čtverec (dvakrát) pomocí formulky (9.1) dostaneme

$$\begin{aligned} Q[x] &= |\sqrt{2}\,x_1|^2 + \sqrt{2}\,x_1\,\overline{\frac{1}{\sqrt{2}}\,x_3} + \overline{\sqrt{2}\,x_1}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,x_3 + \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\,x_3\right|^2 - \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\,x_3\right|^2 - ix_2\overline{x_3} + i\overline{x_2}x_3 \\ &= \left|\sqrt{2}\,x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,x_3\right|^2 - \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\,x_3\right|^2 - ix_2\overline{x_3} + i\,\overline{x_2}x_3 \\ &= \left|\sqrt{2}\,x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,x_3\right|^2 - \frac{1}{2}\left(|x_3|^2 + 2ix_2\overline{x_3} + \overline{2ix_2}x_3 + |2ix_2|^2 - |2ix_2|^2\right) \\ &= \left|\sqrt{2}\,x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,x_3\right|^2 - \frac{1}{2}\left(|x_3 + 2ix_2|^2 - |2ix_2|^2\right) \\ &= \left|\sqrt{2}\,x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,x_3\right|^2 - \frac{1}{2}\,|x_3 + 2ix_2|^2 + 2\,|x_2|^2. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že Q je indefinitní a $\mathrm{sg}(Q) = (2,1,0)$. Za polární bázi lze zvolit například soubor (u,v,w), kde

$$u := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad w := \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -2i \end{pmatrix}.$$

Spektrální řešení. Platí

$$Q(x,y) = x^T\ {}^{\mathcal{E}}Q\ \overline{y}, \qquad \text{kde} \qquad {}^{\mathcal{E}}Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

Spektrální analýza matice ${}^{\mathcal{E}}Q$ je však v tomto případě poněkud komplikovaná (vlastní čísla nevycházejí v hezkém tvaru). Přesto můžeme určit alespoň charakter formy. Snadno spočteme determinant

$$\det({}^{\mathcal{E}}Q) = -2.$$

Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ jsou vlastní čísla matice matice ${}^{\mathcal{E}}Q$. Poněvadž zároveň $\det({}^{\mathcal{E}}Q) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$, rovnou vidíme, že nula není ve spektru ${}^{\mathcal{E}}Q$ a jedno nebo tři vlastní čísla jsou záporná. Tudíž forma určitě není pozitivně definitní, ani pozitivně semidefinitní či negativně semidefinitní. Dále snadno spočteme stopu

$$\operatorname{tr}({}^{\mathcal{E}}Q) = 2.$$

Poněvadž zároveň $\operatorname{tr}({}^{\mathcal{E}}Q) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, rovnou vidíme, že alespoň jedno vlastní číslo musí být kladné. Kombinací s předchozí analýzou pomocí determinantu tedy zjišťujeme (aniž bychom spektrum počítali!), že matice ${}^{\mathcal{E}}Q$ má dvě kladná vlastní čísla a jedno záporné vlastní číslo. Tedy $\operatorname{sg}(Q) = (2,1,0)$ a forma Q je indefinitní.

10 Kvadratické formy a skalární součin

Skalární součin je hermitovská sesquilineární forma, jež je pozitivně definitní. Značíme $\langle\cdot|\cdot\rangle$.

Cvičení 1

Nechť Q je kvadratická forma ve $\mathcal{V}_3$ nad $\mathbb{R}$ a $\mathcal{X}$ je báze $\mathcal{V}_3$. Najděte nulprostor Q.

$$\text{Pro} \quad x \in \mathcal{V}_3, \quad (x)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad \text{definujeme} \quad Q[x] := \alpha_1^2 + 3\alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2 - 4\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3.$$

Viz cvičení 5 v předchozí kapitolce.

Cvičení 2

Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{X} := \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$. Q má v bázi $\mathcal{X}$ tvar

$$Q[x] := \alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_3, \qquad \text{kde} \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (x)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Zjistěte, pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ leží $\begin{pmatrix} 1 \\ 2+\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ v nulprostoru Q.

Platí

$$Q(x,y) = (x)_\mathcal{X}^T \; {}^\mathcal{X}Q \; (y)_\mathcal{X}, \qquad \text{kde} \qquad {}^\mathcal{X}Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odtud rovnou vidíme, že

$$\ker({}^\mathcal{X}Q) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda,$$

což odpovídá podprostoru generovanému vlastním vektorem matice ${}^\mathcal{X}Q$, jenž odpovídá nulové vlastní hodnotě. Tedy, užitím báze $\mathcal{X}$, nacházíme nulprostor

$$N_Q = \ker({}^\mathcal{E}Q) = \left[1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

Zadaný α-závisející vektor bude ležet v tomto nulprostoru tehdy a jen tehdy, pokud $2(2+\alpha) = -1$, čemuž odpovídá právě jedno

$$\alpha = -\frac{5}{2}.$$

Cvičení 3

Nechť Q je kvadratická forma ve $\mathcal{V}_3$ nad $\mathbb{R}$, která má v bázi $\mathcal{X}$ tvar

$$Q[x] := 5\alpha_1^2 + 5\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2\alpha\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_1\alpha_3 + 4\alpha_2\alpha_3, \qquad \text{kde} \quad x \in \mathcal{V}_3, \quad (x)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Určete charakter formy Q v závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Spektrální řešení.}}$ Platí

$$Q(x,y) = (x)_{\mathcal{X}}^T \ {}^{\mathcal{X}}Q \ (y)_{\mathcal{X}}, \qquad \text{kde} \qquad {}^{\mathcal{X}}Q = \begin{pmatrix} 5 & \alpha & 2 \\ \alpha & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Spektrální analýzou matice ${}^{\mathcal{X}}Q$ nalezneme

$$\sigma({}^{\mathcal{X}}Q) = \{\lambda_1(\alpha), \lambda_2(\alpha), \lambda_3(\alpha)\}, \qquad \text{kde} \qquad \begin{aligned} \lambda_1(\alpha) &:= 5 - \alpha, \\ \lambda_2(\alpha) &:= \frac{1}{2}\left(6 + \alpha - \sqrt{48 + 8\alpha + \alpha^2}\right), \\ \lambda_3(\alpha) &:= \frac{1}{2}\left(6 + \alpha + \sqrt{48 + 8\alpha + \alpha^2}\right). \end{aligned}$$

Vlastní hodnota $\lambda_3(\alpha)$ je striktně kladná pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$. Pro ostatní dvě vlastní hodnoty platí

$$\lambda_1(\alpha) \begin{cases} < 0 & \Leftrightarrow \quad \alpha > 5, \\ = 0 & \Leftrightarrow \quad \alpha = 5, \\ > 0 & \Leftrightarrow \quad \alpha < 5, \end{cases} \qquad \lambda_2(\alpha) \begin{cases} < 0 & \Leftrightarrow \quad \alpha < 3, \\ = 0 & \Leftrightarrow \quad \alpha = 3, \\ > 0 & \Leftrightarrow \quad \alpha > 3. \end{cases}$$

Kombinací těchto výsledků nakonec dostáváme:

$$Q \text{ je} \begin{cases} \text{pozitivně definitní} & \Leftrightarrow \quad \alpha \in (3,5), \\ \text{pozitivně semidefinitní} & \Leftrightarrow \quad (\alpha = 3 \ \vee \ \alpha = 5), \\ \text{indefinitní} & \Leftrightarrow \quad \alpha \in (-\infty, 3) \cup (5, \infty). \end{cases}$$

$\boxed{\text{Spektrální řešení II.}}$ Ke stejnému závěru lze dospět i následujícím způsobem, bez nutnosti výpočtu vlastních hodnot. Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ jsou vlastní čísla matice matice ${}^{\mathcal{X}}Q$. Snadno spočteme determinant a stopu:

$$\det({}^{\mathcal{X}}Q) = -(\alpha - 3)(\alpha - 5) \qquad \text{a} \qquad \operatorname{tr}({}^{\mathcal{X}}Q) = 11.$$

Zároveň platí $\det({}^{\mathcal{X}}Q) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ a $\operatorname{tr}({}^{\mathcal{X}}Q) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. Z kladnosti stopy pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ víme, že jedna vlastní hodnota matice ${}^{\mathcal{X}}Q$ je striktně kladná pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$. Ze závislosti determinantu na α pak vidíme, že ostatní dvě vlastní hodnoty budou striktně kladné tehdy a jen tehdy, pokud $\alpha \in (3,5)$, což odpovídá tomu, že forma Q je pozitivně definitní. Zároveň, pokud $\alpha \notin [3,5]$, právě jedna vlastní hodnota bude striktně záporná, zatímco ostatní dvě striktně kladné, což odpovídá tomu, že forma Q je indefinitní. Nakonec, pokud $\alpha = 3$ nebo $\alpha = 5$, pak z nulovosti determinantu plyne, že existuje alespoň jedna nulová vlastní hodnota. Pokud existují dvě nulové (čemuž ve skutečnosti nedochází, viz explicitní formulky pro vlastní čísla výše), pak je forma Q pozitivně semidefinitní (poněvadž třetí je vždy striktně kladná). Pokud existuje pouze jedna nulová vlastní hodnota (čemuž skutečně dochází, viz explicitní formulky pro vlastní čísla výše), pak by hypoteticky mohl nastat případ, že zbylé dvě vlastní hodnoty budou mít rozdílná znaménka (čemuž ve skutečnosti nedochází, viz explicitní formulky pro vlastní čísla výše), avšak tento případ lze vyloučit pomocí spojité závislosti determinantu na α jeho striktní kladnosti pro $\alpha \in (3,5)$.

$\boxed{\text{Standardní řešení.}}$ Doplněním na čtverec (dvakrát) dostáváme

$$\begin{aligned} Q[x] &= \alpha_3^2 + 4\alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2) + 5\alpha_1^2 + 5\alpha_2^2 + 2\alpha\alpha_1\alpha_2 \\ &= [\alpha_3 + 2(\alpha_1 + \alpha_2)]^2 - 4(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + 5\alpha_1^2 + 5\alpha_2^2 + 2\alpha\alpha_1\alpha_2 \\ &= [\alpha_3 + 2(\alpha_1 + \alpha_2)]^2 + \alpha_1^2 + 2(\alpha - 4)\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 \\ &= [\alpha_3 + 2(\alpha_1 + \alpha_2)]^2 + [\alpha_1 + (\alpha - 4)\alpha_2]^2 - (\alpha - 4)^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2 \\ &= [\alpha_3 + 2(\alpha_1 + \alpha_2)]^2 + [\alpha_1 + (\alpha - 4)\alpha_2]^2 + (-\alpha^2 + 8\alpha - 15)\alpha_2^2 \\ &= [\alpha_3 + 2(\alpha_1 + \alpha_2)]^2 + [\alpha_1 + (\alpha - 4)\alpha_2]^2 - (\alpha - 3)(\alpha - 5)\alpha_2^2. \end{aligned}$$

Odtud rovnou vidíme, že forma Q je: pozitivně semidefinitní tehdy a jen tehdy, pokud $\alpha = 3$ nebo $\alpha = 5$; pozitivně definitní tehdy a jen tehdy, pokud $\alpha \in (3,5)$; indefinitní tehdy a jen tehdy, pokud $\alpha \notin [3,5]$.

Cvičení 4

Nechť Q je kvadratická forma ve $\mathcal{V}_3$ nad $\mathbb{R}$, která má v bázi $\mathcal{X}$ tvar

$$Q[x] := \alpha\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 + (\alpha+1)\alpha_3^2 - 2\alpha\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_2\alpha_3, \qquad \text{kde} \quad x \in \mathcal{V}_3, \quad (x)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Najděte $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby
(a) Q byla PD (= pozitivně definitní),
(b) Q byla singulární.

$\boxed{\text{Spektrální řešení.}}$ Platí

$$Q(x,y) = (x)_{\mathcal{X}}^T \, {}^{\mathcal{X}}Q \; (y)_{\mathcal{X}}, \qquad \text{kde} \qquad {}^{\mathcal{X}}Q = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -2 & 1 \\ -\alpha & 1 & \alpha+1 \end{pmatrix}.$$

Snadno spočteme determinant a stopu:

$$\det({}^{\mathcal{X}}Q) = -\alpha(\alpha^2 - \alpha + 3) \qquad \text{a} \qquad \operatorname{tr}({}^{\mathcal{X}}Q) = 2\alpha - 1.$$

Determinant je nulový tehdy a jen tehdy, pokud $\alpha = 0$, což odpovídá situaci, kdy forma Q je singulární. Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ jsou vlastní čísla matice matice ${}^{\mathcal{X}}Q$. Platí $\det({}^{\mathcal{X}}Q) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ a $\operatorname{tr}({}^{\mathcal{X}}Q) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. Aby forma Q byla pozitivně definitní, všechny vlastní hodnoty musí být striktně kladné, tudíž nezbytně musí platit $\det({}^{\mathcal{X}}Q) > 0$ ($\Leftrightarrow \alpha < 0$) a $\operatorname{tr}({}^{\mathcal{X}}Q) > 0$ ($\Leftrightarrow \alpha > 1/2$), avšak žádné takové α neexistuje, tudíž neexistuje α takové, aby forma Q byla pozitivně definitní.

$\boxed{\text{Standardní řešení.}}$ Doplněním na čtverec (dvakrát) dostáváme

$$\begin{aligned}
Q[x] &= \alpha\left[\alpha_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_1\alpha_3\right] - 2\alpha_2^2 + (\alpha+1)\alpha_3^2 + 2\alpha_2\alpha_3 \\
&= \alpha\left[\alpha_1 - (\alpha_2+\alpha_3)\right]^2 - \alpha(\alpha_2+\alpha_3)^2 - 2\alpha_2^2 + (\alpha+1)\alpha_3^2 + 2\alpha_2\alpha_3 \\
&= \alpha\left[\alpha_1 - (\alpha_2+\alpha_3)\right]^2 + \alpha_3^2 + 2(1-\alpha)\alpha_2\alpha_3 - (2+\alpha)\alpha_2^2 \\
&= \alpha\left[\alpha_1 - (\alpha_2+\alpha_3)\right]^2 + \left[\alpha_3 + (1-\alpha)\alpha_2\right]^2 - (1-\alpha)^2\alpha_2^2 - (2+\alpha)\alpha_2^2 \\
&= \alpha\left[\alpha_1 - (\alpha_2+\alpha_3)\right]^2 + \left[\alpha_3 + (1-\alpha)\alpha_2\right]^2 - (\alpha^2 - \alpha + 3)\alpha_2^2.
\end{aligned}$$

Poněvadž $\alpha^2 - \alpha + 3 > 0$ pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, forma Q není pozitivně definitní pro jakoukoli volbu α. Forma Q je singulární tehdy a jen tehdy, pokud $\alpha = 0$.

Cvičení 5

V $\mathbb{R}^2$ definujeme zobrazení

$$\langle x|y\rangle := x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1, \qquad \text{kde} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Je to skalární součin?

ANO.

$(x,y) \mapsto \langle x|y\rangle$ je symetrická sesquilineární forma na $\mathbb{R}^2$. Bude se jednat o skalární součin tehdy a jen tehdy, pokud se jedná o pozitivně definitní formu.

$\boxed{\text{Spektrální řešení.}}$ Platí

$$\langle x|y\rangle = x^T A\, y, \qquad \text{kde} \qquad A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bude se jednat o pozitivně definitní formu tehdy a jen tehdy, pokud všechny vlastní hodnoty matice A jsou striktně kladné. Snadno najdeme spektrum

$$\sigma(A) = \left\{ \frac{1}{2}(3-\sqrt{5}), \frac{1}{2}(3+\sqrt{5}) \right\},$$

odkud rovnou vidíme ($\sqrt{5} < 3$), že se vskutku jedná o skalární součin.

Standardní řešení. Vezmeme odpovídající kvadratickou formu a doplníme na čtverec:

$$\begin{aligned} \langle x|x\rangle &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 \\ &= (x_1+x_2)^2 - x_2^2 + 2x_2^2 \\ &= (x_1+x_2)^2 + x_2^2, \end{aligned}$$

odkud rovnou vidíme, že se jedná o pozitivně definitní formu, tedy o skalární součin.

Cvičení 6

V $\mathcal{P}$ definujme

$$\langle x|y\rangle := x(0)\,\overline{y(0)} + x(1)\,\overline{y(1)} + x(2)\,\overline{y(2)}.$$

Je to skalární součin?

NE.

$(x, y) \mapsto \langle x|y\rangle$ je hermitovská forma na $\mathcal{P}$ (viz cvičení 5 kapitolky 8). Avšak není splněna pozitivní definitnost: Existuje nenulový polynom $p \in \mathcal{P}$ takový, že $\langle p|p\rangle = 0$. Například

$$p(t) := t(t-1)(t-2), \qquad t \in \mathbb{C}.$$

(Bude se však jednat o skalární součin na prostoru $\mathcal{P}_3$, protože polynom druhého či nižšího stupně nemůže mít tři různé kořeny.)

Cvičení 7

Nechť $\mathcal{V}$ je reálný vektorový prostor funkcí definovaných a spojitých na intervalu $[0, 1]$. Dokažte, že následující zobrazení je skalární součin na $\mathcal{V}$.

$$h(f, g) := \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt \qquad \text{pro každé} \qquad f, g \in \mathcal{V}.$$

h je hermitovská forma na $\mathcal{P}$ (viz cvičení 5 kapitolky 8). Zbývá ukázat, že se jedná o pozitivně definitní formu. Poněvadž

$$h[f] = h(f, f) = \int_0^1 |f(t)|^2\,dt \geq 0,$$

forma je pozitivně definitní nebo pozitivně semidefinitní. Zbývá ukázat, že druhý případ nenastává, tedy $h[f] = 0 \;\Rightarrow\; f = 0$. Nechť $h[f] = 0$. Pak $f(t) = 0$ pro všechna $t \in [0, 1]$. Tedy f je nulová funkce, což bylo dokázati.

Cvičení 8

V $\mathbb{R}^3$ definujeme skalární součin

$$\langle x|y\rangle := 4x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1.$$

Najděte všechny vektory kolmé na e_1.

Nechť $x \in \mathbb{R}^3$ je libovolný vektor. Požadovaná podmínka ortogonality znamená $\langle x|e_1\rangle = 0$, což po dosazení zadaného skalárního součinu dává identitu

$$4x_1 1 + x_2 0 + x_3 0 + x_1 0 + x_2 0 = 4x_1 + x_2 = 0.$$

Tedy libovolný vektor $x \in \mathbb{R}^3$ kolmý na e_1 splňuje

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ -4x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

kde $x_1, x_3 \in \mathbb{R}$ jsou libovolná čísla. Závěr tedy zní

$$\left\{x \in \mathbb{R}^3 : x \perp e_1\right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_\lambda,$$

což je dvojdimenzionální podprostor.

(Všimněte si, že v případě standardního (eukleidovského) skalárního součinu bychom dostali očekávatelný výsledek $\left\{x \in \mathbb{R}^3 : x \perp e_1\right\} = [e_2, e_3]_\lambda$, v tomto cvičení však úhly a vzdálenosti měříme nestandardně.)

Cvičení 9

V unitárním prostoru $\mathbb{C}^2$ najděte dvě různé ON (=ortonormální) báze.

Vtipný student zvolí standardní bázi (e_1, e_2) a její permutaci (e_2, e_1). My, méně vtipní, zvolme však něco méně triviálního, například

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{a} \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Domácí úkol 1

Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$.

$$Q[x] := (\alpha+1)x_1^2 + (\alpha+2)x_2^2 + x_3^2 - 2\alpha x_1 x_2 - 2x_1 x_3, \qquad \text{kde} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$

(a) určete signaturu,

(b) vyšetřete nulprostor,

(c) najděte polární bázi $\mathcal{A}$ formy Q tak, aby

$$^{\mathcal{A}}Q = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{Spektrální řešení.}}$ Platí

$$Q(x,y) = x^T\, {}^{\mathcal{E}}Q\, y = \langle x | {}^{\mathcal{E}}Q\, y \rangle, \qquad \text{kde} \qquad {}^{\mathcal{E}}Q = \begin{pmatrix} 1+\alpha & -\alpha & -1 \\ -\alpha & 2+\alpha & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde $\langle\cdot|\cdot\rangle$ je standardní (eukleidovský) skalární součin na $\mathbb{R}^3$. Najdeme spektrum

$$\sigma({}^{\mathcal{E}}Q) = \{2, \lambda_1(\alpha), \lambda_2(\alpha)\}, \qquad \begin{aligned} \lambda_1(\alpha) &:= 1+\alpha - \sqrt{1+\alpha+\alpha^2}, \\ \lambda_2(\alpha) &:= 1+\alpha + \sqrt{1+\alpha+\alpha^2}, \end{aligned}$$

a odpovídající vlastní vektory

$$u_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_{(\lambda_1(\alpha))} = \begin{pmatrix} -\alpha + \sqrt{1+\alpha+\alpha^2} \\ 1+\alpha - \sqrt{1+\alpha+\alpha^2} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_{(\lambda_2(\alpha))} = \begin{pmatrix} -\alpha - \sqrt{1+\alpha+\alpha^2} \\ 1+\alpha + \sqrt{1+\alpha+\alpha^2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Poněvadž matice ${}^{\mathcal{E}}Q$ je hermitovská, *a priori* víme, že vlastní vektory tvoří ortogonální bázi $\mathbb{R}^3$. Vektor $u_{(2)}$ jsme normalizovali na jedničku (tedy tak, aby $\|u_{(2)}\| = 1$), zatímco ostatní vektory necháváme nenormalizované.

Vlastní hodnoty 2 a $\lambda_2(\alpha)$ jsou striktně kladné pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, zatímco

$$\lambda_1(\alpha) \begin{cases} < 0 & \Leftrightarrow \quad \alpha < 0, \\ = 0 & \Leftrightarrow \quad \alpha = 0, \\ > 0 & \Leftrightarrow \quad \alpha > 0. \end{cases}$$

V důsledku toho rovnou vyřešíme úlohu (a):

$$\operatorname{sg}(Q) = \begin{cases} (2,1,0) & \Leftrightarrow \quad \alpha < 0, \\ (2,0,1) & \Leftrightarrow \quad \alpha = 0, \\ (3,0,0) & \Leftrightarrow \quad \alpha > 0. \end{cases}$$

Pro úlohu (b) navíc potřebujeme znalost vlastního vektoru, jenž odpovídá vlastní hodnotě $\lambda_1(\alpha)$:

$$N_Q = \begin{cases} \{0\} & \Leftrightarrow \quad \alpha \neq 0, \\ [u_{(\lambda_1(0))}]_\lambda = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda & \Leftrightarrow \quad \alpha = 0, \end{cases}$$

(alternativně bychom našli $\ker({}^{\mathcal{E}}Q)$).

Pro vyřešení úlohy (c) si nejdříve uvědomme, že nezbytná podmínka pro dosažení požadovaného tvaru matice ${}^{\mathcal{A}}Q$ je, že $\alpha < 0$ (jinak máme tři nezáporná vlastní čísla). To je i postačující podmínka, poněvadž, když $\alpha < 0$, pak máme právě jednu zápornou vlastní hodnotu ($\lambda_1(\alpha)$), dvě kladné vlastní hodnoty (2 a $\lambda_2(\alpha)$) a soubor $\mathcal{A}' := (u_{(\lambda_1(\alpha))}, u_{(\lambda_2(\alpha))}, u_{(2)})$ tvořený odpovídajícími vlastními vektory je báze $\mathbb{R}^3$, tudíž matice ${}^{\mathcal{E}}Q$ je diagonalizovatelná. Nechť tedy $\alpha < 0$. Platí

$$ {}^{\mathcal{E}}Q = S'\,D'\,S'^{-1}, \qquad \text{kde} \qquad D' := \begin{pmatrix} \lambda_1(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad S' := \big(u_{(\lambda_1(\alpha))}, u_{(\lambda_2(\alpha))}, u_{(2)}\big)\,, $$

kde $\lambda_1(\alpha) < 0$ a $\lambda_2(\alpha) > 0$. Bez ohledu na tento diagonalizační vztah, užitím rovnosti $Q(x,y) = \langle x|{}^{\mathcal{E}}Q\,y\rangle$, ortogonality vlastních vektorů a normalizace vektoru $u_{(2)}$ dostáváme

$$ {}^{\mathcal{A}'}Q = \begin{pmatrix} \lambda_1(\alpha)\|u_{(\lambda_1(\alpha))}\|^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(\alpha)\|u_{(\lambda_2(\alpha))}\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. $$

Vidíme, že $\mathcal{A}'$ je "téměř" hledaná báze: Znaménka prvků matice ${}^{\mathcal{A}'}Q$ jsou v pořádku, ale požadované číselné hodnoty prvků $({}^{\mathcal{A}'}Q)_{11}$ a $({}^{\mathcal{A}'}Q)_{22}$ nesedí (a to, současně, pro žádné hodnoty $\alpha < 0$). Hledanou bázi je možné najít vhodnou normalizací

$$ \mathcal{A} := \big(a u_{(\lambda_1(\alpha))}, b u_{(\lambda_2(\alpha))}, u_{(2)}\big)\,, $$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou hledané normalizační konstanty. Užitím vztahu $Q(x,y) = \langle x|{}^{\mathcal{E}}Q\,y\rangle$, ortogonality vlastních vektorů a normalizace vektoru $u_{(2)}$ dostáváme

$$ {}^{\mathcal{A}}Q = \begin{pmatrix} \lambda_1(\alpha)\,a^2\|u_{(\lambda_1(\alpha))}\|^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(\alpha)\,b^2\|u_{(\lambda_2(\alpha))}\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. $$

Stačí tudíž zvolit, například,

$$ a := \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{|\lambda_1(\alpha)|}\,\|u_{(\lambda_1(\alpha))}\|}, \qquad b := \frac{1}{\sqrt{\lambda_2(\alpha)}\,\|u_{(\lambda_2(\alpha))}\|} $$

Nakonec tedy

$$ \mathcal{A} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{|\lambda_1(\alpha)|}} \frac{u_{(\lambda_1(\alpha))}}{\|u_{(\lambda_1(\alpha))}\|}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{|\lambda_2(\alpha)|}} \frac{u_{(\lambda_2(\alpha))}}{\|u_{(\lambda_2(\alpha))}\|}, u_{(2)} \right). $$

$\boxed{\text{Standardní řešení.}}$

$$ Q(\vec{x}) = (\alpha+1)x_1^2 + (\alpha+2)x_2^2 + x_3^2 - 2\alpha x_1 x_2 - 2x_1 x_3 = \alpha(x_1-x_2)^2 + (x_1-x_3)^2 + 2x_2^2 $$

ad (a)

Signatura je tedy

$$ \operatorname{sg}(Q) = \begin{cases} (3,0,0) \iff \alpha > 0 \\ (2,0,1) \iff \alpha = 0 \\ (2,1,0) \iff \alpha < 0. \end{cases} $$

ad (b)

Pokud $\alpha \neq 0$, nulprostor je nulový vektorový prostor. Dále vidíme, že pokud $\alpha = 0$, vektory, které se zobrazí kvadratickou formou na nulu, mají stejnou první a třetí složku a dále mají druhou složku nulovou. Tedy

$$ N_Q = \begin{cases} \{\vec{0}\} & \iff \alpha \neq 0 \\ \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda & \iff \alpha = 0. \end{cases} $$

ad (c)

Kvadratickou formu přepíšeme následovně:

$$Q(\vec{x}) = -2\left(\sqrt{-\frac{\alpha}{2}}(x_1 - x_2)\right)^2 + (x_1 - x_3)^2 + 2x_2^2.$$

Označíme souřadnice v nové polární bázi jako α_i. Jelikož je forma reálná, o souřadnice se bude jednat pouze pokud $\alpha < 0$, což je v souladu se signaturou hledané formy. Máme tedy

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \sqrt{-\frac{\alpha}{2}}(x_1 - x_2) \\
\alpha_2 &= x_1 - x_3 \\
\alpha_3 &= x_2,
\end{aligned}$$

neboli

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\alpha_1 + \sqrt{-\frac{\alpha}{2}}\alpha_3}{\sqrt{-\frac{\alpha}{2}}} = \sqrt{-\frac{2}{\alpha}}\alpha_1 + \alpha_3 \\
x_2 &= \alpha_3 \\
x_3 &= \sqrt{-\frac{2}{\alpha}}\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3.
\end{aligned}$$

Z tohoto vidíme, že hledaná polární báze vypadá například takto

$$\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} \sqrt{-\frac{2}{\alpha}} \\ 0 \\ \sqrt{-\frac{2}{\alpha}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

11 Skalární součin a ortogonalita

Cvičení 1

V unitárním prostoru $\mathbb{C}^2$ najděte dvě různé ON báze.

Viz cvičení 9 v předchozí kapitolce 10.

Cvičení 1.5

V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ je dán podprostor

$$P := \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda .$$

Najděte ON bázi P. (a) Bez použití Gram-Schmidta a (b) s použitím Gram-Schmidta.

V první řadě standardní úpravou

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zjistíme, že vektory

$$p_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad p_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad p_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

generující podprostor P jsou lineárně nezávislé, tudíž $\dim P = 3$ a (p_1, p_2, p_3) je báze P. Báze je to neortogonální, poněvadž

$$\|p_1\|^2 = 4, \quad \|p_2\|^2 = 2, \quad \|p_3\|^2 = 3, \quad \langle p_1|p_2\rangle = 2, \quad \langle p_1|p_3\rangle = 3, \quad \langle p_2|p_3\rangle = 1.$$

ad (a)

Ponechme stranou možnost hledat ON bázi P přímým výpočtem a učiňme radější následující úvahu. Nechť $p, q \in P$ jsou libovolné. Potom existují čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ a $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ taková, že

$$p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 \qquad \text{a} \qquad q = \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \beta_3 p_3.$$

Platí

$$\begin{aligned} \langle p|q\rangle &= \alpha_1\beta_1\|p_1\|^2 + \alpha_1\beta_2\langle p_1|p_2\rangle + \alpha_1\beta_3\langle p_1|p_3\rangle \\ &\quad + \alpha_2\beta_1\langle p_2|p_1\rangle + \alpha_2\beta_2\|p_2\|^2 + \alpha_2\beta_3\langle p_2|p_3\rangle \\ &\quad + \alpha_3\beta_1\langle p_3|p_1\rangle + \alpha_3\beta_2\langle p_3|p_2\rangle + \alpha_3\beta_3\|p_3\|^2 \\ &=: h(\alpha, \beta), \end{aligned}$$

kde na pravou stranu můžeme nahlížet jako na symetrickou sesquilineární formu na $\mathbb{R}^3$ v proměnných

$$\alpha := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \qquad \beta := \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}.$$

Hledání ortogonální báze podprostoru P se tedy redukuje na nalezení polární báze formy h. Standardní úpravou doplnění na čtverec najdeme

$$\begin{aligned} h[\alpha] &= 4\alpha_1^2 + 4\alpha_1\alpha_2 + 6\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_2^2 + 2\alpha_2\alpha_3 + 3\alpha_3^2 \\ &= \left(2\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{3}{2}\alpha_3\right)^2 - \left(\alpha_2 + \frac{3}{2}\alpha_3\right)^2 + 2\alpha_2^2 + 2\alpha_2\alpha_3 + 3\alpha_3^2 \\ &= \left(2\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{3}{2}\alpha_3\right)^2 + \alpha_2^2 - \alpha_2\alpha_3 + \frac{3}{4}\alpha_3^2 \\ &= \left(2\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{3}{2}\alpha_3\right)^2 + \left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3\right)^2 - \frac{1}{4}\alpha_3^2 + \frac{3}{4}\alpha_3^2 \\ &= \left(2\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{3}{2}\alpha_3\right)^2 + \left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3\right)^2 + \frac{1}{2}\alpha_3^2 . \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že polární báze formy h je například soubor (a, b, c) tvořený vektory

$$a := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Soubor $(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3)$ tvořený vektory

$$\hat{p}_1 := a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 = p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{p}_2 := b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 = -p_1 + 2p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{p}_2 := c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3 = -2p_1 + p_2 + 2p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

bude tedy ortogonální báze prostoru P (přesvědčte se o tom zkouškou). Ortonormální bázi $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)$ dostaneme renormalizací

$$\tilde{p}_1 := \frac{\hat{p}_1}{\|\hat{p}_1\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{p}_2 := \frac{\hat{p}_2}{\|\hat{p}_2\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{p}_3 := \frac{\hat{p}_3}{\|\hat{p}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ad (b)

Gram-Schmidtova strategie je založena na pozorování, že pokud u je vektor s normou $\|u\| = 1$ a v je jakýkoli jiný vektor, potom platí ortogonální rozklad

$$v = v_\parallel + v_\perp, \qquad \text{kde} \qquad v_\parallel := \langle v|u\rangle u \parallel u, \qquad v_\perp := v - \langle v|u\rangle u \perp u.$$

Vektory $u, v_\perp$ tedy budou ortogonální. Pokud u, v jsou lineárně nezávislé, potom vektor $v_\perp$ můžeme navíc renormalizovat na jedničku

$$\tilde{v}_\perp := \frac{v_\perp}{\|v_\perp\|}.$$

Technická rada: Kdykoli pracujete s normou, berte její kvadrát.

První krok Gram-Schmidtovy strategie, jak z lineárně nezávislého souboru (p_1, p_2, p_3) vyrobit ortonormální soubor $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)$, spočívá v pouhé renormalizaci:

$$\tilde{p}_1 := \frac{p_1}{\|p_1\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

V druhém kroku aplikujeme výše popsanou strategii na dvojici vektorů $\tilde{p}_1$ $(= u)$ a p_2 $(= v)$:

$$\begin{aligned}
\hat{p}_2 &:= p_2 - \langle p_2|\tilde{p}_1\rangle\tilde{p}_1 = p_2 - \frac{\langle p_2|p_1\rangle}{\|p_1\|^2}p_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \\
\|\hat{p}_2\|^2 &= 1, \\
\tilde{p}_2 &:= \frac{\hat{p}_2}{\|\hat{p}_2\|} = \hat{p}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Další kroky jsou pouhou indukcí výše popsané strategie. V našem případě je třetí krok rovněž krokem posledním:

$$\begin{aligned}
\hat{p}_3 := p_3 - \langle p_3|\tilde{p}_1\rangle\tilde{p}_1 - \langle p_3|\tilde{p}_2\rangle\tilde{p}_2 &= \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\left\langle\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{3}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \\
\|\hat{p}_3\|^2 = \frac{1}{2}&, \\
\tilde{p}_3 := \frac{\hat{p}_3}{\|\hat{p}_3\|} = \sqrt{2}\,\hat{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}&.
\end{aligned}$$

Cvičení 2

V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ je dán podprostor

$$P := \left[\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\5\\-12\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\\-2\end{pmatrix}\right]_\lambda.$$

Najděte ON bázi P. (a) Bez použití Gram-Schmidta a (b) s použitím Gram-Schmidta.

V první řadě standardní úpravou

$$\begin{pmatrix}1&4&2\\2&5&3\\-1&5&1\\3&-12&-2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&4&2\\0&-3&-1\\0&9&3\\0&-24&-8\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&4&2\\0&-3&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

zjistíme, že vektory

$$p_1 := \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}, \qquad p_2 := \begin{pmatrix}4\\5\\5\\-12\end{pmatrix}, \qquad p_3 := \begin{pmatrix}2\\3\\1\\-2\end{pmatrix},$$

generující podprostor P jsou lineárně závislé, $\dim P = 2$ a například (p_1, p_3) je báze P. Báze je to neortogonální, poněvadž

$$\|p_1\|^2 = 15, \quad \|p_3\|^2 = 18, \quad \langle p_1|p_3\rangle = 1.$$

ad (a)

Forma na $\mathbb{R}^2$
$$h[\alpha] := 15\alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 + 18\alpha_2^2 = 2\left(3\alpha_2 + \frac{\alpha_1}{6}\right)^2 + \frac{269}{18}\alpha_1^2$$
má polární bázi například
$$\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}18\\-1\end{pmatrix}\right).$$
Tudíž soubor $(\hat{p}, \hat{q})$ tvořený vektory
$$\hat{p} := 0p_1 + 1p_3 = p_3 = \begin{pmatrix}2\\3\\1\\-2\end{pmatrix}, \qquad \hat{q} := 18p_1 - 1p_3 = \begin{pmatrix}16\\33\\-19\\56\end{pmatrix}$$
je ortogonální báze podprostoru P. Není ortonormální, poněvadž
$$\|\hat{p}\|^2 = 18, \qquad \|\hat{q}\|^2 = 4842.$$
Ortonormální bázi (p, q) podprostoru P dostaneme renormalizací
$$p := \frac{\hat{p}}{\|\hat{p}\|} = \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix}2\\3\\1\\-2\end{pmatrix}, \qquad q := \frac{\hat{q}}{\|\hat{q}\|} = \frac{1}{\sqrt{4842}}\begin{pmatrix}16\\33\\-19\\56\end{pmatrix}.$$

ad (b)

První krok Gram-Schmidtova procesu je pouhá renormalizace:
$$p := \frac{p_1}{\|p_1\|} = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}.$$
Druhý a v tomto případě i poslední krok je konstrukce
$$\hat{q} := p_3 - \langle p_3|p\rangle p = p_3 - \frac{\langle p_3|p_1\rangle}{\|p_1\|^2}p_1 = \begin{pmatrix}2\\3\\1\\-2\end{pmatrix} - \frac{1}{15}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix}29\\43\\16\\-33\end{pmatrix},$$
$$\|\hat{q}\|^2 = \frac{269}{15},$$
$$q := \frac{\hat{q}}{\|\hat{q}\|} = \frac{1}{\sqrt{15}\sqrt{269}}\begin{pmatrix}29\\43\\16\\-33\end{pmatrix}.$$
Soubor (p, q) je hledaná ortonormální báze P.

Poznámka na závěr: Pokud se nejedná o úplně bláznivý příklad, lze předpokládat, že číselně hezčí výsledky bychom dostali, pokud bychom pracovali s počáteční bází (p_1, p_2) nebo (p_2, p_3).

Cvičení 3

V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ doplňte vektory
$$p_1 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad p_2 := \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\3\\-5\end{pmatrix},$$
na ON bázi. (a) Bez použití Gram-Schmidta a (b) s použitím Gram-Schmidta.

Především si povšimněme, že příklad má smysl, poněvadž vektory p_1, p_2 jsou ortonormální. V každém případě jako nultý krok doplníme vektory p_1, p_2 na libovolnou (obecně neortonormální) bázi $\mathbb{R}^4$, například (p_1, p_2, e_1, e_2). Přestože všechny vektory této báze jsou normalizované na jedničku a $p_1 \perp p_2$ a $e_1 \perp e_2$, nejedná se o ortogonální bázi, jelikož

$$\langle p_1|e_1\rangle = \frac{1}{2}, \qquad \langle p_1|e_2\rangle = \frac{1}{2}, \qquad \langle p_2|e_1\rangle = \frac{1}{6}, \qquad \langle p_2|e_2\rangle = \frac{1}{6}. \tag{11.1}$$

V dalším kroku tuto bázi přetvoříme na bázi ortonormální modifikací vektorů e_1, e_2.

ad (a)

Hledaná ortonormální báze je obecně tvaru (p_1, p_2, p_3, p_4), kde

$$\begin{aligned} p_3 &:= \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 e_1 + \alpha_4 e_2, \\ p_4 &:= \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \beta_3 e_1 + \beta_4 e_2, \end{aligned} \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \in \mathbb{R}.$$

S využitím identit (11.1) podmínky na ortonormalitu znějí:

$$\begin{aligned} \|p_3\|^2 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \frac{1}{3}\alpha_2\alpha_3 + \frac{1}{3}\alpha_2\alpha_4 \stackrel{!}{=} 1, \\ \|p_4\|^2 &= \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2 + \beta_1\beta_3 + \beta_1\beta_4 + \frac{1}{3}\beta_2\beta_3 + \frac{1}{3}\beta_2\beta_4 \stackrel{!}{=} 1, \\ \langle p_3|p_4\rangle &= \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_4 + \frac{1}{2}\alpha_1\beta_3 + \frac{1}{2}\alpha_1\beta_4 + \frac{1}{6}\alpha_2\beta_3 + \frac{1}{6}\alpha_2\beta_4 \stackrel{!}{=} 0, \\ \langle p_1|p_3\rangle &= \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_3 + \frac{1}{2}\alpha_4 \stackrel{!}{=} 0, \\ \langle p_2|p_3\rangle &= \alpha_2 + \frac{1}{6}\alpha_3 + \frac{1}{6}\alpha_4 \stackrel{!}{=} 0, \\ \langle p_1|p_4\rangle &= \beta_1 + \frac{1}{2}\beta_3 + \frac{1}{2}\beta_4 \stackrel{!}{=} 0, \\ \langle p_2|p_4\rangle &= \beta_2 + \frac{1}{6}\beta_3 + \frac{1}{6}\beta_4 \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Zapoměňme na chvíli na normalizační podmínky a snažme se splnit pouze ty ortogonalizační. Z posledních čtyř rovnic vyjádříme

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_4), \qquad \alpha_2 = -\frac{1}{6}(\alpha_3 + \alpha_4), \qquad \beta_1 = -\frac{1}{2}(\beta_3 + \beta_4), \qquad \beta_4 = -\frac{1}{6}(\beta_3 + \beta_4),$$

a po dosazení do třetí rovnice dostaneme podmínku

$$\alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_4 = 0.$$

Postačující a (až na znaménko) i nutnou podmínkou pro splnění tohoto vztahu jsou rovnosti $\alpha_3 := -\beta_4$ a $\alpha_4 := \beta_3$, což vede na nenormalizované vektory

$$\begin{aligned} \hat{p}_3 &= -\frac{1}{2}(\beta_3 - \beta_4)p_1 - \frac{1}{6}(\beta_3 - \beta_4)p_2 - \beta_4 e_1 + \beta_3 e_2, \\ \hat{p}_4 &= -\frac{1}{2}(\beta_3 + \beta_4)p_1 - \frac{1}{6}(\beta_3 + \beta_4)p_2 + \beta_3 e_1 + \beta_4 e_2. \end{aligned}$$

Speciální volbou $\beta_3 := 3 =: \beta_4$ nakonec dostaneme netriviální vektory

$$\hat{p}_3 = -3e_1 + 3e_2 = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \|\hat{p}_3\|^2 = 18,$$

$$\hat{p}_4 = -3p_1 - p_2 + 3e_1 + 3e_2 = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \|\hat{p}_4\|^2 = 8.$$

Teď už jen stačí je znormalizovat:

$$p_3 := \frac{\hat{p}_3}{\|\hat{p}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad p_4 := \frac{\hat{p}_4}{\|\hat{p}_4\|} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2\\2\\-3\\-1\end{pmatrix}.$$

ad (b)

Tento příklad je zřejmě o tom, že užití Gram-Schmidtova procesu je koncepčně jednodušší. Rovnou píšeme

$$\hat{p}_3 := e_1 - \langle e_1|p_1\rangle p_1 - \langle e_1|p_2\rangle p_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{36}\begin{pmatrix}1\\1\\3\\-5\end{pmatrix} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix}26\\-10\\-12\\-4\end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix}13\\-5\\-6\\-2\end{pmatrix},$$

$$\|\hat{p}_3\|^2 = \frac{13}{18},$$

$$p_3 := \frac{\hat{p}_3}{\|\hat{p}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{13}\sqrt{18}}\begin{pmatrix}13\\-5\\-6\\-2\end{pmatrix}.$$

Nakonec:

$$\hat{p}_4 := e_2 - \langle e_2|p_1\rangle p_1 - \langle e_2|p_2\rangle p_2 - \langle e_2|p_3\rangle p_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{36}\begin{pmatrix}1\\1\\3\\-5\end{pmatrix} - \frac{-5}{13.18}\begin{pmatrix}13\\-5\\-6\\-2\end{pmatrix} = \frac{2}{13}\begin{pmatrix}0\\4\\-3\\-1\end{pmatrix},$$

$$\|\hat{p}_4\|^2 = \frac{8}{13},$$

$$p_4 := \frac{\hat{p}_4}{\|\hat{p}_4\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{13}}\begin{pmatrix}0\\4\\-3\\-1\end{pmatrix}.$$

Cvičení 4

Nechť

$$P := \left[\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\-5 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 2\\8 & -7\end{pmatrix}\right]_\lambda \subset\subset \mathbb{R}^{2,2}.$$

Najděte OG bázi obsahující vektor z $\left[\begin{pmatrix}2 & 1\\-2 & 0\end{pmatrix}\right]_\lambda$, je-li dán skalární součin $\langle A|B\rangle := \sum_{i,j=1}^{2} A_{ij}B_{ij}$.

Především stojí za to se přesvědčit, že se skutečně jedná o skalární součin. Pro praktické výpočty níže dále stojí za to si uvědomit následující vztah:

$$\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}(AB^T) = \mathrm{tr}(A^TB).$$

Pišme $P = [p_1, p_2, p_3]_\lambda$, kde

$$p_1 := \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & -1\end{pmatrix}, \quad p_2 := \begin{pmatrix}1 & 1\\-5 & 3\end{pmatrix}, \quad p_3 := \begin{pmatrix}3 & 2\\8 & -7\end{pmatrix}, \qquad \text{a} \qquad a := \begin{pmatrix}2 & 1\\-2 & 0\end{pmatrix}.$$

Snadno ověříme, že $p_3 = 2a + p_1 - 2p_2$. Tudíž $a \in P$ a (a, p_1, p_2) je báze prostoru P. Nejedná se však o bázi ortonormální (ani ortogonální), poněvadž

$$\|a\|^2 = \operatorname{tr}(a^T a) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 9, \qquad \langle a|p_1\rangle = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\|p_1\|^2 = \operatorname{tr}(p_1^T p_1) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 10, \qquad \langle a|p_2\rangle = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 12 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 13,$$

$$\|p_2\|^2 = \operatorname{tr}(p_2^T p_2) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 26 & -14 \\ -14 & 10 \end{pmatrix} = 36, \qquad \langle p_1|p_2\rangle = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} -9 & 7 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} = -10.$$

Zbývá tuto bázi přetvořit na ortogonální bázi a Gram-Schmidtův proces bude za tímto účelem zřejmě nejefektivnější. Poněvadž $a \perp p_1$, stačí tyto vektory pouze renormalizovat:

$$\tilde{a} := \frac{a}{\|a\|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{p}_1 := \frac{p_1}{\|p_1\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Potom (nenormalizovaný) vektor $\hat{p}_2$ kolmý zároveň k a i p_1 vyrobíme Gram-Schmidtovým předpisem:

$$\begin{aligned} \hat{p}_2 &= p_2 - \langle p_2|\tilde{a}\rangle\tilde{a} - \langle p_2|\tilde{p}_1\rangle\tilde{p}_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} - \frac{13}{9}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \frac{-10}{10}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 14 \\ -1 & 18 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pro tuto výrobu je normalizace vektorů $\tilde{a}$ a $\tilde{p}_1$ kruciální, poněvadž nás nakonec však zajímá pouze ortogonální báze, můžeme zvolit například:

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 14 \\ -1 & 18 \end{pmatrix} \right),$$

což odpovídá volbě $(a, p_1, 9\hat{p}_2)$. (Přesvědčte se zkouškou, že se skutečně jedná o ortogonální bázi.)

Cvičení 5

Najděte OG bázi $P \subset\subset \mathbb{R}^3$, kde $P \equiv 2x - 2y + z = 0$, je-li v $\mathbb{R}^3$ definován skalární součin ve standardní bázi

$$\langle x|y\rangle := 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

tak, aby báze obsahovala vektor z $Q \equiv x - y - z = 0$.

Máme zadaný nestandardní (neeukleidovský) skalární součin. Pro praktické výpočty níže navrhuji si ho přepsat pomocí maticového násobení:

$$\langle x|y\rangle = x^T A\, y, \qquad \text{kde} \qquad A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Roviny P, Q si zapíšeme coby lineární obaly:

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2x + 2y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = [p_1, p_2]_\lambda, \qquad \text{kde} \qquad p_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad p_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x - y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = [q_1, q_2]_\lambda, \qquad \text{kde} \qquad q_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Obvyklým způsobem $(2x - 2y + z = 0 \ \wedge \ x - y - z = 0)$ zároveň zjistíme, že

$$P \cap Q = [q]_\lambda, \qquad \text{kde} \qquad q := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rovnou vidíme, že vektory q, p_1 (nebo q, p_1) jsou lineárně nezávislé. Soubor (q, p_1) je tedy báze P, jež obsahuje vektor z Q. Jedná se o neortonormální (i neortogonální) bázi, poněvadž

$$\|q\|^2 = 1, \qquad \|p_1\|^2 = 6, \qquad \langle q|p_1\rangle = 1.$$

Vektor q je tedy už správně normalizovaný (v našem nestandardně zadaném skalárním součinu). Ze souboru tedy snadno zkonstruujeme ortogonální bázi $(q, \tilde{p}_1)$ Gram-Schmidtovým předpisem:

$$\tilde{p}_1 := p_1 - \langle p_1|q\rangle q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Tedy hledaná báze je například

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

Cvičení 6

Nechť $P := \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda \subset\subset \mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem. Najděte $P^\perp$. Najděte dvěma různými způsoby OG průmět $x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ do P.

Pišme $P = [p_1, p_2]_\lambda$, kde

$$p_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad p_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Obecná strategie

Rozšiřme bázi (p_1, p_2) podprostoru P na bázi celého prostoru $\mathbb{R}^4$; snadno ověříme, že za rozšířenou bázi lze vzít například (p_1, p_2, e_1, e_2). Aplikací Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu na tento soubor dostaneme ortonormální bázi (q_1, q_2, q_3, q_4) v $\mathbb{R}^4$, kde

$$q_1 := \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad q_2 := \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad q_3 := \frac{1}{3\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad q_4 := \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Z toho, jak tento proces funguje, víme, že $[p_1, p_2]_\lambda = [q_1, q_2]_\lambda$, tudíž

$$P^\perp = [q_3, q_4]_\lambda = \left[\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

Z rozkladu vektoru x do této ortonormální báze

$$x = \underbrace{\langle x|q_1\rangle q_1 + \langle x|q_2\rangle q_2}_{x_\parallel \in P} + \underbrace{\langle x|q_3\rangle q_3 + \langle x|q_4\rangle q_4}_{x_\perp \in P^\perp}$$

vidíme, že hledaný průmět $x_\parallel$ splňuje

$$x_\parallel = \langle x|q_1\rangle q_1 + \langle x|q_2\rangle q_2 = \frac{4}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{-4}{18} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{Trik}}$

Jednodušší způsob, jak najít průmět $x_\parallel$, je psát

$$x = \underbrace{\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2}_{x_\parallel \in P} + \underbrace{x_\perp}_{\in P^\perp},$$

kde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ jsou konstanty, jež je potřeba najít. Z definice ortogonálního doplňku víme, že $p_1 \perp x_\perp$ a $p_2 \perp x_\perp$. Tudíž, přenásobením (ve smyslu skalárního součinu) rovnosti výše vektory p_1, p_2, eliminujeme neznámý vektor $x_\perp$ a dostaneme lineární systém

$$\begin{aligned}\langle x|p_1\rangle &= \alpha_1 \|p_1\|^2 + \alpha_2 \langle p_2|p_1\rangle,\\ \langle x|p_2\rangle &= \alpha_1 \langle p_1|p_2\rangle + \alpha_2 \|p_2\|^2.\end{aligned}$$

Zde známe vše

$$\|p_1\|^2 = 6, \qquad \|p_2\|^2 = 6, \qquad \langle p_1|p_2\rangle = 3, \qquad \langle x|p_1\rangle = 4, \qquad \langle x|p_2\rangle = 0,$$

kromě hledaných konstant α_1, α_2, jež však ze soustavy rovnou spočteme:

$$\alpha_1 = \frac{8}{9}, \qquad \alpha_2 = -\frac{4}{9}.$$

Tedy

$$x_\parallel = \frac{8}{9}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix} - \frac{4}{9}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{4}{9}\begin{pmatrix}2\\1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Cvičení 7

Nechť $P \subset \mathbb{R}^3$ se skalárním součinem

$$\langle x|y\rangle := 2x_1y_1 + x_2y_2 + 6x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2.$$

Najděte ON bázi $P^\perp$, je-li $P \equiv x = 0$.

Geometrický význam podprostoru P je rovina yz:

$$P = [e_2, e_3]_\lambda.$$

Při standardním (eukleidovském) skalárním součinu, bychom rovnou věděli, že $P^\perp = [e_1]_\lambda$, avšak nestandardně zadaný skalární součin nám vše komplikuje a řešení bude vypadat jinak. Pro praktické výpočty níže navrhuju si zadaný skalární součin přepsat pomocí maticového násobení:

$$\langle x|y\rangle = x^T A\, y, \qquad \text{kde} \qquad A := \begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 6\end{pmatrix}.$$

Soubor (e_2, e_3) je báze podprostoru P. Rozšiřme tento soubor na bázi (e_2, e_3, e_1) celého prostoru $\mathbb{R}^3$. Platí

$$\|e_1\|^2 = 2, \quad \|e_2\|^2 = 1, \quad \|e_3\|^2 = 6, \quad \langle e_1|e_2\rangle = -1, \quad \langle e_1|e_3\rangle = 1, \quad \langle e_2|e_3\rangle = 1.$$

Aplikací Gram-Schmidtova procesu na bázi (e_2, e_3, e_1) dostaneme ortonormální bázi (f_1, f_2, f_3) s vektory

$$f_1 := \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad f_2 := \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \qquad f_3 := \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}5\\7\\-2\end{pmatrix}.$$

Z toho, jak Gram-Schmidtův proces funguje, víme, že $[e_2, e_3]_\lambda = [f_1, f_2]_\lambda$, tudíž

$$P^\perp = [f_3]_\lambda = \left[\begin{pmatrix}5\\7\\-2\end{pmatrix}\right]_\lambda.$$

Cvičení 8

Nechť $P, Q \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $\mathbb{R}^4$ je eukleidovský prostor. Najděte $Q^\perp$ do P, je-li

$$P := \left[\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\\3\end{pmatrix}\right]_\lambda \quad \text{a} \quad Q := \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\\2\\5\end{pmatrix}\right]_\lambda .$$

Pišme $P = [p_1, p_2, p_3]_\lambda$ a $Q = [q_1, q_2]_\lambda$, kde pořadí vektorů je jako v zadání. Snadno ověříme, že (p_1, p_2, p_3) je báze P a (q_1, q_2) je báze Q, tudíž $\dim P = 3$ (P je nadrovina) a $\dim Q = 2$ (Q je rovina).

Doplňme bázi (q_1, q_2) prostoru Q na bázi celého prostoru $\mathbb{R}^4$; snadno ověříme, že například (q_1, q_2, e_1, e_2) je požadovaná báze. Aplikací Gram-Schmidtova procesu na tuto rozšířenou bázi dostaneme ortonormální bázi (f_1, f_2, f_3, f_4) prostoru $\mathbb{R}^4$ s vektory

$$f_1 := \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-2\end{pmatrix}, \qquad f_2 := \frac{1}{\sqrt{1045}}\begin{pmatrix}26\\10\\10\\13\end{pmatrix}, \qquad f_3 := \frac{1}{\sqrt{418}}\begin{pmatrix}8\\-13\\-13\\4\end{pmatrix}, \qquad f_4 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Z toho, jak Gram-Schmidtův proces funguje, víme, že $[q_1, q_2]_\lambda = [f_1, f_2]_\lambda$, tudíž

$$Q^\perp \text{ (do } \mathbb{R}^4) = [f_3, f_4]_\lambda.$$

Zároveň aplikujme Gram-Schmidtův proces na bázi (p_1, p_2, p_3) prostoru P, čímž vyrobíme ortonormální bázi $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)$ prostoru P s vektory

$$\tilde{p}_1 := \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \tilde{p}_2 := \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\\3\end{pmatrix}, \qquad \tilde{p}_3 := \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Libovolný vektor x z celkového ortogonálního doplňku $Q^\perp$ (do $\mathbb{R}^4$) splňuje $x = \alpha f_3 + \beta f_4$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Takovýto vektor chceme rozložit následujícím způsobem

$$x = \underbrace{x_\parallel}_{\in P} + \underbrace{x_\perp}_{\in P^\perp},$$

kde $P^\perp$ je ortogonální doplněk P (do $\mathbb{R}^4$), jehož explicitní tvar však znát nepotřebujeme. Přenásobením (ve smyslu skalárního součinu) této rovnosti vektory $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3$ a užitím $\langle x_\perp | \tilde{p}_j\rangle = 0$ pro $j = 1, 2, 3$, totiž vektor $x_\perp$ vyeliminujeme a dostaneme systém

$$\begin{aligned}
\alpha\langle f_3|\tilde{p}_1\rangle + \beta\langle f_4|\tilde{p}_1\rangle &= \langle x|\tilde{p}_1\rangle = \langle x_\parallel|\tilde{p}_1\rangle,\\
\alpha\langle f_3|\tilde{p}_2\rangle + \beta\langle f_4|\tilde{p}_2\rangle &= \langle x|\tilde{p}_2\rangle = \langle x_\parallel|\tilde{p}_2\rangle,\\
\alpha\langle f_3|\tilde{p}_3\rangle + \beta\langle f_4|\tilde{p}_3\rangle &= \langle x|\tilde{p}_3\rangle = \langle x_\parallel|\tilde{p}_3\rangle.
\end{aligned}$$

Po dosazení číselných hodnot skalárních součinů $\langle f_i|\tilde{p}_j\rangle$ tento systém zní

$$\begin{aligned}
-\frac{5}{\sqrt{627}}\,\alpha &= \langle x_\parallel|\tilde{p}_1\rangle,\\
40\sqrt{\frac{2}{4389}}\,\alpha &= \langle x_\parallel|\tilde{p}_2\rangle,\\
-13\sqrt{\frac{2}{1463}}\,\alpha &= \langle x_\parallel|\tilde{p}_3\rangle.
\end{aligned}$$

Poznámka. Platí $\langle f_4|\tilde{p}_j\rangle = 0$ pro všechna $j = 1, 2, 3$, tudíž $f_4 \in P^\perp$. Poněvadž $\dim P^\perp = 4 - \dim P = 1$, dostáváme mimochodem $P^\perp = [f_4]_\lambda$. Tím bychom příklad mohli ukončit (nebo dokonce už dříve, pokud bychom si všimli, že $\langle f_4|p_j\rangle = 0$ pro všechna $j = 1, 2, 3$), jelikož z ortogonality nezbytně plyne, že $f_3 \in P$, tudíž $Q^\perp$ do $P = [f_3]_\lambda$. Pokračujme však v započatém systematickém řešení a dokažme si ten samý výsledek následujícím způsobem.

Poněvadž $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)$ je ortonormální báze, máme rozklad

$$\begin{aligned}
x_\parallel &= \langle x_\parallel|\tilde{p}_1\rangle\tilde{p}_1 + \langle x_\parallel|\tilde{p}_2\rangle\tilde{p}_2 + \langle x_\parallel|\tilde{p}_3\rangle\tilde{p}_3 \\
&= -\frac{5}{\sqrt{627}}\,\alpha\,\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix} + 40\sqrt{\frac{2}{4389}}\,\alpha\,\frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\\3\end{pmatrix} - 13\sqrt{\frac{2}{1463}}\,\alpha\,\frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\2\end{pmatrix} \\
&= \alpha\,\frac{1}{\sqrt{418}}\begin{pmatrix}8\\-13\\-13\\4\end{pmatrix} \\
&= \alpha f_3.
\end{aligned}$$

Tedy průmět $x_\parallel$ vektoru x (z celkového ortogonálního doplňku $Q^\perp$ do $\mathbb{R}^4$) do P je násobek vektoru f_3. Tudíž

$$Q^\perp \text{ do } P = [f_3]_\lambda = \left[\begin{pmatrix}8\\-13\\-13\\4\end{pmatrix}\right]_\lambda .$$

Cvičení 9

Nechť $\mathcal{P}_3$ je prostor polynomů stupně maximálně 2 se skalárním součinem
(a) $\langle x|y\rangle := \alpha_0\overline{\beta_0} + \alpha_1\overline{\beta_1} + \alpha_2\overline{\beta_2}$,
(b) $\langle x|y\rangle := \alpha_0\overline{\beta_0} - \alpha_0\overline{\beta_1} - \alpha_1\overline{\beta_0} + 2\alpha_1\overline{\beta_1} + 4\alpha_2\overline{\beta_2}$,
kde $x(t) := \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$ a $y(t) := \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.
Najděte jeho ON bázi v prvním a druhém případě.

Připomeňme, že prostor $\mathcal{P}_3$ je isomorfní eukleidovskému prostoru $\mathbb{C}^3$. Skutečně, pro libovolný polynom $x \in \mathcal{P}_3$ tvaru $x(t) := \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$, kde $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, platí

$$(x)_\mathcal{E} = \begin{pmatrix}\alpha_0\\\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix} =: \alpha \in \mathbb{C}^3,$$

kde $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2)$ je standardní báze $\mathcal{P}_3$ tvořená monomy $e_0(t) := 1$, $e_1(t) := t$ a $e_2(t) := t^2$.

ad (a)

Volba skalárního součinu odpovídá na $\mathbb{C}^3$ standardní (eukleidovské) volbě. Za ortonormální bázi na $\mathbb{C}^3$ lze v tomto případě zvolit standardní bázi

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right), \tag{11.2}$$

čemuž odpovídá standardní báze (e_0, e_1, e_2) na $\mathcal{P}_3$.

ad (b)

Volba skalárního součinu odpovídá na $\mathbb{C}^3$ nestandardní volbě

$$\langle x|y\rangle = \alpha^T A\,\beta, \qquad \text{kde} \qquad A := \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\-1 & 2 & 0\\0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

Aplikací Gram-Schmidtova procesu na standardrní bázi (11.2) dostaneme na $\mathbb{R}^3$ ortonormální bázi

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \tag{11.3}$$

Této bázi odpovídá na $\mathcal{P}_3$ ortonormální báze $(e_0, e_0 + e_1, \frac{1}{2} e_2)$.

Domácí úkol 1

Nechť je v prostoru matic $\mathbb{R}^{2,2}$ dán skalární součin s maticí

$$^{\mathcal{E}}Q := \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešte úlohu 4 s takto zadaným skalárním součinem.

Nejprve najdeme bázi $\mathcal{X}$ prostoru P obsahující matici $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -5 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & -7 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Máme tedy například

$$\mathcal{X} = (\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3) = \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \right).$$

Tuto bázi nyní ortogonalizujeme:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Y}_1 &= \mathbb{X}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \\
\mathbb{Y}_2 &= \mathbb{X}_2 - \frac{(\mathbb{X}_2)_{\mathcal{E}}^T \, {}^{\mathcal{E}}Q (\mathbb{Y}_1)_{\mathcal{E}}}{(\mathbb{Y}_1)_{\mathcal{E}}^T \, {}^{\mathcal{E}}Q (\mathbb{Y}_1)_{\mathcal{E}}} \mathbb{Y}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \frac{20}{15} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 14 & -3 \end{pmatrix}, \\
\mathbb{Y}_3 &= \mathbb{X}_3 - \frac{(\mathbb{X}_3)_{\mathcal{E}}^T \, {}^{\mathcal{E}}Q (\mathbb{Y}_1)_{\mathcal{E}}}{(\mathbb{Y}_1)_{\mathcal{E}}^T \, {}^{\mathcal{E}}Q (\mathbb{Y}_1)_{\mathcal{E}}} \mathbb{Y}_1 - \frac{(\mathbb{X}_3)_{\mathcal{E}}^T \, {}^{\mathcal{E}}Q (\mathbb{Y}_2)_{\mathcal{E}}}{(\mathbb{Y}_2)_{\mathcal{E}}^T \, {}^{\mathcal{E}}Q (\mathbb{Y}_2)_{\mathcal{E}}} \mathbb{Y}_2 = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{44}{73} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 14 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{73} \begin{pmatrix} -49 & 78 \\ -111 & 175 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Hledaná báze je tedy například $\mathcal{Y} = (\mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \mathbb{Y}_3)$.

Domácí úkol 2

Nechť $P := \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$ a $Q := \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$. V $\mathbb{R}^4$ je definován skalární součin ve standardní bázi $\mathcal{E}$

$$\langle x | y \rangle := 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 - x_1y_4 - x_4y_1.$$

Najděte ON bázi $Q^\perp$ do P.

Snadno ověříme, že prostor P má bázi například:

$$\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Tuto bázi nyní ortogonalizujeme:

$$\vec{y}_1 = \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{y}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\langle \vec{x}_2 | \vec{y}_1 \rangle}{\|\vec{y}_1\|^2} \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{y}_3 = \vec{x}_3 - \frac{\langle \vec{x}_3 | \vec{y}_1 \rangle}{\|\vec{y}_1\|^2} \vec{y}_1 - \frac{\langle \vec{x}_3 | \vec{y}_2 \rangle}{\|\vec{y}_2\|^2} \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{3}{17} \cdot \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Vidíme tedy, že vektory $\vec{y}_2$ a $\vec{y}_3$ tvoří OG bázi $Q^\perp$ do P. Nakonec oba ortonormalizujeme a dostaneme ON bázi $Q^\perp$ do P:

$$\frac{\vec{y}_2}{\|\vec{y}_2\|} = \sqrt{\frac{7}{17}} \cdot \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{119} \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\vec{y}_3}{\|\vec{y}_3\|} = \sqrt{\frac{17}{6}} \cdot \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{102} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Domácí úkol 3

Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $P \equiv x - 2y + z = 0$. V $\mathbb{R}^4$ je definován skalární součin

$$\langle x|y \rangle := 2x_1y_1 + x_2y_2 + 6x_3y_3 + x_4y_4 - x_1y_4 - x_4y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2,$$

kde $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ a $y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$. Najděte

(a) $P^\perp$,

(b) a_P, je-li $a := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

ad (a)

Báze $\mathcal{X}$ podprostoru P je například

$$\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Dimenze P je 3, v $P^\perp$ tedy bude ležet jeden vektor $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)^T$, kolmý na všechny vektory z báze $\mathcal{X}$. Musí tedy platit

$$\langle \vec{x}_1 | \vec{q} \rangle = q_1 - q_2 - 5q_3 - q_4 = 0,$$
$$\langle \vec{x}_2 | \vec{q} \rangle = 3q_1 + 2q_2 + 8q_3 - q_4 = 0,$$
$$\langle \vec{x}_3 | \vec{q} \rangle = -q_1 + q_4 = 0.$$

Matice soustavy je

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & -1 \\ 3 & 2 & 8 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme tedy

$$P^{\perp} = [\vec{q}]_{\lambda} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}.$$

ad (b)

Z definice ortogonálního průmětu máme $\vec{a}_P = \vec{a} - \vec{a}_{P^{\perp}}$. Navíc,

$$\vec{a}_{P^{\perp}} = \frac{\langle \vec{a} | \vec{q} \rangle}{\|\vec{q}\|^2} \vec{q} = \frac{-2}{24} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a dohromady dostáváme

$$\vec{a}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{-2}{24} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -11 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

12 Metrická geometrie

Cvičení 1

Nechť $P \subset \mathbb{R}^4$ se skalárním součinem definovaným

$$\langle x|y\rangle := x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + 3x_4y_4 - x_3y_4 - x_4y_3.$$

Nechť $a := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $P \equiv \begin{matrix} x+y+z-u & =0 \\ y-2u & =0 \end{matrix}$. Spočtěte $\rho(a,P)$.

Geomerický význam vektoru a je bod. Geomerický význam objektu P je průnik dvou nadrovin procházejících počátkem:

$$P = P_1 \cap P_2, \qquad P_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \ x+y+z-u=0 \right\}, \quad P_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \ y-2u=0 \right\}.$$

Průnik je množina bodů, které musí splňovat stejná omezení zároveň: Z rovnice, jež definuje nadrovinu P_2, vyjádříme $y = 2u$, dosadíme do rovnice, jež definuje nadrovinu P_1, a z té pak vyjádříme $x = -y - z + u = -2u - z + u = -z - u$. Tedy

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} -z-u \\ 2u \\ z \\ u \end{pmatrix} : \ z,u \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \ z,u \in \mathbb{R} \right\} = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda .$$

Průnik P je tedy rovina procházející počátkem. Ambientní prostor $\mathbb{R}^4$ je naneštěstí čtyřrozměrný, tudíž si nemůžeme kreslit obrázek, nicméne pořád platí geometricky intuitivní fakt, že vzdálenost bodu a od roviny P dostaneme jako velikost ortogonální projekce

$$\rho(a,P) = \|a_\perp\|, \qquad \text{kde} \qquad a = \underbrace{a_\parallel}_{\in P} + \underbrace{a_\perp}_{\in P^\perp}. \tag{12.1}$$

Problém se tedy redukuje na výpočet ortogonálního průmětu a do $P^\perp$, jenž zde značíme $a_\perp$.

Jako v cvičení 6 předchozí kapitolky 11 lze pro nalezení $a_\perp$ použít různé způsoby. Použijme trikový způsob. Platí

$$a_\parallel = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2, \qquad \text{kde} \qquad p_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ jsou konstanty, jež je potřeba určit. Poněvadž $p_1 \perp x_\perp$ a $p_2 \perp x_\perp$, z rovnosti (12.1) dostaneme

$$\begin{aligned} \langle a|p_1\rangle &= \alpha_1\|p_1\|^2 + \alpha_2\langle p_2|p_1\rangle, \\ \langle a|p_2\rangle &= \alpha_1\langle p_1|p_2\rangle + \alpha_2\|p_2\|^2, \end{aligned}$$

kde (pozor na nutnost použít zadaný, nestandardní skalární součin)

$$\|p_1\|^2 = 2, \qquad \|p_2\|^2 = 12, \qquad \langle p_1|p_2\rangle = 0, \qquad \langle a|p_1\rangle = 2, \qquad \langle a|p_2\rangle = 12.$$

Tudíž $\alpha_1 = 1 = \alpha_2$, a tedy

$$a_\parallel = p_1 + p_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad a_\perp = a - a_\parallel = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Protože $\|a_\perp\|^2 = 4$, dostáváme nakonec
$$\rho(a,P) = 2.$$

Cvičení 2

Nechť $\mathbb{R}^3$ je eukleidovský prostor, nechť jsou dány lineární variety
$$W_1 \equiv x + 5y + z = 3 \qquad \text{a} \qquad W_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}\right]_\lambda .$$
Určete $\rho(W_1, W_2)$.

Varieta W_2 je přímka určená směrovým vektorem r a procházející bodem a_2, kde
$$r := \begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}, \qquad a_2 := \begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix};$$
specificky $W_2 = a_2 + P_2$, kde $P_2 := [r]_\lambda$ je přímka procházející počátkem. Varieta W_1 je rovina určená normálovým vektorem n či směrovými vektory p, q (po vyjádření $z = 3 - x - 5y$) a procházející bodem a_1, kde
$$n := \begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}, \qquad p := \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \qquad q := \begin{pmatrix}0\\1\\-5\end{pmatrix}, \qquad a_1 := \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix};$$
specificky $W_1 = a_1 + P_1$, kde $P_1 := [p,q]_\lambda$ je rovina procházející počátkem. Všimněte si, že přímka W_2 neleží v rovině W_1 (protože například $W_2 \ni a_2 \notin W_1$). Geometricky je zřejmé, že vzdálenost přímky W_2 od roviny W_1 v $\mathbb{R}^3$ bude nenulová tehdy a jen tehdy, pokud r je lineární kombinací p, q (což odpovídá tomu, že přímka W_2 je rovnoběžná s rovinou W_1), což skutečně je, poněvadž $r = -2p + q$. (Jsme v $\mathbb{R}^3$, tak si nakreslete obrázek!) Tedy $P_1 + P_2 = P_1$ a platí
$$\rho(W_1, W_2) = \rho(a_1 - a_2, P_1 + P_2) = \rho(a_1 - a_2, P_1) = \|a_\perp\|,$$
kde
$$a := a_1 - a_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad a = \underbrace{a_\parallel}_{\in P_1} + \underbrace{a_\perp}_{\in P_1^\perp}.$$
Problém se tedy opět redukuje na výpočet ortogonálního průmětu a do $P_1^\perp$, jenž zde značíme $a_\perp$.

Jako obvykle pišme $a_\parallel = \alpha p + \beta q$, kde konstanty $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je třeba určit. Přenásobením (ve smyslu skalárního součinu) rovnosti $a = a_\parallel + a_\perp$ vektory p, q eliminujeme ortogonální vektor $a_\perp$ a dostaneme soustavu
$$\begin{aligned}\langle a|p\rangle &= \alpha\|p\|^2 + \beta\langle q|p\rangle,\\ \langle a|q\rangle &= \alpha\langle p|q\rangle + \beta\|q\|^2,\end{aligned}$$
kde
$$\|p\|^2 = 2, \qquad \|q\|^2 = 26, \qquad \langle p|q\rangle = 5, \qquad \langle a|p\rangle = 1, \qquad \langle a|q\rangle = 10.$$
Tudíž $\alpha = -\frac{8}{9}$ a $\beta = \frac{5}{9}$, a tedy
$$a_\parallel = -\frac{8}{9}p + \frac{5}{9}q = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}-8\\5\\-17\end{pmatrix}, \qquad a_\perp = a - a_\parallel = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}-1\\-5\\-1\end{pmatrix}.$$
Protože $\|a_\perp\|^2 = \frac{1}{3}$, dostáváme nakonec
$$\rho(a,P) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Cvičení 3

V prostoru $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem

$$\langle x|y\rangle := x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$$

je dána lineární varieta $W \equiv x + 2y - 3z = 2$ a bod $a := \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Určete $\rho(a, W)$.

Varieta W je rovina neprocházející počátkem, pro níž můžeme psát (pozor na nutnost pracovat se zadaným, nestandardním skalárním součinem)

$$W = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ \langle x, n\rangle = \alpha\}, \qquad \text{kde} \qquad \alpha := 2, \quad n := \begin{pmatrix}4\\3\\-3\end{pmatrix}.$$

Vzdálenost bodu a od roviny W pak získáme z užitečného vzorečku (obecně platného pro vzdálenost bodů od nadrovin)

$$\rho(a, W) = \frac{|\langle a, n\rangle - \alpha|}{\|n\|} = \frac{2}{\sqrt{19}},$$

kde jsme dosadili $\|n\|^2 = 19$ a $\langle a, n\rangle = 0$.

Cvičení 4

Určete, jaký úhel svírají lineární variety W_1, W_2 v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$, je-li

$$W_1 \equiv \begin{aligned} x + y + 3z &= 1 \\ x - y - z &= 2 \end{aligned} \qquad \text{a} \qquad W_2 := \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\right]_\lambda.$$

Varieta W_1 je průnik dvou rovin (neprocházejících počátkem). Vyjádřením $x = 1 - y - 3z$ z první rovnice a dosazením do druhé rovnice dostaneme vztah $y = -\frac{1}{2}(1 + 4z)$, z čehož nakonec vydedukujeme, že W_1 je přímka $W_1 = a + [p]_\lambda$ určená vektory

$$a := \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}, \qquad p := \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

Ze zadání rovnou vidíme, že W_2 je rovina (neprocházející počátkem). Úhel mezi přímkou W_1 a rovinou W_2 je definován coby úhel

$$\sphericalangle(W_1, W_2) := \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

kde α je volba mezi úhlem mezi směrovým vektorem p přímky a normálovým vektorem n roviny, nebo úhlem mezi obráceným směrovým vektorem $-p$ přímky a normálovým vektorem n roviny, jež dá *ostrý* úhel, tedy $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Je tedy potřeba nejdříve určit normálový vektor n. Jedna možnost, jak ho zjistit, je přejít od parametrického vyjádření roviny W_2 k vektorovému. Přímočařejší je využít faktu, že vektorový součin dvou vektorů definuje vektor, jenž je kolmý k těmto dvoum vektorům. Pokud za tyto dva vektory vezmeme směrové vektory roviny, dostaneme

$$n = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Nakonec využijeme geometrického vztahu

$$\langle p|n\rangle = \|p\|\|n\| \cos\sphericalangle(p, n),$$

kde $\sphericalangle(p,n)$ značí úhel, jenž svírají vektory p, n. Po dosazení číselných hodnot

$$\|p\|^2 = 6, \qquad \|n\|^2 = 6, \qquad \langle p|n\rangle = -3,$$

dostaneme

$$\cos\sphericalangle(p,n) = -\frac{1}{2}.$$

Poněvadž kosinus vychází záporný, úhel $\sphericalangle(p,n) = \arccos(-\frac{1}{2}) = 2\frac{\pi}{3} \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ je tupý. Ostrého úhlu α bychom docílili, pokud bychom vzali jeden z vektorů p nebo n s opačným znaménkem. Alternativně

$$\cos\alpha = |\cos\sphericalangle(p,n)| = \frac{1}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad \alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Nakonec tedy

$$\sphericalangle(W_1, W_2) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

Cvičení 5

Nechť jsou dány lineární variety W_1, W_2 v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$

$$W_1 \equiv x = 0, \qquad W_2 \equiv 3x - 4y = -12.$$

Najděte všechny body variety W_1, které mají stejnou vzdálenost od bodu $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ a od W_2.

Varieta

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 = 0 \right\} = \left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right]_\lambda$$

je přímka procházející počátkem (osa x_2). Varieta

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ \langle x|n\rangle = \alpha \right\}, \qquad \text{kde} \qquad \alpha := -12, \quad n := \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix},$$

je přímka neprocházející počátkem. (Kreslete ti obrázek!) Nechť $b \in W_1$ je libovolný bod ležící na varietě W_1, tedy

$$b = \begin{pmatrix}0\\b_2\end{pmatrix}, \qquad \text{kde} \qquad b_2 \in \mathbb{R}.$$

Vzdálenost bodu b od počátku 0 je zřejmě

$$\rho(b, 0) = \|b - 0\| = |b_2|.$$

Vzdálenost bodu b od přímky W_2 je

$$\rho(b, W_2) = \frac{|\langle b|n\rangle - \alpha|}{\|n\|} = \frac{|-4b_2 + 12|}{5}.$$

Porovnáním těchto dvou výrazů dostáváme (například umocněním a vyřešením kvadratické rovnice)

$$\rho(b,0) = \rho(b, W_2) \qquad\Longleftrightarrow\qquad \left(b_2 = -12 \quad \vee \quad b_2 = \frac{4}{3} \right).$$

Řešením zadané úlohy jsou tedy právě dva body

$$\left\{ b \in \mathbb{R}^2 : \ \rho(b,0) = \rho(b, W_2) \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}0\\-12\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\frac{4}{3}\end{pmatrix} \right\}.$$

Cvičení 6

V $\mathbb{R}^2$ se skalárním součinem
$$\langle x|y\rangle := 2x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$$
najděte neparametrické rovnice přímky p, která splňuje
(a) $p \parallel W$, kde $W \equiv x - 2y = 3$,
(b) $\rho\left(\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, p\right) = \sqrt{5}$.

Zadání chápeme (možná špatně) tak, že podmínky (a), (b) musí být splněny zároveň.

Varieta W je přímka (neprocházející počátkem)
$$W = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} + P, \qquad \text{kde} \qquad P := \left[\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda.$$
Libovolná přímka p rovnoběžná s W je obecně tvaru
$$p = b + P, \qquad \text{kde} \qquad b := \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$
Tím zaručíme podmínku (a). Podmínka (b):
$$\rho(a, p) = \sqrt{5}, \qquad \text{kde} \qquad a := \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},$$
dále vymezuje vektor b. Z geometrické interpretace (kreslete si obrázek) je zřejmé, že budou existovat dvě takovéto přímky.

Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu, zkonstruujme ortonormální bázi (f_1, f_2) prostoru $\mathbb{R}^2$ splňující
$$f_1 := \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \in P, \qquad f_2 := \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix} \in P^\perp.$$
Pišme
$$a - b = \underbrace{\langle a-b, f_1\rangle f_1}_{(a-b)_\parallel \in P} + \underbrace{\langle a-b, f_2\rangle f_2}_{(a-b)_\perp \in P^\perp},$$
kde explicitně
$$\langle a-b, f_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(-4 - b_1 + 2b_2).$$
Potom
$$\rho(a,p)^2 = \|(a-b)_\perp\|^2 = |\langle a-b, f_2\rangle|^2 = \frac{1}{5}(-4 - b_1 + 2b_2)^2.$$
Podmínka (b) je tedy ekvivalentní rovnici
$$|-4 - b_1 + 2b_2| = 5,$$
jež má nekonečně mnoho řešení, což odpovídá tomu, že vektor posunutí b v parametrickém vyjádření přímky $p = b + P$ není určen jednoznačně. Zafixujme ho speciální volbou $b_2 = 0$, což vede na řešení $b_1 = 1$ nebo $b_1 = -9$. Podle očekávání tedy dostáváme celkem dvě řešení
$$p = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda = \left\{\begin{pmatrix}1+2t\\t\end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 1\right\}$$
nebo
$$p = \begin{pmatrix}-9\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda = \left\{\begin{pmatrix}-9+2t\\t\end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = -9\right\}.$$
Alternativně, ve vašem zvláštním značení, $p \equiv x - 2y = 1$ nebo $p \equiv x - 2y = -9$.

Cvičení 7

Nechť

$$W_1 \equiv \begin{aligned} 2x+y-z &= -3 \\ x-y+4z &= 0 \end{aligned} \qquad \text{a} \qquad W_2 \equiv x-y=0$$

jsou lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$. Nalezněte parametrické rovnice všech přímek p, které procházejí bodem $\begin{pmatrix}1\\7\\9\end{pmatrix}$ a $\sphericalangle(p, W_1) = \frac{\pi}{2}$ a $\sphericalangle(p, W_2) = \frac{\pi}{6}$.

Varieta W_1 je průnik roviny (neprocházející počátkem) $\{2x+y-z=-3\}$ a roviny (procházející počátkem) $\{x-y+4z=0\}$. Vyjádřením $z = 3+2x+y$ z první rovnice a dosazením do druhé rovnice dostaneme vztah $y = -4-3x$. Po zpětném dosazení do první rovnice zároveň platí $z = -1-x$. Nakonec tedy zjišťujeme, že W_1 je přímka (neprocházející počátkem)

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -4-3x \\ -1-x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + \Bigg[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}}_{w_1} \Bigg]_\lambda .$$

Varieta W_2 je rovina (procházející počátkem)

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} : x, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x, z \in \mathbb{R} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda ,$$

jež je alternativně (skrze vztah $n_1x + n_2y + n_3z = 0$) určena normálovým vektorem

$$n := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Všechny přímky p procházející bodem $\begin{pmatrix}1\\7\\9\end{pmatrix}$ mají tvar

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} + \Bigg[\underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}}_{u} \Bigg]_\lambda , \qquad \text{kde} \qquad u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}$$

jsou hledaná čísla, jež určíme z podmínek

$$\text{(a) } \sphericalangle(p, W_1) = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{(b) } \sphericalangle(p, W_2) = \frac{\pi}{6}.$$

$\boxed{\text{ad (a)}}$ Úhel $\sphericalangle(p, W_1)$ mezi přímkami p a W_1 je definován coby volba mezi úhlem mezi směrovými vektory u a w_1, nebo úhlem mezi $-u$ a w_1, jež dá *ostrý* úhel. V našem případě nás ostrost nemusí trápit, protože požadavek (a) zní, že vektory u a w_1 jsou ortogonální, tedy $\langle u|w_1\rangle = 0$. Po dosazení konkrétních hodnot vektorů u a w_1 dostáváme

$$\text{(a)} \qquad \iff \qquad u_1 - 3u_2 - u_3 = 0. \tag{12.2}$$

$\boxed{\text{ad (b)}}$ Úhel $\sphericalangle(p, W_2)$ mezi přímkou p a rovinou W_2 je definován coby úhel $\sphericalangle(p, W_2) := \frac{\pi}{2} - \alpha$, kde α je volba mezi úhlem mezi vektory u a n, nebo úhlem mezi vektory $-u$ a n, jež dá *ostrý* úhel, tedy $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Obecně platí

$$\langle \pm u|n\rangle = \|u\|\|n\| \cos\sphericalangle(\pm u, n),$$

kde $\sphericalangle(\pm u, n) \in [0, \pi]$ je úhel mezi vektory $\pm u$ a n. Poněvadž $\langle \pm u|n\rangle = \pm\langle u|n\rangle$ a $\sphericalangle(-u, n) = \pi - \sphericalangle(u, n)$, můžeme naši zmatenost nad volbou ostrého úhlu vyřešit absolutní hodnotou:

$$|\langle u|n\rangle| = \|u\|\|n\| \cos\alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = \arccos\left(\frac{|\langle u|n\rangle|}{\|u\|\|n\|}\right).$$

Podmínka (b) je ekvivalentní požadavku $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Poněvadž $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, po dosazení konkrétních hodnot vektorů u, n dostáváme

$$\text{(b)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad |u_1 - u_2| = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\,.$$

Bez újmy na obecnosti, můžeme předpokládat, že vektor u je normalizovaný na jedničku, tedy

$$\text{(b)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(|u_1 - u_2| = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \wedge \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1\right). \tag{12.3}$$

$\boxed{\text{Závěr}}$ První z rovnic (12.3) má dvě řešení

$$u_1 = u_2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Po dosazení do rovnice (12.2) dostáváme odpovídající dvě podmínky na třetí složku

$$u_3 = -2u_2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Za těchto podmínek má druhá (normalizační) rovnost v (12.3) odpovídající řešení

$$u_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{6} \quad \vee \quad u_2 = 0.$$

Celkem tedy dostáváme řešení

$$u = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \vee \quad u = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \vee \quad u = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix} \quad \vee \quad u = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}.$$

Zde však druhé řešení je pouze obrácené první řešení, rovněž čtvrté řešení je pouze obrácené třetí řešení. Nakonec tedy dostáváme dvě požadované přímky

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_\lambda \qquad \vee \qquad p = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_\lambda.$$

Domácí úkol 1

Nechť jsou dány lineární variety W_1, W_2 v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$

$$W_1 \equiv \begin{array}{l} x = t \\ y = 0, \\ z = 0 \end{array} \qquad W_2 \equiv \begin{array}{r} x + z = 0 \\ y = -5 \end{array}.$$

Najděte parametrické rovnice všech příček W lineárních variet W_1 a W_2, které splňují $\sphericalangle WW_1 = \frac{\pi}{3}$ a $\sphericalangle WW_2 = \frac{\pi}{2}$, přičemž příčka je přímka, která má neprázdný průnik s W_1 i s W_2.

Nejprve najdeme parametrické rovnice variety W_2:

$$W_2 \equiv \begin{array}{l} x = t \\ y = -5 \\ z = -t. \end{array}$$

Je zřejmé, že W_1 a W_2 mají prázdný průnik. Označíme příčku W následujícím způsobem:

$$W \equiv \begin{array}{l} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \\ z = c + \gamma t. \end{array}$$

Pro zjednosušení výpočtů volíme bez újmy na obecnosti $\|\vec{s}_W\| = 1$, kde $\vec{s}_W$ je směrový vektor příčky W. Tedy

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \tag{12.4}$$

Aby úhel mezi W a W_1 byl roven $\frac{\pi}{3}$, musí platit

$$\frac{|\langle \vec{s}_W | \vec{s}_{W_1} \rangle|}{\|\vec{s}_W\| \|\vec{s}_{W_1}\|} = \frac{1}{2} \Longrightarrow |\alpha| = \frac{1}{2}.$$

Dále, aby úhel mezi W a W_2 byl roven $\frac{\pi}{2}$, máme

$$\frac{|\langle \vec{s}_W | \vec{s}_{W_2} \rangle|}{\|\vec{s}_W\| \|\vec{s}_{W_2}\|} = 0 \Longrightarrow \alpha = \gamma.$$

Dosazením do podmínky (12.4) dostáváme $\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Dohromady tedy máme 2 možnosti, jak by mohl vypadat směrový vektor příčky W

$$\alpha = \gamma = \frac{1}{2} \wedge \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{nebo} \quad \alpha = \gamma = \frac{1}{2} \wedge \beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{12.5}$$

ostatní varianty jsou pouze -1 násobek těchto dvou. Tyto dva případy si vyřešíme zvlášť:

1. $\alpha = \gamma = \frac{1}{2} \wedge \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$: Aby byl průnik variet W a W_1 neprázdný, musí být tato soustava řešitelná:

$$\begin{aligned} x:&\quad a + \frac{1}{2}t = s, \\ y:&\quad b + \frac{1}{\sqrt{2}}t = 0, \\ z:&\quad c + \frac{1}{2}t = 0, \end{aligned}$$

kde $s, t \in \mathbb{R}$. Z posledních dvou rovnic dostáváme podmínku $b = \sqrt{2}c$. (Průnik variet nastává pro hodnotu parametru $t = -2c$. Hodnotu parametru s bychom snadno získali z první rovnice.) Analogicky aby byl průnik variet W a W_2 neprázdný, musí být následující soustava řešitelná:

$$\begin{aligned} x:&\quad a + \frac{1}{2}t = s, \\ y:&\quad b + \frac{1}{\sqrt{2}}t = -5, \\ z:&\quad c + \frac{1}{2}t = -s, \end{aligned}$$

kde $s, t \in \mathbb{R}$. Sečtením první a poslední rovnice zjistíme, že průnik těchto přímek nastává pro $t = -a-c$. Využitím podmínky $b = \sqrt{2}c$ a dosazením za t do druhé rovnice dostáváme $c = a - 5\sqrt{2}$. (Hodnotu druhého parametru s bychom získali dosazením výsledků do první nebo druhé rovnice.) Příčky W jsou tedy v tomto případě popsány parametrickými rovnicemi

$$W \equiv \begin{aligned} x &= a + \frac{1}{2}t \\ y &= \sqrt{2}a - 10 + \frac{1}{\sqrt{2}}t \\ z &= a - 5\sqrt{2} + \frac{1}{2}t, \end{aligned}$$

kde $a \in \mathbb{R}$.

2. $\alpha = \gamma = \frac{1}{2} \wedge \beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$: Aby byl průnik variet W a W_1 neprázdný, musí být tato soustava řešitelná:

$$\begin{aligned} x: &\quad a + \frac{1}{2}t = s, \\ y: &\quad b - \frac{1}{\sqrt{2}}t = 0, \\ z: &\quad c + \frac{1}{2}t = 0, \end{aligned}$$

kde $s, t \in \mathbb{R}$. Z posledních dvou rovnic dostáváme podmínku $b = -\sqrt{2}c$. (Průnik variet nastává opět pro hodnotu parametru $t = -2c$.) A znovu, aby byl průnik variet W a W_2 neprázdný, musí být následující soustava řešitelná:

$$\begin{aligned} x: &\quad a + \frac{1}{2}t = s, \\ y: &\quad b - \frac{1}{\sqrt{2}}t = -5, \\ z: &\quad c + \frac{1}{2}t = -s, \end{aligned}$$

kde $s, t \in \mathbb{R}$. Sečtením první a poslední rovnice zjistíme, že průnik těchto přímek nastává opět pro $t = -a - c$. Využitím podmínky $b = -\sqrt{2}c$ a dosazením za t do druhé rovnice dostáváme v tomto případě $c = a + 5\sqrt{2}$. Příčky W jsou tedy v tomto případě popsány parametrickými rovnicemi

$$W \equiv \begin{aligned} x &= a + \frac{1}{2}t \\ y &= -\sqrt{2}a - 10 - \frac{1}{\sqrt{2}}t \\ z &= a + 5\sqrt{2} + \frac{1}{2}t, \end{aligned}$$

kde $a \in \mathbb{R}$.

13 Rieszova věta a sdružený operátor

Cvičení 1

Nechť $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$, kde $\mathbb{C}^3$ je unitární prostor. Najděte $z \in \mathbb{C}^3$ tak, že pro každé $x \in \mathbb{C}^3$ platí $\varphi(x) = \langle x|z\rangle$.

$$\varphi(x) := 2x_1 + ix_2 - 4x_3 \qquad \text{pro každé} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Z Rieszovy věty víme, že hledaný vektor

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

existuje a že je právě jeden. Jak ho prakticky najít? Na první pohled nás totiž trápí, že máme jednu rovnici $\varphi(x) = \langle x|z\rangle$ pro tři neznámé $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Trik je využít libovolnosti volby vektoru x. Pokud za něj postupně zvolíme například vektory standardní báze, dostaneme tři rovnice

$$\begin{aligned} 2 &= \varphi(e_1) = \langle e_1|z\rangle = \overline{z_1}, \\ i &= \varphi(e_2) = \langle e_2|z\rangle = \overline{z_2}, \\ -4 &= \varphi(e_3) = \langle e_3|z\rangle = \overline{z_3}. \end{aligned}$$

Odtud rovnou vidíme, že (pozor na komplexní sdružení)

$$z = \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 2

Nechť $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^\#$ se skalárním součinem

$$\langle x|y\rangle := x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2 \qquad \text{pro každé} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Dále $\varphi(x) := \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3$, kde

$$(x)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{X} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Najděte $z \in \mathbb{R}^3$ tak, že pro každé $x \in \mathbb{R}^3$ platí $\varphi(x) = \langle x|z\rangle$.

Toto cvičení je analogické předchozímu, jen je potřeba si uvědomit vztahy

$$(e_1)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (e_2)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad (e_3)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

a dát pozor na nestandardní skalární součin, jejichž účel je pouze zmást studenta. Po překonání těchto obstrukcí dojdeme k rovnicím

$$\begin{aligned} -1 &= \varphi(e_1) = \langle e_1|z\rangle = z_1 + z_2, \\ 3 &= \varphi(e_2) = \langle e_2|z\rangle = 2z_2 + z_1 - z_3, \\ -1 &= \varphi(e_3) = \langle e_3|z\rangle = 2z_3 - z_2. \end{aligned}$$

Vyřešením této soustavy dostaneme

$$z = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 3

V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány podprostory

$$P \equiv \begin{matrix} x + y & = 0 \\ z & = 0 \end{matrix}, \qquad Q \equiv x - y = 0.$$

Nechť $\mathcal{X} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$. A_P je projektor na P podle Q. Sestavte ${}^{\mathcal{X}}(A_P^*)$.

Varieta P je přímka

$$P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

Varieta Q je rovina

$$Q = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

Z těchto vztahů rovnou vidíme, že $Q = P^\perp$, $P = Q^\perp$ a $\mathbb{R}^3 = P \oplus Q$. Projektor A_P je tudíž *ortogonální* ($A_P = A_P^*$) a splňuje (tečka nahrazuje vektor, na který operátor A_P působí)

$$A_P = \langle \cdot | p \rangle \, p, \qquad \text{kde} \qquad p := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

protože (p) je ortonormální báze prostoru P.

Pišme $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$, kde

$$x_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Z akce projektoru A_P na vektory zadané báze

$$\begin{aligned} A_P^* x_1 = A_P x_1 = 0 \qquad &= 0x_1 + 0x_2 + 0x_3, \\ A_P^* x_2 = A_P x_2 = x_2 \qquad &= 0x_1 + 1x_2 + 0x_3, \\ A_P^* x_3 = A_P x_3 = \frac{1}{2} x_2 \qquad &= 0x_1 + \frac{1}{2} x_2 + 0x_3, \end{aligned}$$

nakonec zkonstruujeme hledanou matici

$${}^{\mathcal{X}}(A_P^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 4

Nechť $a \in \mathbb{R}^3$, kde $\mathbb{R}^3$ je eukleidovský prostor. Dále pro každé $x \in \mathbb{R}^3$ je definováno $Ax := x \times a$.

1. Je $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$?
2. Je A diagonalizovatelný?
3. Je A normální?
4. Je A regulární?

$\boxed{a = 0}$

Pokud $a = 0$, pak A je nulové zobrazení, tudíž diagonalizovatelné, normální a singulární. V následujícíh úvahách tedy vždy předpokládejme, že $a \neq 0$.

$\boxed{a \neq 0}$

ad (a): ANO

Pišme

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Podle definice vektorového součinu platí

$$Ax = \begin{pmatrix} x_2a_3 - x_3a_2 \\ x_3a_1 - x_1a_3 \\ x_1a_2 - x_2a_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že akci A můžeme reprezentovat maticovým násobením, tudíž se jedná o lineární zobrazení. Matice $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{E}}A$ je čtvercová a stupně 3, tudíž se jedná o operátor na $\mathbb{R}^3$.

ad (b): NE

Komplexní matice $i\mathbb{A}$ je samosdružená ($(i\mathbb{A})^* = i\mathbb{A}$), tudíž diagonalizovatelná a její spektrum je čistě reálné. Poněvadž $\det \mathbb{A} = 0$, vidíme, že alespoň jedna vlastní hodnota matice $i\mathbb{A}$ je nulová. Zároveň lze však snadno ověřit (lze použít vyšetření hodnosti pomocí subdeterminantů), že hodnost matice $i\mathbb{A}$ je dva (za našeho předpokladu $a \neq 0$). Tudíž matice $i\mathbb{A}$ má právě jednu nulovou vlastní hodnotu, ostatní dvě vlastní hodnoty $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(i\mathbb{A})$ jsou reálné a nenulové. Jelikož $\operatorname{tr} \mathbb{A} = 0$, musí platit $\lambda_1 = -\lambda_2 \neq 0$. To vše jsme zjistili, aniž bychom spektrum matice $i\mathbb{A}$ počítali. (Pro zajímavost nalezněte λ_1, λ_2 explicitním výpočtem.)

Matice $\mathbb{A} = -i(i\mathbb{A})$ má tedy jednu nulovou vlastní hodnotu a dvě vlastní hodnoty s *nenulovou* imaginární částí. Z toho plyne, že operátor A na $\mathbb{R}^3$ není diagonalizovatelný, protože spektrum generující matice $\mathbb{A}$ není čistě reálné. (Operátor $\tilde{A} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 : \{x \mapsto \mathbb{A}x\}$ však diagonalizovatelný je.)

Alternativně bychom mohli použít čistě geometrickou úvahu, že vektorový součin $x \times a$ definuje vektor, jenž je zároveň kolmý k x i a. Rovnice na vlastní hodnoty $Ax = x \times a = \lambda x$ tedy požaduje nalezení nenulového vektoru $x \in \mathbb{R}^3$, jenž je kolmý sám k sobě ($\lambda \neq 0$), což je nemožné, nebo $x \times a = 0$ ($\lambda = 0$), čemuž odpovídá právě jeden vlastní vektor $x = a \parallel a$ (pořád předpokládáme $a \neq 0$). Tedy rovnou $\sigma(A) = \{0\}$. Avšak $\ker(A - 0I) = [a]_\lambda$, z čehož plyne $\dim \ker(A - 0I) = 1 < 3$, tudíž A není diagonalizovatelný.

ad (c): ANO

Připomeňme, že normálnost operátoru A znamená, že komutuje se sdruženým zobrazením:

$$[A, A^*] := AA^* - AA^* = 0.$$

Poněvadž $\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^T = -\mathbb{A}$, rovnou vidíme, že $A^* = -A$. Komutativita A s $-A$ je však triviální.

ad (d): NE

Operátor A není regulární, jelikož $0 \in \sigma(A)$.

Cvičení 5

Nechť D je operátor derivování na $\mathcal{P}_3$ se skalárním součinem

$$\langle x|y\rangle := \alpha_0\overline{\beta_0} + \alpha_1\overline{\beta_1} + \alpha_2\overline{\beta_2},$$

kde $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$ a $y(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Nechť $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je báze $\mathcal{P}_3$, kde

$$x_1(t) := \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t, \qquad x_2(t) := t^2 - 1, \qquad x_3(t) := \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t,$$

pro každé $t \in \mathbb{C}$. Najděte ${}^{\mathcal{X}}(D^*)$.

Podle definice sdruženého operátoru platí rovnost

$$\forall x, y \in \mathcal{P}_3, \qquad \langle x|Dy\rangle = \langle D^*x|y\rangle.$$

Pišme

$$\forall t \in \mathbb{C}, \qquad \begin{aligned} x(t) &=: \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2, \\ y(t) &=: \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2, \end{aligned}$$

kde $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ jsou konstanty, jimiž jsou tyto libovolné polynomy zadané. Z definice operátoru derivování D víme, jak polynom Dy vypadá:

$$\forall t \in \mathbb{C}, \qquad (Dy)(t) = \beta_1 + 2\beta_2 t.$$

Tedy

$$\langle x|Dy\rangle = \alpha_0\overline{\beta_1} + \alpha_1\overline{2\beta_2} = \alpha_0\overline{\beta_1} + 2\alpha_1\overline{\beta_2}. \tag{13.1}$$

Akci sdruženého operátoru D^* neznáme, proto pro polynom D^*x pišme:

$$\forall t \in \mathbb{C}, \qquad (D^*x)(t) =: \gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2,$$

kde $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$ jsou hledané konstanty. Potom

$$\langle D^*x|y\rangle = \gamma_0\overline{\beta_0} + \gamma_1\overline{\beta_1} + \gamma_2\overline{\beta_2}. \tag{13.2}$$

Porovnáním (13.1) s (13.2) a využitím libovolnosti konstant $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ zjistíme, že nezbytně

$$\gamma_0 = 0, \qquad \gamma_1 = \alpha_0, \qquad \gamma_2 = 2\alpha_1.$$

Tedy

$$\forall t \in \mathbb{C}, \qquad (D^*x)(t) = \alpha_0 t + 2\alpha_1 t^2.$$

Aplikací nalezeného sdruženého operátoru na prvky zadané báze

$$\begin{aligned}
(D^*x_1)(t) &= 0t + 2(-\tfrac{1}{2})t^2 = -t^2 = -[x_1(t) + x_3(t)] &&= -1x_1(t) + 0x_2(t) - 1x_3(t), \\
(D^*x_2)(t) &= -1t + 2.0t^2 = -t = x_1(t) - x_3(t) &&= +1x_1(t) + 0x_2(t) - 1x_3(t), \\
(D^*x_3)(t) &= 0t + 2\tfrac{1}{2}t^2 = t^2 = x_1(t) + x_3(t) &&= +1x_1(t) + 0x_2(t) + 1x_3(t),
\end{aligned}$$

nakonec zkonstruujeme hledanou matici

$${}^{\mathcal{X}}(D^*) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 6

Nechť $\mathcal{X} := \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}\right)$ je báze unitárního prostoru $\mathbb{C}^2$, $A \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$ a ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Najděte ${}^{\mathcal{X}}(A^*)$ jak pomocí věty o matici sdruženého operátoru, tak i nějakým jiným způsobem.

Aplikace věty o matici sdruženého operátoru

Pomocí matice přechodu nalezneme matici operátoru A vzhledem k nějaké ortonormální bázi, například standardní:

$$^{\mathcal{E}}A = {}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{E}}\ {}^{\mathcal{X}}A\ {}^{\mathcal{E}}I^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{i} \begin{pmatrix} i & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1-2i & 1+2i \end{pmatrix}.$$

Aplikujeme fakt, že matici sdruženého operátoru vzhledem k ortonormální bázi dostaneme sdružením matice operátoru vzhledem k té samé bázi:

$$^{\mathcal{E}}(A^*) = ({}^{\mathcal{E}}A)^* = -\frac{1}{i} \begin{pmatrix} -2 & -1+2i \\ 1 & 1-2i \end{pmatrix}.$$

Pomocí matice přechodu přejdeme zpět k neortonormální bázi $\mathcal{X}$:

$$^{\mathcal{X}}(A^*) = {}^{\mathcal{E}}I^{\mathcal{X}}\ {}^{\mathcal{E}}(A^*)\ {}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{E}} = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1-2i & 1+2i \end{pmatrix} \frac{-1}{i} \begin{pmatrix} -2 & -1+2i \\ 1 & 1-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-3i & 1-2i \\ 5-4i & 4+2i \end{pmatrix}.$$

Jiný způsob (podle definice)

Pro libovolné vektory $x, y \in \mathbb{C}^2$ platí $\langle x|Ay\rangle = \langle A^*x|y\rangle$, kde

$$\begin{aligned} \langle x|Ay\rangle &= x^T\ \overline{Ay} = \left[{}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{E}}\ (x)_{\mathcal{X}}\right]^T\ \overline{{}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{E}}\ {}^{\mathcal{X}}A\ (y)_{\mathcal{X}}} = (x)_{\mathcal{X}}^T\ ({}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{E}})^T\ \overline{{}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{E}}}\ \overline{{}^{\mathcal{X}}A}\ (y)_{\mathcal{X}}, \\ \langle A^*x|y\rangle &= (A^*x)^T\ \overline{y} = \left[{}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{E}}\ {}^{\mathcal{X}}(A^*)\ (x)_{\mathcal{X}}\right]^T\ \overline{{}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{E}}\ (y)_{\mathcal{X}}} = (x)_{\mathcal{X}}^T\ [{}^{\mathcal{X}}(A^*)]^T\ ({}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{E}})^T\ \overline{{}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{E}}}\ (y)_{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

Porovnáním těchto dvou vztahů a využitím libovolnosti vektorů x, y dostaneme maticovou identitu

$$M\ \overline{{}^{\mathcal{X}}A} = [{}^{\mathcal{X}}(A^*)]^T\ M, \qquad \text{kde} \qquad M := ({}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{E}})^T\ \overline{{}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{E}}}.$$

Užitím invertibilnosti matice M (proč je invertibilní?) nakonec

$$^{\mathcal{X}}(A^*) = \left[M\ \overline{{}^{\mathcal{X}}A}\ M^{-1}\right]^T.$$

Toto je obecný vztah, zatím jsme nevyužili konkrétně zadaných hodnot, ani dimenze prostoru nehrála jakoukoli roli.

V našem případě snadno ověříme, že

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}^T \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}.$$

Užitím těchto matic a zadané matice $^{\mathcal{X}}A$ přímočaré maticové násobení dá

$$M\ \overline{{}^{\mathcal{X}}A}\ M^{-1} = \begin{pmatrix} -2-3i & 5-4i \\ 1-2i & 4+2i \end{pmatrix}.$$

Nakonec pouhá transpozice:

$$^{\mathcal{X}}(A^*) = \begin{pmatrix} -2-3i & 1-2i \\ 5-4i & 4+2i \end{pmatrix}.$$

Cvičení 7

Nechť $\mathcal{X}$ je ON báze $\mathcal{H}_2$ nad $\mathbb{C}$. Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{C}$ tak, aby $A \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_2)$ byl unitární.

(a) $^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \alpha \end{pmatrix}$.

Připomeňme, že unitárnost operátoru A znamená $A^{-1} = A^*$. Poněvadž je báze $\mathcal{X}$ ortonormální, platí

$$({}^{\mathcal{X}}A)^* = {}^{\mathcal{X}}(A^*).$$

Zároveň platí (zde ortonormalitu nepotřebujeme)

$$({}^{\mathcal{X}}A)^{-1} = {}^{\mathcal{X}}(A^{-1}).$$

Porovnáním těchto vztahů vidíme, že operátor A je unitární tehdy a jen tehdy, pokud matice ${}^{\mathcal{X}}A$ je unitární, tedy

$$({}^{\mathcal{X}}A)^{-1} = ({}^{\mathcal{X}}A)^*.$$

Ověření této rovnosti je však rutinní záležitost.

ad (a)

Poněvadž $\det({}^{\mathcal{X}}A) = \alpha$, matice ${}^{\mathcal{X}}A$ je invertibilní tehdy a jen tehdy, pokud $\alpha \neq 0$. Tato podmínka je nezbytná pro unitárnost. Nechť tedy $\alpha \neq 0$. Pak

$$({}^{\mathcal{X}}A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad ({}^{\mathcal{X}}A)^* = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Porovnáním těchto matic vidíme, že A je unitární tehdy a jen tehdy, pokud

$$\frac{1}{\alpha} = \overline{\alpha} \quad \wedge \quad 0 = 1 \quad \wedge \quad -\frac{1}{\alpha} = 0 \quad \wedge \quad 1 = 1.$$

Poněvadž druhá (ani třetí) podmínka je nesplnitelná, vidíme, že A není unitární pro jakoukoli volbu α:

$$\{\alpha \in \mathbb{C} : \ A \text{ unitární}\} = \varnothing.$$

ad (b)

Poněvadž $\det({}^{\mathcal{X}}A) = \alpha^2 + \frac{1}{4}$, matice ${}^{\mathcal{X}}A$ je invertibilní tehdy a jen tehdy, pokud $\alpha \neq \pm\frac{i}{2}$. Tato podmínka je nezbytná pro unitárnost. Nechť tedy $\alpha \neq \pm\frac{i}{2}$. Pak

$$({}^{\mathcal{X}}A)^{-1} = \frac{1}{\alpha^2 + \frac{1}{4}}\begin{pmatrix} \alpha & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \alpha \end{pmatrix}, \qquad ({}^{\mathcal{X}}A)^* = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Porovnáním těchto matic vidíme, že A je unitární tehdy a jen tehdy, pokud

$$\frac{\alpha}{\alpha^2 + \frac{1}{4}} = \overline{\alpha} \quad \wedge \quad \frac{-\frac{1}{2}}{\alpha^2 + \frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} \quad \wedge \quad \frac{\frac{1}{2}}{\alpha^2 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad \frac{\alpha}{\alpha^2 + \frac{1}{4}} = \overline{\alpha}.$$

Zde druhá a třetí podmínka jsou ekvivalentní a jsou splněny tehdy a jen tehdy, pokud $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ nebo $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dosazením do první podmínky (jež je identická se čtvrtou) vidíme, že obě možnosti $\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ vyhovují i této podmínce. Nakonec tedy

$$\{\alpha \in \mathbb{C} : \ A \text{ unitární}\} = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

Cvičení 8

Nechť $\mathcal{X}$ je ON báze $\mathcal{H}_3$ nad $\mathbb{C}$, $A \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_3)$, ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Najděte ON bázi $\mathcal{Y}$, v níž má A diagonální tvar.

Není úplně jasné, proč se tento příklad vyskytuje v této kapitolce, jedině snad proto, že je *a priori* jasné, že řešení existuje, poněvadž matice ${}^{\mathcal{X}}\!A$ je hermitovská, tudíž operátor A je samosdružený, a tak víme, že jeho spektrum je čistě reálné a vlastní vektory lze zvolit tak, že tvoří ortonormální bázi.

Obvyklá spektrální analýza odhalí

$$\sigma({}^{\mathcal{X}}\!A) = \{2,4\}, \qquad u_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{(4),1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_{(4),2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vlastní vektory jsme zvolili tak, že soubor $(u_{(2)}, u_{(4),1}, u_{(4),2})$ je ortonormální báze $\mathbb{C}^3$. (Ortogonalita vlastních vektorů odpovídajících *různým* vlastním číslům je automatická, speciální volbu je nutno provést pouze pro vektory odpovídající čtyřce, jež je degenerovaná.) Ortonormální báze $\mathcal{Y} = (y_1, y_2, y_3)$, vzhledem k níž je matice ${}^{\mathcal{Y}}\!A$ diagonální, je dána vektory

$$(y_1)_{\mathcal{X}} = u_{(2)}, \qquad (y_2)_{\mathcal{X}} = u_{(4),1}, \qquad (y_3)_{\mathcal{X}} = u_{(4),2}.$$

Platí diagonalizační formulka

$${}^{\mathcal{X}}\!A = Q\, {}^{\mathcal{Y}}\!A\, Q^{-1}, \qquad \text{kde} \qquad {}^{\mathcal{Y}}\!A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad Q = {}^{\mathcal{Y}}\!I^{\mathcal{X}} = (u_{(2)}\ u_{(4),1}\ u_{(4),2}).$$

Namísto Q^{-1} bychom mohli psát Q^*, protože vlastní vektory jsme zvolili ortonormální, tudíž matice Q je unitární.

Cvičení 9

Nechť $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, kde $\mathbb{R}^3$ je eukleidovský.

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

A je ortogonální a $\det A < 0$. Najděte ${}^{\mathcal{E}}\!A$.

Pišme

$$b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad c_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pak $Ab_1 = c_1$ a $Ab_2 = c_2$. Pro určení akce operátoru A na libovolný vektor z $\mathbb{R}^3$, užitím linearity, bychom potřebovali znát, jak funguje ještě na nějaký třetí lineárně nezávislý vektor b_3. K tomu využijeme extra informace, že A je ortogonální (=unitární). Definujme

$$b_3 := b_1 \times b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad Ab_3 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} =: c_3,$$

kde koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ vektoru c_3 je potřeba určit. Poněvadž $b_3 \perp b_1$ a $b_3 \perp b_2$, platí

$$\begin{aligned} 0 &= \langle b_1|b_3\rangle = \langle Ab_1|Ab_3\rangle = \langle c_1|c_3\rangle = -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \\ 0 &= \langle b_2|b_3\rangle = \langle Ab_2|Ab_3\rangle = \langle c_2|c_3\rangle = -\alpha_1 - \alpha_2, \end{aligned}$$

kde druhé rovnosti platí díky ortogonalitě. Vyřešením této soustavy dostaneme

$$c_3 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ortogonalita navíc implikuje

$$6 = \|b_3\|^2 = \|Ab_3\|^2 = \|c_3\|^2 = 6\alpha_1^2,$$

z čehož plyne, že $\alpha_1 = 1$ nebo $\alpha_1 = -1$. Tím jsme akci A na vektor b_3 jednoznačně určili, až na znaménko α_1.

Poznámka. Už v této fázi bychom znaménko α_1 mohli určit z extra informace, že $\det A$ je záporný. Vskutku, z geometrické interpretace determinantu coby objemu rovnoběžnostěnu a faktu, že změna objemu při lineární transformaci je určena determinantem transformace, platí

$$\det(c_1, c_2, c_3) = \det(Ab_1, Ab_2, Ab_3) = \det(A)\ \det(b_1, b_2, b_3).$$

Poněvadž pro naše vektory platí $\det(c_1, c_2, c_3) = 6\alpha_1$ a $\det(b_1, b_2, b_3) = 6$, musí platit $\det(A) = \alpha_1$. Tedy $\alpha_1 = -1$. (Alternativně bychom mohli spočíst determinant matice ${}^{\mathcal{B}}A$, kde $\mathcal{B} := (b_1, b_2, b_3)$, což vyžaduje vyjádřit vektory c_1, c_2, c_3 coby lineární kombinace vektorů b_1, b_2, b_3.) Určení znaménka α_1 však také můžeme nechat až na konec.

Poněvadž naším úkolem je určit matici ${}^{\mathcal{E}}A$, musíme zjistit, jak operátor A funguje na vektorech standardní báze $\mathcal{E} := (e_1, e_2, e_3)$, přičemž jeho akci známe na vektorech báze $\mathcal{B} := (b_1, b_2, b_3)$. Za tímto účelem musíme vyjádřit vektory e_1, e_2, e_3 coby lineární kombinace vektorů b_1, b_2, b_3. Standardním postupem zjistíme, že

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{3}b_1 + \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{6}b_3, \\ e_2 &= \frac{1}{3}b_1 + 0b_2 + \frac{1}{3}b_3, \\ e_3 &= \frac{1}{3}b_1 - \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{6}b_3. \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} Ae_1 &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1-\alpha_1 \\ -5-\alpha_1 \\ 2-2\alpha_1 \end{pmatrix}, \\ Ae_2 &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1+\alpha_1 \\ -1+\alpha_1 \\ 1+2\alpha_1 \end{pmatrix}, \\ Ae_3 &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5-\alpha_1 \\ 1-\alpha_1 \\ 2-2\alpha_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tedy

$${}^{\mathcal{E}}A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1-\alpha_1 & -2+2\alpha_1 & -5-\alpha_1 \\ -5-\alpha_1 & -2+2\alpha_1 & 1-\alpha_1 \\ 2-2\alpha_1 & 2+4\alpha_1 & 2-2\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Přímým výpočtem zjistíme, že $\det({}^{\mathcal{E}}A) = \alpha_1$. Poněvadž $\det(A) = \det({}^{\mathcal{E}}A)$ má být záporný, nezbytně $\alpha_1 = -1$. Nakonec tedy

$${}^{\mathcal{E}}A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 10

Nechť $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, kde $\mathbb{R}^3$ je eukleidovský.

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix},$$

A je symetrický a má 2-násobné záporné vlastní číslo. Najděte ${}^{\mathcal{E}}A$.

Pišme

$$b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad b_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad c_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad c_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Pak $Ab_1 = c_1$ a $Ab_2 = c_2$. Sečteme-li tyto definiční vztahy a všimneme-li si, že $b_1 + b_2 = c_1 + c_2 = 8e_3$, pak učiníme kruciální pozorování, že

$$Ae_3 = 1e_3.$$

Tedy $1 \in \sigma(A)$ a e_3 je odpovídající vlastní vektor. Tato vlastní hodnota musí být jednoduchá, jelikož ze zadání víme, že ostatní vlastní hodnoty jsou záporné. Ve skutečnosti víme, že $\sigma(A) = \{1, \lambda\}$, kde $\lambda < 0$ je degenerovaná. Poněvadž ze zadání víme, že A je symetrický (=samosdružený), lze volit vlastní vektory ortogonální. Nezbytně tedy $\ker(A-\lambda I) = [e_1, e_2]_\lambda$; bazické vektory e_1, e_2 jsou vlastní vektory A odpovídající degenerované vlastní hodnotě λ. Zbývá určit, kolik je λ. Za tímto účelem si všimneme, že $3b_1 - b_2 = 4(e_1 + e_2) \in \ker(A - \lambda I)$ a

$$A(3b_1 - b_2) = 3c_1 - c_2 = -4(e_1 + e_2) = -(3b_1 - b_2).$$

Tudíž $\lambda = -1$. Nakonec tedy

$$^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$