LAA1 - řešení příkladů

David Krejčiřík

http://nsa.fjfi.cvut.cz/david/

9. listopadu 2021

Přečtěte si informace k udělení zápočtu a skládání zkoušek na stránce:

http://kmlinux.fjfi.cvut.cz/~ambrop1/?loc=lna1&lg=cs

Obsah

1 Soustavy lineárních algebraických rovnic

V celé kapitole budeme uvažovat pouze reálná čísla.

Z teorie je třeba znát pojmy: soustava m lineárních algebraických rovnic o n neznámých, (rozšířená) matice soustavy, homogenní soustava, triviální a netriviální řešení homogenní soustavy, ekvivalentní úpravy. Dále je třeba umět rozhodnout, zda je soustava řešitelná, a pokud ano, najít jedno řešení.

Cvičení 1

Rozhodněte, zda je soustava řešitelná, a pokud ano, najděte jedno řešení.

(a)

$$\begin{array}{rrrl} x & -y & & = 1 \\ 2x & -2y & & = 2 \\ & y & -3z & = 0 \end{array} \tag{1.1}$$

(b)

$$\begin{array}{rrrl} x & -y & & = 1 \\ 2x & -2y & & = 3 \\ & y & -3z & = 0 \end{array} \tag{1.2}$$

(c)

$$\begin{array}{rrrl} x & -y & & = 1 \\ & y & -3z & = 0 \end{array} \tag{1.3}$$

ad (a)

Zde máme tři rovnice ($m = 3$) o třech neznámých ($n = 3$, neznámé jsou $x, y, z \in \mathbb{R}$). Jedná se o nehomogenní soustavu, poněvadž pravá strana

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

není nulová uspořádaná trojice. Demonstrujme si na tomto příkladu různé metody řešení. Značme množinu řešení takovýmto způsobem:

$$\check{\mathfrak{R}} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \; x, y, z \quad \text{řeší} \quad (1.1) \right\}.$$

$\boxed{\text{Metoda substituce.}}$ Ze školy znáte elementární metodu, kdy se z jedné rovnice vyjádří jedna neznámá pomocí ostatních neznámých a dosadí do ostatních rovnic. Tímto způsobem se zmenší počet neznámých i počet rovnic. Iterací tohoto postupu se nakonec dojde k úplnému vyřešení soustavy.

Například z třetí rovnice (1.1) vyjádříme $y = 3z$ a dosazením do zbývajících rovnic dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{array}{rrl} x & -3z & = 1 \\ 2x & -6z & = 2 \end{array}$$

V dalším kroku z první rovnice vyjádříme $x = 1+3z$ a dosazením do druhé rovnice dostaneme jednu rovnici o jedné neznámé

$$2(1 + 3z) - 6z = 2\,.$$

Roznásobením závorky se snadno přesvědčíme, že levá strana je rovna číslu 2 (nezávisí na z), jež zároveň stojí na pravé straně, tudíž tato rovnice je vždy splněna (bez ohledu na to, jaké hodnoty neznámá z nabývá). Tudíž z je volný parametr, jehož hodnotu lze zvolit libovolně. Avšak jakákoli tato libovolná volba pak fixuje hodnotu ostatních neznámých pomocí výše uvedených substitucí:

$$x = 1 + 3z\,, \qquad y = 3z\,, \qquad z \in \mathbb{R}\,.$$

Můžeme tedy psát

$$\check{\mathfrak{R}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1+3z \\ 3z \\ z \end{pmatrix} \,:\, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \,:\, z \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ z \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \,:\, z \in \mathbb{R} \right\}. \tag{1.4}$$

Jinou substitucí bychom došli k jinak parametrizovanému výsledku (geometricky je toto zřejmé, poněvadž (1.1) definuje přímku v $\mathbb{R}^2$ (nakreslete si obrázek), kterou můžeme parametrizovat různým způsobem).

$\boxed{\text{Gaussova eliminační metoda.}}$ Jiná možnost, jak se zbavit neznámých, je vynásobit nějakou rovnici nějakým (nenulovým) číslem a přičíst ji k nějaké jiné rovnici. Například první rovnici v (1.1) vynásobíme číslem -2 a přičteme k druhé rovnici, čímž dostaneme novou soustavu

$$\begin{array}{rrrl} x & -y & & = 1 \\ & & 0 & = 0 \\ & y & -3z & = 0 \end{array}$$

kde poslední dvě rovnice už neobsahují neznámou x (v tomto konkrétním případě se z druhé rovnice stane triviální rovnost). Tuto soustavu lze už rovnou řešit: z poslední rovnice vyjádříme $y = 3z$ a po dosazení do první rovnice dostaneme $x = 1 + 3z$, $z \in \mathbb{R}$ je opět volný parametr. Dostáváme tedy řešení ve stejném tvaru jako (1.4).

$\boxed{\text{Maticová metoda.}}$ Tato metoda je pouze zmechanizování Gaussovy eliminační metody. Povšimněme si, že pro úpravy v předchozí metodě nehrála písmenka x, y, z žádnou roli. Soustavu (1.1) tedy reprezentujeme jako tabulku (zvanou matice)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

a výše uvedené úpravy (zde modře) aplikujeme pouze na čísla v tabulce

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} .(-2) \\ + \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \updownarrow \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{1.5}$$

Zde poslední úprava je pouze prohození řádků (řešení soustavy rovnic se nezmění, pokud nějaké rovnice prohodíme), abychom výslednou matici měli v takzvaném horním stupňovitém tvaru (pod diagonálou jsou samé nuly). Proč? Protože odpovídající soustavu

$$\begin{array}{rrrl} x & -y & & = 1 \\ & y & -3z & = 0 \\ & & 0 & = 0 \end{array}$$

můžeme rovnou řešit jako výše.

Všimněte si, že je výhodné mít na prvním místě tabulky jedničku.

Kromě řádků lze prohazovat i sloupce, ale v tomto případě nesmíme zapomenout, že došlo k prohození pořadí písmenek x, y, z.

Pro velké soustavy je maticová metoda obvykle nejefektivnější.

ad (b)

Levá strana soustavy je stejná jako v případě (b), avšak pravá strana se liší. Stejné úpravy jako výše

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} .(-2) \\ + \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \updownarrow \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Když výslednou tabulku přepíšeme zpět do soustavy rovnic, vidíme, že v tomto případě jsme původní soustavu převedli na ekvivalentní soustavu

$$\begin{array}{rrrl} x & -y & & = 1 \\ & y & -3z & = 0 \\ & & 0 & = 1 \end{array}$$

Z poslední rovnice vidíme, že soustava je neřešitelná, tedy

$$\check{\mathfrak{R}} = \varnothing.$$

ad (c)

Zde jsme v naprosto stejné situaci jako v případě (a), protože druhá rovnice v (1.1) je pouze dvojnásobkem první rovnice (je takzvaně závislá), tudíž ji lze ze soustavy vynechat. Ekvivalentně vidíme, že matice soustavy (1.3)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

je ekvivalentní poslední matici v (1.5) (stačí přidat nulový řádek). Řešení lze tedy opět psát ve tvaru (1.4).

Cvičení 2

Rozhodněte, zda je soustava řešitelná, a pokud ano, najděte jedno řešení.

(a)

$$\begin{array}{rrl} x & +2y & = -1 \\ x & +y & = 2 \\ -2x & +y & = -1 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrl} x & -2y & = -1 \\ x & +y & = 2 \\ -2x & +y & = -1 \end{array}$$

ad (a)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{cc} .(-1) & .2 \\ + & \\ & + \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ .5 \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 12 \end{array}\right).$$

Po těchto úpravách tedy dostáváme ekvivalentní systém

$$\begin{array}{rrl} x & +2y & = -1 \\ & -y & = 3 \\ & 0 & = 12 \end{array}$$

Z poslední rovnice vidíme, že soustava nemá řešení, tedy $\check{\mathfrak{R}} = \varnothing$.

ad (b)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{cc} .(-1) & .2 \\ + & \\ & + \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ :3 \\ :(-3) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ .(-1) \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Po těchto úpravách tedy dostáváme ekvivalentní systém

$$\begin{array}{rrl} x & -2y & = -1 \\ & y & = 1 \\ & 0 & = 0 \end{array}$$

z něhož rovnou vidíme, že soustava má právě jedno řešení $y = 1$ a $x = -1 + 2y = 1$, tedy

$$\check{\mathfrak{R}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Cvičení 3

Rozhodněte, zda má homogenní soustava i netriviální řešení, a pokud ano, najděte jedno takové řešení.

$$\begin{array}{rrrrl} 7x & +14y & & +11u & =0 \\ 13x & +36y & -10z & +19u & =0 \\ 3x & +25y & -19z & +2u & =0 \\ 3x & +4y & +2z & +5u & =0 \end{array}$$

Zde se jedná o homogenní soustavu, poněvadž pravá strana je nulová. Homogenní soustava je vždy řešitelná, jelikož triviální volba $x, y, z, u = 0$ je vždy řešením. Zajímavá otázka však je, jestli existuje i netriviální řešení (pokud ano, homogenní soustava má nezbytně nekonečně mnoho řešení).

Poněvadž nulová pravá strana vždy zůstane nulovou při jakýchkoli ekvivalentních úpravách, je zvykem v homogenním případě pravou stranu vynechávat a pracovat pouze s maticí levé strany. V prvním kroku si poradíme s vyloženě ošklivými čísly a pak postupujeme standardně

$$\begin{pmatrix} 7 & 14 & 0 & 11 \\ 13 & 36 & -10 & 19 \\ 3 & 25 & -19 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{lll} .2 & & \\ - & + & \\ & & + \\ & .(-4) & .(-1) \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 3 \\ 1 & 20 & -18 & -1 \\ 0 & 21 & -21 & -3 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} .(-1) \\ + \\ :3 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 3 \\ 0 & 28 & -28 & -4 \\ 0 & 7 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} .(-3) \\ :4 \\ \\ + \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 3 \\ 0 & 7 & -7 & -1 \\ 0 & 7 & -7 & -1 \\ 0 & 28 & -28 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{ll} & \\ .(-1) & .(-1) \\ + & \\ :4 & + \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 3 \\ 0 & 7 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud vidíme, že existují netriviální řešení soustavy. Podrobněji, výsledná matice je ekvivalentní soustavě

$$\begin{array}{rrrrl} x & -8y & +10z & +3u & =0 \\ & 7y & -7z & -u & =0 \end{array}$$

Řešení poslední rovnice můžeme parametrizovat například takto $u = 7s$ a $z = t$, kde $s, t \in \mathbb{R}$, odkud $y = t + s$, a z první rovnice pak dopočítáme $x = 8y - 10z - 3u = 8(t + s) - 10t - 3(7s) = -2t - 13s$. Tedy

$$\check{\mathcal{R}} = \left\{ \begin{pmatrix} -2t-13s \\ t+s \\ t \\ 7s \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -13 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cvičení 6

Rozhodněte, zda je soustava řešitelná, a pokud ano, najděte jedno řešení.

$$\begin{array}{rrrrrl} 2x & +y & -z & +u & -3v & =1 \\ -11x & +2y & & -u & +3v & =-1 \end{array} \tag{1.6}$$

Odpovídající matice soustavy má tvar

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & u & v \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ -11 & 2 & 0 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} z & x & y & u & v \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -11 & 2 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \end{array},$$

kde ekvivalentní úprava spočívá v tom, že jsme třetí sloupec dali na první místo. Výsledná matice už je rovnou v horním stupňovitém tvaru. Jinými slovy (1.6) je (zcela zřejmě) ekvivalentní soustavě

$$\begin{array}{rrrrrl} -z & +2x & +y & +u & -3v & =1 \\ & -11x & +2y & -u & +3v & =-1 \end{array}$$

kterou už rovnou můžeme řešit. Z druhé rovnice například vyjádříme $u = -11x+2y+3v+1$, kde $x, y, v \in \mathbb{R}$ jsou libovolné parametry, a po dosazení do první rovnice dostaneme

$$z = 2x + y + (-11x + 2y + 3v + 1) - 3v - 1 = -9x + 3y\,.$$

Tedy

$$\check{\mathfrak{R}} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -9x+3y \\ -11x+2y+3v+1 \\ v \end{pmatrix} : \ x, y, v \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -9 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} : \ x, y, v \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cvičení 8

V závislosti na parametru λ rozhodněte, zda je soustava řešitelná.
(a)

$$\begin{array}{rrrl} \lambda x & +y & +z & =1 \\ x & +\lambda y & +z & =1 \\ x & +y & +\lambda z & =1 \end{array}$$

ad (a)

V prvním kroku prohodíme řádky, abychom neměli parametr v levém horním rohu (abychom mohli provádět pouze ekvivalentní úpravy), a dále postupujeme standardně

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} .(-1)\ .(-\lambda) \\ + \\ \quad\ + \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & -1+\lambda & -\lambda+1 & 0 \\ 0 & -\lambda+1 & -\lambda^2+1 & -\lambda+1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ .1 \\ + \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & -1+\lambda & -\lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda+2 & -\lambda+1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & -(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+2) & \lambda-1 \end{array}\right) := M_\lambda\,.$$

Nyní rozlišíme dva případy.

$\boxed{\lambda = 1}$ V tomto případě

$$M_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

což odpovídá soustavě jedné rovnice $x+y+z = 1$ o třech neznámých x, y, z, jež je zřejmě řešitelná. V tomto případě má soustava dokonce nekonečně mnoho řešení (najděte je). Geometricky se jedná o rovinu v $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\lambda \neq 1}$ V tomto případě můžeme vydělit (nenulovým) výrazem $\lambda - 1$, tudíž

$$M_\lambda \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 & 1 \end{array}\right),$$

což odpovídá soustavě

$$\begin{array}{rrrl} x & +y & +\lambda z & = 1 \\ & y & -z & = 0 \\ & & (\lambda+2)z & = 1 \end{array}$$

Poslední rovnici lze řešit tehdy a jen tehdy, pokud $\lambda \neq -2$. Pokud $\lambda \neq -2$, z poslední rovnice vyjádříme $z = 1/(\lambda+2)$ a po dosazení do prvních dvou rovnic dopočítáme jednoznačně i x, y (dopočtěte). Geometricky se jedná o bod v $\mathbb{R}^3$.

2 Vektorový prostor

Vektorový prostor nad číselným tělesem $\mathbb{T} := \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) je množina $\mathcal{V}$ prvků nazývaných *vektory*, která splňuje následující axiomy:

(A) Existuje zobrazení (*součet vektorů*) $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V} : \{(u, v) \mapsto u + v\}$ splňující:

(1) $\forall u, v \in \mathcal{V}, \qquad u + v = v + u;$ (komutativita)

(2) $\forall u, v, w \in \mathcal{V}, \qquad u + (v + w) = (u + v) + w;$ (asociativita)

(3) $\exists 0 \in \mathcal{V}, \quad \forall u \in \mathcal{V}, \qquad u + 0 = u;$ (nulový vektor, počátek)

(4) $\forall u \in \mathcal{V}, \quad \exists -u \in \mathcal{V}, \qquad u + (-u) = 0.$ (opačný vektor)

(B) Existuje zobrazení (*násobení vektorů čísly*) $\mathbb{T} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V} : \{(\alpha, u) \mapsto \alpha u\}$ splňující:

(1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{T}, \quad u \in \mathcal{V}, \qquad \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u;$ (asociativita)

(2) $\forall u \in \mathcal{V}, \qquad 1u = u.$ (identita)

(C) Tato zobrazení jsou vzájemně provázána skrze distributivitu:

(1) $\forall \alpha \in \mathbb{T}, \quad u, v \in \mathcal{V}, \qquad \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v;$ (distributivita 1)

(2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{T}, \quad u \in \mathcal{V}, \qquad (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u.$ (distributivita 2)

Někdy se součet vektorů značí symbolem $\oplus$, násobení číslem symbolem $\odot$ a vektor se zdůrazňuje přidáním šipečky $\vec{v}$.

Podprostor vektorového prostoru $\mathcal{V}$ je podmnožina $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, jež je sama o sobě vektorovým prostorem (se stejnými operacemi sčítání vektorů a násobení čísly jako ve $\mathcal{V}$). Značíme $\mathcal{U} \subset\subset \mathcal{V}$.

Definice podprostoru je elegantní, avšak nehodí se pro konkrétní ověřování, zda daná podmnožina $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{V}$ je podprostorem ve $\mathcal{V}$, poněvadž její ověření vyžaduje kontrolu všech axiomů vektorového prostoru výše. Ve skutečnosti však stačí ověřit jen tři věci, zbytek plne z toho, že $\mathcal{U}$ je podmnožinou ve $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{U} \subset\subset \mathcal{V} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{(i)} & 0 \in \mathcal{U}\,; & \text{(obsahuje počátek)} \\ \text{(ii)} & \forall u, v \in \mathcal{U}, \qquad u + v \in \mathcal{U}\,; & \text{(uzavřenost vůči součtu)} \\ \text{(iii)} & \forall \alpha \in \mathbb{T},\ u \in \mathcal{U}, \qquad \alpha u \in \mathcal{U}\,. & \text{(uzavřenost vůči násobení)} \end{cases}$$

(Logická spojka mezi vlastnostmi (i), (ii), (iii) je "a" (konjunkce).)

Cvičení 1

Nechť $\mathcal{V}$ je množina uspořádaných dvojic reálných čísel, těleso $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a každé $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ a $\vec{y} = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{V}$ definujeme:

(a)

$$\vec{x} \oplus \vec{y} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \alpha \odot \vec{x} := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\vec{x} \oplus \vec{y} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \alpha \odot \vec{x} := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}.$$

Je $\mathcal{V}$ s takto definovanými operacemi vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$?

V obou případech je odpověď **NE**.

ad (a)

Neplatí například axiom (B2). Za tímto účelem si nejdříve uvědomme, co znamená negace požadovaného výroku (pro váš komfort nyní píšeme šipečku):

$$\neg\,(\mathrm{B2}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \vec{u} \in \mathcal{V}, \qquad 1\vec{u} \neq \vec{u}\,.$$

A skutečně existuje vektor $\vec{u} := \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$, pro nějž

$$1 \odot \vec{u} = \begin{pmatrix}0\cdot 1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \vec{u}\,.$$

ad (b)

Neplatí například axiom (A3). Negace požadovaného výroku zní:

$$\neg\,(\mathrm{A3}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \vec{0} \in \mathcal{V}, \quad \exists \vec{u} \in \mathcal{V}, \qquad \vec{u} + \vec{0} \neq \vec{u}\,.$$

A skutečně pro libovolný vektor $\vec{0} = \left(\begin{smallmatrix}0_1\\0_2\end{smallmatrix}\right)$ existuje vektor $\vec{u} := \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$, pro nějž

$$\vec{u} \oplus \vec{0} = \begin{pmatrix}u_1 + 0_1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0_1\\0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \vec{u}\,.$$

Zkuste si zjistit, jaké další axiomy nejsou splněny.

Cvičení 2

Nechť $\mathcal{V}$ je množina kladných reálných čísel, t.j. $\mathcal{V} := \{x > 0 : x \in \mathbb{R}\}$, těleso $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$ (t.j. $\vec{x} = x > 0$, $\vec{y} = y > 0$) definujeme

$$\vec{x} \oplus \vec{y} := xy \qquad \text{a} \qquad \alpha \odot \vec{x} := x^\alpha\,.$$

Je $\mathcal{V}$ s takto definovanými operacemi vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$?

Někoho to může šokovat, poněvadž součet vektorů (což jsou striktně kladná čísla) je definován coby násobení(!) a násobení vektoru číslem je definováno coby mocnina(!), avšak odpověď je **ANO**. Zkuste si sami ověřit všechny axiomy (A), (B), (C). Zde si pouze ukážeme existenci neutrálního prvku vůči tomuto nestandardnímu součtu a jak musí vypadat opačný vektor.

ad (A3)

Hledáme striktně kladné číslo $\vec{o} = o$ (aby nedošlo k záměně s číslem nula, píšeme $\vec{o}$ namísto značení $\vec{0}$ výše), jež pro libovolné jiné striktně kladné číslo $\vec{u} = u$ splňuje (šipečkou zde označujeme axiomatickou rovnost, kterou chceme, aby platila)

$$\vec{u} \oplus \vec{o} = uo \stackrel{\downarrow}{=} u = \vec{u}\,.$$

Vydělíme-li u-čkem, vidíme, že nezbytně $\vec{o} = o = 1$. Nulový vektor je tedy číslo jedna!

ad (A4)

Pro libovolné dané striktně kladné číslo $\vec{u} = u$ hledáme jiné striktně kladné číslo $\vec{v} = v$ (jež závisí na volbě u) takové, aby

$$\vec{u} \oplus \vec{v} = uv \stackrel{\downarrow}{=} 1 = \vec{o}\,.$$

Vydělíme-li u-čkem, vidíme, že nezbytně $\vec{v} = 1/u$. Opačný vektor je tedy převrácená hodnota!

Cvičení 3

Nechť $\mathcal{V}$ je podmnožina $\mathbb{C}^3$ složená z vektorů $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, pro které platí:

(a) $x_1 \in \mathbb{R}$,
(b) $x_1 = 0$,
(c) $x_1 = 0 \ \vee \ x_2 = 0$,
(d) $x_1 + x_2 = 0$,
(e) $x_1 + x_2 = 1$,
(f) $x_1 = x_2 \ \wedge \ x_1 \neq x_3$,
(g) všechny složky jsou reálné,
(h) $x_1 = x_2$,
(i) $x_1 \neq x_2$,
(j) $x_1 + 2x_3 = 0$,
(k) $x_1 + 2x_3 = 1$.

Která z těchto množin je vektorovým prostorem nad $\mathbb{C}$ při zúžení operací z $\mathbb{C}^3$ na $\mathcal{V}$ (t.j. sčítání vektorů a násobení vektoru komplexním číslem po složkách)?

Nepozorný student začne ověřovat všech osm axiomů (A), (B), (C). Pozorný student si uvědomí, že $\mathcal{V}$ je podmnožina $\mathbb{C}^3$, tudíž otázku lze přeformulovat tak, jestli zadaná množina $\mathcal{V}$ je podprostorem $\mathbb{C}^3$. Stačí tedy ověřit pouze tři vlastnosti (i)–(iii).

U většiny z těchto zadání se lze i ptát, jestli $\mathcal{V}$ je podprostorem $\mathbb{R}^3$. V tomto případě máme názornou geometrickou interpretaci (kreslete si obrázky). Připomeňme, že v $\mathbb{R}^3$ existují pouze čtyři druhy podprostorů: počátek, přímky procházející počátkem, roviny procházející počátkem a celý prostor.

ad (a)

NE. Není splněna uzavřenost vůči násobení číslem. Skutečně, existuje číslo $i \in \mathbb{C}$ a vektor $u := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$ takové, že $iu = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathcal{V}$.

ad (b)

ANO. Počátek $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zřejmě leží ve $\mathcal{V}$. Pro libovolné dva vektory $x := \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$ a $y := \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$, kde $x_2, x_3, y_2, y_3 \in \mathbb{C}$ jsou libovolná čísla, zřejmě platí

$$x + y = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{V},$$

čímž jsme ověřili uzavřenost vůči součtu. Obdobně se ověří uzavřenost vůči násobení čísly (zkuste sami).

V $\mathbb{R}^3$ se geometricky jedná o rovinu tvořenou souřadnicovými osami x_2, x_3.

ad (c)

NE. Naplatí uzavřenost vůči součtu. Skutečně, například vektory $x := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$ a $y := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$, avšak

$$x + y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin \mathcal{V}.$$

V $\mathbb{R}^3$ se geometricky jedná o sjednocení roviny tvořené souřadnicovými osami x_2, x_3 s rovinou tvořenou souřadnicovými osami x_1, x_3. Připomenutím toho, jak se sčítají vektory v eukleidovském prostoru, je zřejmé, že se lze po součtu dostat mimo toto sjednocení.

ad (d)

ANO. Počátek $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zřejmě leží ve $\mathcal{V}$, poněvadž součet jeho první a druhé složky (jež jsou obě nulové), dá zřejmě nulu. Mějme nyní libovolný vektor $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$, což znamená, že $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ jsou libovolná čísla splňující $x_1 + x_2 = 0$, a libovolné číslo $\alpha \in \mathbb{C}$. Pak zřejmě

$$\alpha x = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{V},$$

poněvadž $\alpha x_1 + \alpha x_2 = \alpha(x_1 + x_2) = \alpha 0 = 0$. Tím jsme dokázali uzavřenost vůči násobení čísly. Uzavřenost vůči součtu se dokáže obdobně (zkuste sami).

V $\mathbb{R}^3$ se geometricky jedná o rovinu tvořenou souřadnicovými osami x_2, x_3 a pootočenou o 45° kolem osy x_3 v kladném směru.

ad (e)

NE. Počátek $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ neleží ve $\mathcal{V}$, poněvadž součet jeho první a druhé složky (jež jsou obě nulové), dá zřejmě nulu (což se nerovná jedné).

V $\mathbb{R}^3$ se geometricky jedná o rovinu, jež neprochází počátkem.

ad (f)

NE. Počátek $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ neleží ve $\mathcal{V}$, poněvadž jeho první složka se sice rovná jeho druhé složce (poněvadž obě složky jsou nulové), avšak jeho třetí složka (rovněž nulová) se také rovná první.

ad (g)

NE. Není splněna uzavřenost vůči násobení číslem. Viz (a).

ad (h)

ANO. Ověřte si sami.

V $\mathbb{R}^3$ se geometricky jedná o rovinu tvořenou souřadnicovými osami x_2, x_3 a pootočenou o 45° kolem osy x_3 v záporném směru.

ad (i)

NE. Počátek $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ neleží ve $\mathcal{V}$.

ad (j)

ANO. Ověřte si sami.

V $\mathbb{R}^3$ se geometricky jedná o rovinu, jež prochází počátkem.

ad (k)

NE. Ověřte si sami.

V $\mathbb{R}^3$ se geometricky jedná o rovinu, jež neprochází počátkem.

Cvičení 4

Nechť $\mathcal{V}$ je podmnožina $\mathbb{R}^{2,2}$ tvořená
(a) tzv. symetrickými maticemi, t.j.

$$\mathcal{V} := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : \ a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}, \ a_{12} = a_{21} \right\}.$$

(b) tzv. diagonálními maticemi, t.j.

$$\mathcal{V} := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} : \ a_{11}, a_{22} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zjistěte, zda $\mathcal{V}$ je vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$ při zúžení operací z $\mathbb{R}^{2,2}$ na $\mathcal{V}$ (t.j. sčítání matic a násobení matice reálným číslem po prvcích).

Poněvadž prostor všech matic $\mathbb{R}^{2,2}$ je vektorovým prostorem, stačí opět vyšetřit, zda $\mathcal{V}$ je podprostorem. Tedy pouze ověřit, zda nulová matice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ náleží $\mathcal{V}$ (což je v obou případech zřejmé) a uzavřenost vůči součtu a uzavřenost vůči násobení čísly. Ověřme uzavřenost vůči součtu (uzavřenost vůči násobení čísly si ověřte sami). Nechť $A := \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right), B := \left(\begin{smallmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{smallmatrix}\right)$ jsou libovolné matice z $\mathbb{R}^{2,2}$. Potom

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} =: C.$$

Pokud $a_{12} = a_{21}$ a $b_{12} = b_{21}$ (případ (a)), potom rovněž

$$c_{12} = a_{12} + b_{12} = a_{21} + b_{21} = c_{21}\,,$$

tedy $C \in \mathcal{V}$. Obdobně, pokud $a_{12} = 0 = a_{21}$ a $b_{12} = 0 = b_{21}$ (případ (b)), potom rovněž

$$c_{12} = a_{12} + b_{12} = 0 + 0 = 0 \qquad \text{a} \qquad c_{21} = a_{21} + b_{21} = 0 + 0 = 0\,,$$

tedy $C \in \mathcal{V}$.

Cvičení 5

Nechť $\mathcal{P}$ je množina polynomů s operacemi definovanými bodově, t.j. pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$ a každý polynom $x \in \mathcal{P}$ a $y \in \mathcal{P}$ definujeme:

$$(x+y)(t) := x(t) + y(t) \qquad \text{a} \qquad (\alpha x)(t) := \alpha x(t) \qquad \text{pro každé } t \in \mathbb{C}.$$

Víme z přednášky, že $\mathcal{P}$ tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{C}$. Která z následujících množin tvoří při zúžení operací z $\mathcal{P}$ vektorový prostor nad $\mathbb{C}$?
(a) $\{x \in \mathcal{P} :\ x(0) - x(i) = 0\}$,
(b) $\{x \in \mathcal{P} :\ \forall t \in \mathbb{C},\ x(t) = x(t+1)\}$,
(c) $\{x \in \mathcal{P} :\ x \text{ má stupeň tři}\}$,
(d) $\{x \in \mathcal{P} :\ 0, 1, 2 \text{ jsou kořeny } x\}$.

Stačí opět vyšetřit, zda dané podmnožiny jsou podprostory $\mathcal{P}$.

ad (a)

ANO. Nulový polynom 0 definovaný vztahem $0(t) := 0$ pro všechna $t \in \mathbb{C}$ zřejmě splňuje vztah $0(0) - 0(i) = 0$. Nechť $x, y \in \mathcal{P}$ jsou libovolné polynomy, jež zplňují $x(0) - x(i) = 0$ a $y(0) - y(i) = 0$. Potom polynom $z := x + y$ splňuje

$$z(0) - z(i) = [x(0) + y(0)] - [x(i) + y(i)] = [x(0) - x(i)] + [y(0) - y(i)] = 0 + 0 = 0\,.$$

Daná podmnožina je tedy uzavřená vůči sčítání. Uzavřenost vůči násobení čísly se ověří obdobně.

ad (b)

ANO. Nulový polynom 0 zřejmě splňuje vztah $0(t) = 0(t+1)$. Nechť $x \in \mathcal{P}$ je libovolný polynom, jenž zplňuje $x(t) = x(t+1)$ pro všechna $t \in \mathbb{C}$, a nechť $\alpha \in \mathbb{C}$ je libovolné číslo. Potom polynom $z := \alpha x$ splňuje

$$\forall t \in \mathbb{C}\,, \qquad z(t) = \alpha x(t) = \alpha x(t+1) = z(t+1)\,.$$

Daná podmnožina je tedy uzavřená vůči násobení čísly. Uzavřenost vůči sčítání se ověří obdobně.

ad (c)

NE. Nulový polynom 0 není stupně tři. Mimochodem neplatí ani uzavřenost vůči sčítaní ($x + (-x) = 0$), ani uzavřenost vůči násobení čísly ($0x = 0$).

ad (d)

ANO. $0, 1, 2$ jsou zřejmě kořeny nulového polynomu. Nechť $x, y \in \mathcal{P}$ jsou libovolné polynomy, jež zplňují $x(0) = x(1) = x(2) = 0$ a $y(0) = y(1) = y(2) = 0$. Potom polynom $z := x + y$ splňuje

$$z(0) = x(0) + y(0) = 0 + 0 = 0\,,$$

tedy 0 je rovněž kořenem součtu $x+y$. To, že $1, 2$ jsou rovněž kořenem součtu $x+y$, se ověří zcela analogicky. Tímto jsme ověřili uzavřenost vůči součtu. Uzavřenost vůči násobení čísly se ověří obdobně.

3 Lineární (ne)závislost

Z teorie je třeba znát pojmy: lineární kombinace (triviální, netriviální), lineární (ne)závislost, lineární obal. Je nutné umět rozhodnout, zda má soustava lineárních algebraických rovnic řešení, a pokud má, tak umět alespoň jedno najít. Není-li uvedeno jinak, uvažujeme těleso komplexních čísel $\mathbb{T} = \mathbb{C}$.

Cvičení 1

Rozhodněte, zda jsou vektory x_1, x_2, x_3 z $\mathbb{R}^3$ LZ nebo LN.

(a) $x_1 := \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}, \quad x_2 := \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}, \quad x_3 := \begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}.$

(b) $x_1 := \begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}, \quad x_2 := \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}, \quad x_3 := \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}.$

(c) $x_1 := \begin{pmatrix}11\\-4\\-3\end{pmatrix}, \quad x_2 := \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}, \quad x_3 := \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}.$

Pokud máme rozhodnout o lineární závislosti či nezávislosti vektorů, nepřemýšlíme a rovnou zkonstruujeme libovolnou lineární kombinaci těchto vektorů. Pak se koukáme, jestli, položíme-li ji rovnu nulovému vektoru, zda nezbytně všechny koeficienty lineární kombinace jsou nulové (lineární nezávislost), či zda existuje nějaká netriviální lineární kombinace (lineární závislost).

ad (a)

V tomto případě tedy vezmeme libovolná reálná (protože uvažovaný vektorový prostor je nad $\mathbb{R}$) čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ a koukáme na řešení rovnice

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha_1 \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix} \stackrel{\downarrow}{=} \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0\,.$$

Tato vektorová rovnice je ekvivalentní homogenní soustavě lineárních algebraických rovnic

$$\begin{aligned} 4\alpha_1 &\ +\alpha_2 &+ 3\alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_1 &\ +3\alpha_2 &+ 6\alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 &\ +5\alpha_2 &+ 9\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Tu pak řešíme standardním způsobem, například takto:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} + & + & \\ .(-1) & & :3 \\ & .(-2) & \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -9 & -15 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ .(-1) \\ :3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poslední matici odpovídá ekvivalentní soustava

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\ -2\alpha_2 &- 3\alpha_3 &= 0 \\ &\ -3\alpha_2 &- 5\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

jež má spoustu netriviálních řešení, tudíž vektory x_1, x_2, x_3 jsou lineárně závislé.

Konkrétně z druhé rovnice vidíme, že můžeme zvolit $\alpha_3 := 3t$, $\alpha_2 := -5t$, kde $t \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo, a z první dopočítáme $\alpha_1 = 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = -10t + 9t = -t$. Naše vektory tedy splňují

$$-tx_1 - 5tx_2 + 3tx_3 = 0\,,$$

a to pro libovolné $t \in \mathbb{R}$. Volba $t = 0$ odpovídá triviálnímu případu, zatímco pro libovolné $t \neq 0$ dostaneme netriviální lineární kombinaci

$$-x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0\,.$$

V této konečné fázi je vhodné si udělat zkoušku.

ad (b)

Z předchozího příkladu vidíme, že postup lze mechanizovat:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} .(-3) & .(-5) \\ + & \\ & + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & -12 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zde poslední matici zřejmě odpovídá homogenní soustava, jež má pouze triviální řešení, tudíž vektory x_1, x_2, x_3 jsou lineárně nezávislé.

ad (c)

Zkuste si sami.

Cvičení 2

Nechť x, y, z jsou LN vektory z $\mathcal{V}$ nad $\mathbb{T}$. Zjistěte, zda vektory

$$x - 2y + z, \qquad 4x - y - z, \qquad 4x + 13y - 11z$$

jsou LZ nebo LN.

V první řadě si napišme, co znamená, že vektory x, y, z jsou lineárně nezávislé:

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{T}, \qquad \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0\,. \tag{3.1}$$

Nyní vezměme libovolnou lineární kombinaci zadaných vektorů a položme ji rovnu nulovému vektoru:

$$\beta_1(x - 2y + z) + \beta_2(4x - y - z) + \beta_3(4x + 13y - 11z) = 0\,,$$

kde $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{T}$ jsou libovolná čísla (schválně volíme jiná písmenka, protože alfa jsme použili už výše). Po přerovnání dostaneme

$$(\beta_1 + 4\beta_2 + 4\beta_3)x + (-2\beta_1 - \beta_2 + 13\beta_3)y + (\beta_1 - \beta_2 - 11\beta_3)z = 0\,.$$

Užitím (3.1) dostáváme z této jedné vektorové rovnice homogenní soustavu

$$\begin{aligned} \beta_1 \; +4\beta_2 \; + 4\beta_3 &= 0 \\ -2\beta_1 \; -\beta_2 \; + 13\beta_3 &= 0 \\ \beta_1 \; -\beta_2 \; - 11\beta_3 &= 0 \end{aligned}$$

kterou můžeme řešit například pomocí matic:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & 13 \\ 1 & -1 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 7 & 21 \\ 0 & -5 & -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z tvaru výsledné matice rovnou vidíme, že homogenní soustava má netriviální řešení (například $\beta_3 = 1$ $\beta_2 = -3$ a $\beta_1 = -4\beta_2 - 4\beta_3 = 8$), tedy zadané vektory jsou lineárně závislé.

Cvičení 3

Nalezněte všechna $\alpha \in \mathbb{C}$, pro která jsou LZ vektory $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ z $\mathbb{C}^3$.

Jako ve Cvičení 1 vektorová rovnice

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ jsou libovolná čísla, vede na prozkoumání matice

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & -\alpha & -\alpha^2+1 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & -\alpha & -\alpha^2+1 \\ 0 & 0 & -\alpha^2+2 \end{pmatrix}.$$

Ze tvaru poslední matice je rovnou vidět, že odpovídající homogenní soustava má netriviální řešení (tedy vektory jsou lineárně závislé), pokud $\alpha = \pm\sqrt{2}$; skutečně, například,

$$-1 \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pokud $\alpha \neq \pm\sqrt{2}$, pak z poslední rovnice výsledné soustavy nezbytně dostáváme $\alpha_3 = 0$ a výsledná soustava je tedy ekvivalentní soustavě

$$\begin{aligned} \alpha_1 \quad +\alpha_2 &= 0 \\ -\alpha\alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

Pokud $\alpha = 0$, pak zřejmě existuje netriviální řešení, například $\alpha_2 = 1$ a $\alpha_1 = -1$, tedy

$$-1 \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

V ostatních případech (tedy $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{\pm\sqrt{2}, 0\}$) jsou vektory lineárně nezávislé.

Cvičení 4

Nechť x_1, x_2, x_3 jsou vektory z $\mathbb{C}^3$. Zjistěte, který z vektorů x a z leží v $[x_1, x_2, x_3]_\lambda$, je-li

$$x_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad x_2 := \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad x_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x := \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad z := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vektor x leží v lineárním obalu $[x_1, x_2, x_3]_\lambda$ tehdy a jen tehdy, pokud existují čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ taková, že $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = x$. Obdobně, vektor z leží v lineárním obalu $[x_1, x_2, x_3]_\lambda$ tehdy a jen tehdy, pokud existují (klidně jiná) čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ taková, že $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = z$. Oba případy tedy vedou na nehomogenní soustavy lineárních algebraických rovnic, které můžeme maticově řešit zároveň:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 7 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & -2 & 5 & 4 \\ -2 & 7 & 1 & -7 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{cc} .(-1) & .2 \\ + & \\ & + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 7 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -15 & -5 & 5 & 2 \\ 0 & 21 & 7 & -7 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ :5 \\ :7 \end{array} \\ \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 7 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 3 & 1 & -1 & \frac{3}{7} \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ .1 \\ + \end{array} \\ \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 7 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{29}{35} \end{array}\right). \end{array}$$

Výsledná soustava odpovídající vektoru z očividně nemá řešení (protože poslední rovnice vyžaduje $0 = \frac{29}{35}$), tudíž $z \notin [x_1, x_2, x_3]_\lambda$. Soustava odpovídající vektoru x má (nekonečně mnoho) řešení (například $\alpha_3 = -1$, $\alpha_2 = 0$ a $\alpha_1 = 3$), tudíž $x \in [x_1, x_2, x_3]_\lambda$ (například $x = 3x_1 + 0x_2 - 1x_3$).

Cvičení 6

Nechť x_1, x_2, x_3 a x jsou vektory z $\mathbb{R}^3$. Nalezněte všechny hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$, pro které $x \in [x_1, x_2, x_3]_\lambda$, je-li

(a) $$x_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_3 := \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Jako v předchozím cvičení se ptáme, pro které hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$ existují čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ taková, že $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = x$. Tento problém je ekvivalentní soustavě

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \alpha \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & \alpha \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\alpha \end{array}\right).$$

Poslední rovnice znamená $0 = 1 - \alpha$, což je řešitelné tehdy a jen tehdy, pokud $\alpha = 1$. V kladném případě pak vyřešíme i ostatní rovnice (například $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$ a $\alpha_1 = -4$), tedy $x \in [x_1, x_2, x_3]_\lambda$ (například $x = -4x_1 + x_2 + x_3$).

Cvičení 7

Nechť x, y, z jsou LN vektory z $\mathcal{V}$ nad $\mathbb{T}$. Nalezněte všechna $\alpha \in \mathbb{T}$ taková, aby vektory $x + 2y + 3z$, $-x + \alpha z$, $x + 2\alpha y + 8z$ byly LZ a zároveň vektor $\alpha x + 2y + z$ ležel v jejich lineárním obalu.

V první řadě si napišme, co znamená, že vektory x, y, z jsou lineárně nezávislé:

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{T}, \qquad \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0\,. \tag{3.2}$$

Podmínka $\alpha x + 2y + z \in [x + 2y + 3z, -x + \alpha z, x + 2\alpha y + 8z]_\lambda$ znamená, že existují čísla $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{T}$ taková, že

$$\beta_1(x + 2y + 3z) + \beta_2(-x + \alpha z) + \beta_3(x + 2\alpha y + 8z) = \alpha x + 2y + z\,.$$

Po přerovnání dostáváme

$$(\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \alpha)x + (2\beta_1 + 2\alpha\beta_3 - 2)y + (3\beta_1 + \alpha\beta_2 + 8\beta_3 - 1)z = 0\,,$$

což díky (3.2) odpovídá nehomogenní soustavě

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & \alpha \\ 2 & 0 & 2\alpha & 2 \\ 3 & \alpha & 8 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{cc} .(-2) & .(-3) \\ + & \\ & + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & \alpha \\ 0 & 2 & -2+2\alpha & -2\alpha+2 \\ 0 & 3+\alpha & 5 & -3\alpha+1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ :2 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -1+\alpha & -\alpha+1 \\ 0 & 3+\alpha & 5 & -3\alpha+1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ .(-1)(3+\alpha) \\ + \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -1+\alpha & -\alpha+1 \\ 0 & 0 & -(\alpha-2)(\alpha+4) & (\alpha-2)(\alpha+1) \end{array}\right).$$

Tato soustava má řešení tehdy a jen tehdy, pokud $\alpha \in \mathbb{T} \setminus \{-4\}$.

Podmínka, že $x + 2y + 3z, -x + \alpha z, x + 2\alpha y + 8z$ jsou lineárně závislé znamená, že existují čísla $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{T}$ taková, že ne všechna jsou rovna nule a

$$\gamma_1(x + 2y + 3z) + \gamma_2(-x + \alpha z) + \gamma_3(x + 2\alpha y + 8z) = 0\,.$$

Po přerovnání a s využitím (3.2) tato vektorová rovnice odpovídá homogenní soustavě (již můžeme ekvivalentně upravovat jako výše)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2\alpha & 0 \\ 3 & \alpha & 8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -(\alpha-2)(\alpha+4) & 0 \end{array}\right).$$

Tato soustava má netriviální řešení tehdy a jen tehdy, pokud $\alpha = 2$ nebo $\alpha = -4$

Obě podmínky jsou tedy splněny tehdy a jen tehdy, pokud $\alpha = 2$.

Cvičení 8

Připomeňme nejprve, že $\mathcal{P}_3$ je vektorový prostor polynomů stupně nejvýše dva s přidáním nulového polynomu. Nechť x a x_1, x_2, x_3 jsou polynomy z $\mathcal{P}_3$ tak, že pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí

$$x_1(t) := 1 + t - 2t^2, \quad x_2(t) := 7 - 8t + 7t^2, \quad x_3(t) := 3 - 2t + t^2, \quad x(t) := 2 + 4t - t^2 .$$

Zjistěte, zda $x \in [x_1, x_2, x_3]_\lambda$.

Ptáme se, zda existují čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ taková, že $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$, což je ekvivalentní funkcionální rovnosti

$$\alpha_1(1 + t - 2t^2) + \alpha_2(7 - 8t + 7t^2) + \alpha_3(3 - 2t + t^2) = 2 + 4t - t^2 ,$$

jež musí platit pro všechna $t \in \mathbb{C}$. Po přerovnání dostaneme

$$(\alpha_1 + 7\alpha_2 + 3\alpha_3 - 2) + (\alpha_1 - 8\alpha_2 - 2\alpha_3 - 4)t + (-2\alpha_1 + 7\alpha_2 + \alpha_3 + 1)t^2 = 0 . \tag{3.3}$$

Poněvadž tato rovnost musí platit pro všechna $t \in \mathbb{C}$, speciálně musí platit pro $t = 0$, což dá rovnici $\alpha_1 + 7\alpha_2 + 3\alpha_3 = 2$. Zderivujeme-li (3.3) podle proměnné t a do výsledku dosadíme $t = 0$, dostaneme druhou rovnici $\alpha_1 - 8\alpha_2 - 2\alpha_3 = 4$. Nakonec zderivujeme (3.3) podle proměnné t dvakrát a do výsledku dosadíme $t = 0$, čímž obdržíme poslední rovnici $-2\alpha_1 + 7\alpha_2 + \alpha_3 = -1$. (Namísto derivování bychom mohli využít znalosti toho, že polynomy $e_0(t) := 1$, $e_1(t) := t$ a $e_2(t) := t^2$ jsou lineárně nezávislé v $\mathcal{P}_3$.) Tyto tři rovnice vedou na nehomogenní soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & -8 & -2 & 4 \\ -2 & 7 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & -15 & -5 & 2 \\ 0 & 21 & 7 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 3 & 1 & \frac{3}{7} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{29}{35} \end{array}\right),$$

jež očividně není řešitelná. Tedy $x \notin [x_1, x_2, x_3]_\lambda$.

Cvičení 9

Jsou vektory x_1, x_2, x_3, x_4 z $\mathcal{P}$ LN nebo LZ?

$$\forall t \in \mathbb{C}, \qquad x_1(t) := 3t - 1, \quad x_2(t) := 5t, \quad x_3(t) := t + 8, \quad x_4(t) := t^2 - t + 1 .$$

Je vhodné si uvědomit, že

$$x_1 = -e_0 + 3e_1, \quad x_2 = 5e_1, \quad x_3(t) := 8e_0 + e_1, \quad x_4(t) := e_0 - e_1 + e_2,$$

kde $e_0(t) := 1$, $e_1(t) := t$ a $e_2(t) := t^2$ jsou lineárně nezávislé vektory z $\mathcal{P}$. Pokud tedy zkoumáme rovnost

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = (-\alpha_1 + 8\alpha_3 + \alpha_4)e_0 + (3\alpha_1 + 5\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4)e_1 + \alpha_4 e_2 \overset{\downarrow}{=} 0 ,$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$ jsou libovolná čísla, lineární nezávislost vektorů e_0, e_1, e_2 nezbytně implikuje homogenní soustavu

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 8 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & 25 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

jež je samozřejmě netriviálně řešitelná. Obecně je to tak proto, že máme víc neznámých než rovnic. Speciálně v tomto případě dostáváme obecné řešení $\alpha_4 = 0$, $\alpha_3 = s$, $\alpha_2 = -5s$, $\alpha_1 = 8s$, kde $s \in \mathbb{C}$ je libovolný parametr. Platí tedy $8x_1 - 5x_2 + x_3 + 0x_4 = 0$. Vektory x_1, x_2, x_3, x_4 jsou lineárně závislé. Vlastně i vektory x_1, x_2, x_3 jsou lineárně závislé.

Cvičení 12

Jsou vektory A_1, A_2, A_3, A_4 z $\mathbb{C}^{2,2}$ LN nebo LZ?

$$A_1 := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_4 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Opět nepřemýšlíme, vezmeme libovolnou lineární kombinaci zadaných vektorů a položíme ji rovnou nule

$$\begin{aligned}\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4 &= \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 & 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 7\alpha_3 + \alpha_4 \\ -1\alpha_1 + 4\alpha_2 + 5\alpha_3 + \alpha_4 & -1\alpha_1 - \alpha_3 - 2\alpha_4 \end{pmatrix} \\ &\overset{\downarrow}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\,.\end{aligned}$$

Tím dostaneme homogenní soustavu

$$\begin{array}{lllll} 2\alpha_1 & +\alpha_2 & -3\alpha_3 & & = 0 \\ 3\alpha_1 & +4\alpha_2 & +7\alpha_3 & +\alpha_4 & = 0 \\ -\alpha_1 & +4\alpha_2 & +5\alpha_3 & +\alpha_4 & = 0 \\ -\alpha_1 & + & -\alpha_3 & -2\alpha_4 & = 0 \end{array}$$

Standardním postupem zjistíme, že soustava má pouze triviální řešení, tedy vektory A_1, A_2, A_3, A_4 jsou lineárně nezávislé.

Cvičení 13

Jsou vektory x_1, x_2, x_3 z $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$ LN nebo LZ?

$$x_1 := \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad x_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Připomeňme, že $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$ je vektorový prostor komplexních čísel nestandardně uvažovaný nad reálnými čísly. Opět tedy uvažujeme

$$\begin{aligned}\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 &= \alpha_1 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + i\alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix} \\ &\overset{\downarrow}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,\end{aligned}$$

avšak $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ jsou pouze reálná čísla. Tím obdržíme homogenní soustavu dvou komplexních rovnic o třech neznámých

$$\begin{array}{llll} i\alpha_1 & +\alpha_2 & +\alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 & +i\alpha_2 & +\alpha_3 & = 0 \end{array}$$

Poněvadž však $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jsou reálná a komplexní číslo je rovno (komplexní) nule tehdy a jen tehdy, pokud reálná a imaginární čast jsou rovny (reálné) nule, soustava výše je ekvivalentní soustavě čtyř reálných rovnic

$$\begin{array}{llll} & \alpha_2 & +\alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 & & & = 0 \\ \alpha_1 & & +\alpha_3 & = 0 \\ & +\alpha_2 & + & = 0 \end{array}$$

Tato soustava má zřejmě pouze triviální řešení, tedy x_1, x_2, x_3 jsou tedy lineárně nezávislé coby vektory z $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$.

To je zajímavé, poněvadž ty samé vektory uvažované na standardním prostoru $\mathbb{C}^2$ (nad komplexními čísly) jsou lineárně závislé.

4 Báze a dimenze vektorového prostoru

Potřebné pojmy z teorie: báze, dimenze, standardní báze prostorů $\mathbb{T}^n$, $\mathbb{T}^{m,n}$ a $\mathcal{P}_n$, důsledky Steinitzovy věty, věta o doplnění LN vektorů na bázi, věta o výběru báze z generátorů. Není-li uvedeno jinak, uvažujeme těleso komplexních čísel $\mathbb{T} = \mathbb{C}$.

Cvičení 1

Nechť

$$x_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

jsou vektory z $\mathbb{C}^4$. Nalezněte nějakou bázi $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]_\lambda$. Vyjádřete vektory x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 jako lineární kombinace nalezené báze.

Podle definice, vektory x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 generují prostor $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]_\lambda \subset\subset \mathbb{C}^4$. Zbývá tedy rozhodnout, kolik z nich je lineárně nezávislých, a lineární kombinace ostatních vektorů vyházet. Jedná se tedy o zúžení vektorů na bázi.

Určitě alespoň jeden vektor budeme muset vyhodit, protože máme 5 vektorů, zatímco jakýkoli podprostor $\mathbb{C}^4$ může mít bázi skládající se z maximálně 4 prvků. Na druhou stranu, na první pohled vidíme, že báze bude mít alespoň 2 prvky, protože jakýkoli pár z daných vektorů je lineárně nezávislý (poněvadž jakýkoli vektor není očividně násobkem libovolného jiného).

Vhodný konstrukční algoritmus (vhodný i pro naprogramování) je následující. Obecně, pokud máme zadaných m vektorů $v_1, \dots, v_m$ a chceme z nich vybrat lineárně nezávislé, začneme s počáteční volbou souboru $B := (v_1, \dots, v_m)$.

Krok 1

- Pokud $v_1 = 0$, vyjmeme v_1 z B.
- Pokud $v_1 \neq 0$, ponecháme soubor B netknutý.

Krok $j \geq 2$

- Pokud $v_j \in [v_1, \dots, v_{j-1}]_\lambda$, vyjmeme v_j z B.
- Pokud $v_j \notin [v_1, \dots, v_{j-1}]_\lambda$, ponecháme soubor B netknutý.

Zastavme algoritmus po m-tém kroku, čímž získáme (potenciálně změněný) soubor B, jehož prvky si můžeme označit $(v_{k_1}, \dots, v_{k_p})$. Stále platí $[v_{k_1}, \dots, v_{k_p}]_\lambda = [v_1, \dots, v_m]$, jelikož jsme vyjmuli pouze prvky, jež už byly v lineárním obalu předešlých prvků. Algoritmus zaručuje, že žádný z vektorů $v_{k_1}, \dots, v_{k_p}$ neleží v lineárním obalu těch předešlých. Tedy vektory $v_{k_1}, \dots, v_{k_p}$ jsou lineárně nezávislé.

Tento algoritmus můžeme zmechanizovat, uvědomíme-li si, že prozkoumání lineární nezávislosti vektorů $v_1, \dots, v_m$ znamená prozkoumání, zda rovnice $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0$, kde $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{T}$, má pouze triviální řešení. Pokud držíme $\alpha_{l+1} = \dots = \alpha_m = 0$, pak stejnou rovnicí vlastně prozkoumáváme lineární nezávislost menšího počtu vektorů $v_1, \dots, v_l$. Můžeme tedy všechny kroky provést jakoby najednou.

V konkrétním případě tohoto cvičení vede rovnice $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_5 v_5 = 0$, kde $\alpha_1, \dots, \alpha_5 \in \mathbb{C}$, na maticovou úlohu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Jakmile matici převedeme do horního stupňovitého tvaru, z výsledného tvaru ekvivalentní matice zjistíme vše. Na začátku volíme $B := (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

$\boxed{\text{Krok 1}}$ Pokud zvolíme $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$, čemuž odpovídá, že bychom ignorovali čtyři poslední sloupce výsledné matice, vidíme, že vektor x_1 je lineárně nezávislý (to bylo zřejmé hned, protože je nenulový). Tedy po prvním kroku stále $B := (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

$\boxed{\text{Krok 2}}$ Pokud zvolíme $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$, čemuž odpovídá, že bychom ignorovali tři poslední sloupce výsledné matice, vidíme, že vektory x_1, x_2 jsou lineárně nezávislé (to bylo zřejmé hned). Tedy po druhém kroku stále $B := (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

$\boxed{\text{Krok 3}}$ Pokud zvolíme $\alpha_4 = \alpha_5 = 0$, čemuž odpovídá, že bychom ignorovali dva poslední sloupce výsledné matice, vidíme, že vektory x_1, x_2, x_3 jsou lineárně závislé (to zřejmé vůbec nebylo). Podle algoritmu vektor x_3 je ze souboru B potřeba vyjmout, tedy po třetím kroku $B := (x_1, x_2, x_4, x_5)$.

Zároveň vidíme, že $\alpha_2 = -\alpha_3$ a $\alpha_1 = -2\alpha_2 - \alpha_3 = \alpha_3$, tedy volbou $\alpha_3 = -1$ dostáváme vztah $x_3 = -x_1 + x_2$.

$\boxed{\text{Krok 4}}$ Pokud zvolíme $\alpha_5 = 0$, čemuž odpovídá, že bychom ignorovali poslední sloupec výsledné matice (třetí sloupec už nyní rovněž ignorujeme), vidíme, že vektory x_1, x_2, x_4 jsou lineárně nezávislé. Tedy $B := (x_1, x_2, x_4, x_5)$.

$\boxed{\text{Krok 5}}$ Vidíme (třetí sloupec ignorujeme, čemuž odpovídá $\alpha_3 = 0$), že vektory x_1, x_2, x_4, x_5 jsou lineárně závislé. Podle algoritmu vektor x_5 je ze souboru B potřeba vyjmout, tedy po pátém (posledním) kroku $B := (x_1, x_2, x_4)$.

Zároveň vidíme, že $\alpha_4 = -\alpha_5$, $\alpha_2 = -2\alpha_4 - \alpha_5 = \alpha_5$, a $\alpha_1 = -2\alpha_2 - \alpha_4 = -\alpha_5$ tedy volbou $\alpha_5 = -1$ (pořád držíme $\alpha_3 = 0$) dostáváme vztah $x_5 = x_1 - x_2 + x_4$.

Abychom to shrnuli, užitím algoritmu výše, za bázi lineárního obalu $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]_\lambda$ lze volit soubor (x_1, x_2, x_4). Vyjádření jednotlivých vektorů coby lineární kombinace prvků báze je jasné z výše popsaného:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1x_1 + 0x_2 + 0x_4\,, \\
x_2 &= 0x_1 + 1x_2 + 0x_4\,, \\
x_4 &= 0x_1 + 0x_2 + 1x_4\,,
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
x_3 &= -1x_1 + 1x_2 + 0x_4\,, \\
x_5 &= 1x_1 - 1x_2 + 1x_4\,.
\end{aligned}
$$

Poznámka. Z tvaru výsledné matice v (4.1) je jasné, že lze za bázi zvolit i alternativní soubory (x_1, x_2, x_5) nebo (x_1, x_3, x_4) nebo (x_1, x_3, x_5). To odpovídá různým volbám souboru B před aplikací algoritmu, kdy pořadí vektorů různě permutujeme. (Další volby alternativních bází, v kterých nevystupuje vektor x_1, jsou rovněž možné.) Zkuste si pak vyjádřit jednotlivé vektory coby lineární kombinace prvků těchto alternativních bází.

Cvičení 2

V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{C}$ určete dimenzi následujícího lineárního obalu vektorů z $\mathbb{C}^4$:

$$
\left[\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \right]_\lambda .
$$

Opět jde jen o to zjistit, kolik z těchto vektorů je lineárně nezávislých. Z předchozího cvičení víme, že tento problém vyřešíme převedením matice, jež odpovídá libovolné lineární kombinaci rovné nule, do horního stupňovitého tvaru:

$$\begin{pmatrix}\alpha & 1 & 1 & 1\\ 1 & \alpha & 1 & 1\\ 1 & 1 & \alpha & 1\\ 1 & 1 & 1 & \alpha\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \alpha\\ 1 & 1 & \alpha & 1\\ 1 & \alpha & 1 & 1\\ \alpha & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \alpha\\ 0 & 0 & 1-\alpha & \alpha-1\\ 0 & 1-\alpha & 0 & \alpha-1\\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha & 1-\alpha^2\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \alpha\\ 0 & 0 & 1-\alpha & \alpha-1\\ 0 & 1-\alpha & 0 & \alpha-1\\ 0 & 0 & 1-\alpha & 2-\alpha^2-\alpha\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \alpha\\ 0 & 1-\alpha & 0 & \alpha-1\\ 0 & 0 & 1-\alpha & \alpha-1\\ 0 & 0 & 0 & 3-\alpha^2-2\alpha\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \alpha\\ 0 & 1-\alpha & 0 & \alpha-1\\ 0 & 0 & 1-\alpha & \alpha-1\\ 0 & 0 & 0 & (1-\alpha)(\alpha+3)\end{pmatrix}.$$

Všimněte si technicky užitečného triku, kdy jsme na počátku zpřeházeli řádky, abychom na prvních místech měli jedničky, a následující úpravy tak byly skutečně ekvivalentní. Z výsledného tvaru už je počet lineárně nezávislých vektorů, a tedy dimenze lineárního obalu, jasná:

$\boxed{\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-3, 1\}}$ V tomto případě je dimenze 4.

$\boxed{\alpha = 1}$ V tomto speciálním případě je zřejmě dimenze 1 (všechny vektory jsou si rovny).

$\boxed{\alpha = -3}$ V tomto speciálním případě má výsledná matice tvar

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \alpha\\ 0 & 4 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 4 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

z čehož vidíme, že dimenze je 3.

Cvičení 3

Nechť

$$x_1 := \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \quad x_2 := \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad x_3 := \begin{pmatrix}3\\-1\\2\\2\end{pmatrix}$$

jsou vektory z $\mathbb{C}^4$. Nalezněte bázi $[x_1, x_2, x_3]_\lambda$, která obsahuje

(a) vektor $x := \begin{pmatrix}1\\-5\\-4\\-6\end{pmatrix}$, (b) vektory $x := \begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}$, $y := \begin{pmatrix}-1\\3\\2\\2\end{pmatrix}$, (c) vektor $u := \begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix}$.

Ze zadání implicitně chápeme, že $x \in [x_1, x_2, x_3]_\lambda$ v případě (a); $x, y \in [x_1, x_2, x_3]_\lambda$ v případě (b); $u \in [x_1, x_2, x_3]_\lambda$ v případě (c). Nezávisle si můžete ověřit, že tomu tak skutečně je v případech (a) a (b), jakož i to, že v případě (c) to tak není! Nakonec toto vše bude jasné i z řešení níže.

ad (a)

Myšlenka řešení je zúžit soubor (x, x_1, x_2, x_3) na bázi lineárního obalu $[x_1, x_2, x_3]_\lambda$. Jak už víme ze Cvičení 1, stačí se podívat na matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & 1 & 2 \\ -6 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 5 & 14 \\ 0 & 7 & 5 & 14 \\ 0 & 10 & 6 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z konečné matice vidíme, že hledaná báze je například (x, x_1, x_2) nebo (x, x_2, x_3).

ad (b)

Opět stačí zúžit soubor (x, y, x_1, x_2, x_3) na bázi lineárního obalu $[x_1, x_2, x_3]_\lambda$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z konečné matice vidíme, že hledaná báze je například (x, y, x_1) nebo (x, y, x_2).

ad (c)

Zkusme opět zúžit soubor (u, x_1, x_2, x_3) na bázi lineárního obalu $[x_1, x_2, x_3]_\lambda$ podle algoritmu výše.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Odtud vidíme, že vektory u, x_1, x_2, x_3 jsou lineárně nezávislé. Tudíž $u \notin [x_1, x_2, x_3]_\lambda$, což znamená, že zadání nemá smysl (neexistuje báze lineárního obalu $[x_1, x_2, x_3]_\lambda$, jež by obsahovala vektor u).

Cvičení 4

Nechť x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 jsou vektory z $\mathcal{P}$. Najděte bázi $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]_\lambda$, pokud pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí

$$x_1(t) = 3 - 4t + t^2 + 2t^3,$$
$$x_2(t) = 5 + 26t - 9t^2 - 12t^3,$$
$$x_3(t) = 2 - 5t + 8t^2 - 3t^3,$$
$$x_4(t) = 2 + 3t - 4t^2 + t^3,$$
$$x_5(t) = 1 + 2t + 3t^2 - 4t^3.$$

Máme pět polynomů stupně tři (tedy prvky čtyřdimenzionálního podprostoru $\mathcal{P}_4$), tudíž dimenze lineárního obalu je maximálně čtyři (polynomy x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 jsou nezbytně lineárně závislé). Na druhou stranu je rovnou vidět, že například polynomy x_1, x_2 jsou lineárně nezávislé (x_2 nedostanu coby násobek x_1). Tudíž, aniž bychom cokoli počítali, rovnou víme, že dimenze lineárního obalu je minimálně dva a maximálně čtyři.

Jedná se o zúžení vektorů x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 na bázi. Z funkcionální rovnice $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5 = 0$, kde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{C}$, dostaneme s využitím lineární nezávislosti monomů $e_0(t) := 1$, $e_1(t) := t$, $e_2(t) := t^2$, $e_3(t) := t^3$ homogenní soustavu čtyř rovnic pro pět neznámých $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$, kterou můžeme zapsat do maticového tvaru

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ -4 & 26 & -5 & 3 & 2 \\ 1 & -9 & 8 & -4 & 3 \\ 2 & -12 & -3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 31 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -11 & 5 & -6 \\ 1 & -9 & 8 & -4 & 3 \\ 0 & 6 & -19 & 9 & -10 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 31 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -11 & 5 & -6 \\ 0 & 22 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 6 & -19 & 9 & -10 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 31 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -11 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & -252 & 108 & -144 \\ 0 & 0 & 14 & -6 & 8 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 31 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -11 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & -14 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Určitě vymyslíte elegantnější maticové úpravy.) Z konečné matice vidíme, že báze je například soubor (x_1, x_2, x_3) nebo (x_1, x_2, x_4) nebo (x_1, x_2, x_5), a tedy dimenze je tři.

Cvičení 5

Nechť $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{P}_5$. Najděte $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tak, aby $\dim[x_1, x_2, x_3]_\lambda < 3$, pokud pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1 + 4t - 2t^2 + 3t^3 + t^4, \\ x_2(t) &= 2 + 4t - 3t^2 - 2t^3 + 3t^4, \\ x_3(t) &= \alpha + \beta t + \gamma t^2 + 11t^4. \end{aligned}$$

Ze zadání, bez ohledu na hodnoty parametrů α, β, γ je jasné, že $2 \leq \dim[x_1, x_2, x_3]_\lambda \leq 3$. Dolní odhad plyne z toho, že vektory x_1, x_2 jsou zcela zřejmě lineárně nezávislé (x_2 není násobkem x_1), zatímco horní odhad plyne z toho, že se jedná o lineární obal tří vektorů. Naším úkolem je tedy najít hodnoty parametrů α, β, γ, pro něž jsou vektory x_1, x_2, x_3 lineárně závislé, čili x_3 je lineární kombinací x_1, x_2.

Z funkcionální rovnice $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, kde $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$, dostaneme s využitím lineární nezávislosti monomů $e_0(t) := 1$, $e_1(t) := t$, $e_2(t) := t^2$, $e_3(t) := t^3$, $e_4(t) := t^4$ homogenní soustavu pěti rovnic pro tři neznámé a_1, a_2, a_3, kterou můžeme zapsat do maticového tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 4 & 4 & \beta \\ -2 & -3 & \gamma \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & -4 & -4\alpha + \beta \\ 0 & 1 & 2\alpha + \gamma \\ 0 & -8 & -3\alpha \\ 0 & 1 & 11 - \alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & -4 & -4\alpha + \beta \\ 0 & 0 & 4\alpha + \beta + 4\gamma \\ 0 & 0 & 5\alpha - 2\beta \\ 0 & 0 & 3\alpha + \gamma - 11 \end{pmatrix}.$$

Z konečné matice vidíme, že vektory x_1, x_2, x_3 jsou lineárně závislé ($\Leftrightarrow$ existuje netriviální řešení) tehdy a jen tehdy, pokud

$$4\alpha + \beta + 4\gamma = 0 \quad \wedge \quad 5\alpha - 2\beta = 0 \quad \wedge \quad 3\alpha + \gamma - 11 = 0 .$$

To je nehomogenní soustava tří rovnic o třech neznámých α, β, γ, kterou můžeme zapsat to maticového tvaru

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -13 & -20 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 44 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -13 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -44 & 572 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -13 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -13 \end{array}\right).$$

Z poslední matice dostáváme jednoznačné řešení

$$\gamma = -13 , \qquad \beta = \frac{20\gamma}{-13} = 20 , \qquad \alpha = \frac{-\beta - 4\gamma}{4} = 8 .$$

Cvičení 6

Nalezněte dvě báze $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ prostoru $\mathbb{R}^4$ tak, aby neměly žádný společný vektor, přičemž $\mathcal{X}$ bude obsahovat vektory $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ a $\mathcal{Y}$ vektory $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Nejdříve zafixujme bázi $\mathcal{X}$ takto

$$\mathcal{X} := \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right),$$

což je asi ten nejjednodušší způsob, poněvadž jsme pouze přidali zbývající vektory standardní báze. Podobně jednoduše bychom za druhou bázi chtěli zvolit

$$\mathcal{Y}' := \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right),$$

avšak první vektor už je obsažen ve fixované bázi $\mathcal{X}$. Nicméně tento soubor stačí jen jemně modifikovat například takto

$$\mathcal{Y} := \left(\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right),$$

aby soubory $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ neobsahovaly žádný společný vektor.

Cvičení 7

Nechť x_1, x_2, x_3, x_4 jsou vektory z prostoru $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$. Určete dimenzi a najděte bázi $[x_1, x_2, x_3, x_4]_\lambda$, je-li

$$x_1 := \begin{pmatrix}3+2i\\2-3i\end{pmatrix}, \quad x_2 := \begin{pmatrix}2-i\\3+i\end{pmatrix}, \quad x_3 := \begin{pmatrix}3+4i\\-1-5i\end{pmatrix}, \quad x_4 := \begin{pmatrix}1-2i\\1+3i\end{pmatrix}.$$

Rovnou ze zadání vidíme, že $2 \le [x_1, x_2, x_3, x_4]_\lambda \le 4$, protože alespoň dva vektory jsou lineárně nezávislé (například x_2 není reálným násobkem x_1), zatímco lineární obal je generován čtyřmi vektory (pozor: dimenze $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$ je čtyři, zatímco dimenze standardního prostoru $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{C}$ je dva).

Jedná se o zúžení vektorů x_1, x_2, x_3, x_4 na bázi $[x_1, x_2, x_3, x_4]_\lambda$. Z vektorové rovnice $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0$, kde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$, dostaneme porovnáním reálných a imaginárních částí homogenní soustavu osmi rovnic o čtyřech neznámých $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, kterou můžeme zapsat maticově takto

$$\begin{pmatrix}3&2&3&1\\2&-1&4&-2\\2&3&-1&1\\-3&1&-5&3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&3&-1&3\\2&-1&4&-2\\0&-4&5&-3\\0&3&-2&4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&3&-1&3\\0&-7&6&-8\\0&-4&5&-3\\0&3&-2&4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&3&-1&3\\0&0&-1&-1\\0&-4&5&-3\\0&0&7&7\end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix}1&3&-1&3\\0&-4&5&-3\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Z poslední matice vidíme, že $\dim[x_1, x_2, x_3, x_4]_\lambda = 3$. Báze je například (x_1, x_2, x_3) nebo (x_1, x_2, x_4).

(Kolik je dimenze $[x_1, x_2, x_3, x_4]_\lambda$, pokud bychom chápali x_1, x_2, x_3, x_4 coby vektory z prostoru $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{C}$?)

5 Báze, souřadnice vektorů v bázi

Maticí vektoru $v \in \mathcal{V}$ vzhledem k bázi $V := (v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{V}^n$ je matice typu $n \times 1$

$$(v)_V := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

jejíž prvky jsou (jednoznačně) určeny rozkladem

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \,. \tag{5.1}$$

Jediné, co je třeba si pamatovat, že čísla (*souřadnice*) $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ z rozkladu (5.1) se skládají do sloupečku. Každému vektoru z n-dimenzionálního prostoru $\mathcal{V}$ tedy přiřazujeme vektor $(v)_V$ ze souřadnicového prostoru $\mathbb{T}^n$. Toto přiřazení je vzájemně jednoznačné, jinými slovy indukuje isomorfismus (= bijektivní lineární zobrazení) mezi $\mathcal{V}$ a $\mathbb{T}^n$.

Cvičení 1

Nechť $\mathcal{X} := (x_1, x_2, x_3)$ je soubor vektorů z $\mathbb{C}^3$ a $x \in \mathbb{C}^3$ takové, že

$$x_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dokažte, že $\mathcal{X}$ je báze $\mathbb{C}^3$, a nalezněte $(x)_\mathcal{X}$.

Pro důkaz, že $\mathcal{X}$ je báze $\mathbb{C}^3$, stačí ukázat, že vektory x_1, x_2, x_3 jsou lineárně nezávislé, poněvadž soubor $\mathcal{X}$ je tvořen třemi vektory a dimenze prostoru $\mathbb{C}^3$ je tři. Z úpravy (pozor, prohazujeme i sloupce)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je však lineární nezávislost zcela zřejmá.

Podle definice

$$(x)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \qquad \text{kde} \qquad x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \,, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C} \,.$$

To vede na nehomogenní soustavu, jejíž matice je dána

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Odtud rovnou dostáváme $\alpha_3 = 3$, $\alpha_2 = -1$ a $\alpha_1 = 1 - \alpha_2 = 2$ (mimochodem odtud také vidíme, že $\mathcal{X}$ je báze). Tedy

$$(x)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(Proveďte si kontrolu, že skutečně $x = 2x_1 - x_2 + 3x_3$.)

Cvičení 2

Nechť $\mathcal{X} := (x_1, x_2, x_3)$ a $\mathcal{Y} := (y_1, y_2, y_3)$ jsou dvě báze $\mathbb{C}^3$, kde

$$x_1 := \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad x_2 := \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad x_3 := \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad y_1 := \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad y_2 := \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}, \quad y_3 := \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

Nalezněte $(x)_\mathcal{X}$, je-li $(x)_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$.

Ze zadání víme, že

$$x = 3y_1 + 4y_3 + 3y_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}.$$

Tento vektor je potřeba rozložit do báze $\mathcal{X}$, tedy

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \,, \tag{5.2}$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$, a pak

$$(x)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}.$$

Vektorová rovnice (5.2) je ekvivalentní nehomogenní soustavě

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right),$$

odkud rovnou dostáváme $\alpha_3 = 3$, $\alpha_2 = -1$ a $\alpha_1 = 1 - \alpha_2 = 2$. Tedy

$$(x)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}.$$

(Udělejte si zkoušku, že skutečně $2x_1 - x_2 + 3x_3 = x$.)

Cvičení 3

Nechť $\mathcal{V}_3$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$. Nechť $\mathcal{X} := (x_1, x_2, x_3)$ je báze $\mathcal{V}_3$ a $\mathcal{Y} := (y_1, y_2, y_3)$ je soubor vektorů z $\mathcal{V}_3$ a $x \in \mathcal{V}_3$. Dokažte, že $\mathcal{Y}$ je také báze $\mathcal{V}_3$, a najděte $(x)_\mathcal{Y}$, je-li

$$(y_1)_\mathcal{X} := \begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix}, \quad (y_2)_\mathcal{X} := \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}, \quad (y_3)_\mathcal{X} := \begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}, \quad (x)_\mathcal{X} := \begin{pmatrix}-6\\5\\2\end{pmatrix}.$$

Pro důkaz, že $\mathcal{Y}$ je báze ve $\mathcal{V}_3$, stačí využít isomorfismu $\mathcal{V}_3 \ni y \mapsto (y)_\mathcal{X} \in \mathbb{T}^3$ a ověřit, že $((y_1)_\mathcal{X}, (y_2)_\mathcal{X}, (y_3)_\mathcal{X})$ je báze v $\mathbb{T}^3$. Poněvadž máme tři vektory a prostor je trojdimenzionální, stačí ověřit lineární nezávislost, což vede na prozkoumání homogenní soustavy

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 10 & 8 \\ 0 & -5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Z poslední matice je zřejmě, že vektory $(y_1)_\mathcal{X}, (y_2)_\mathcal{X}, (y_3)_\mathcal{X}$ jsou skutečně lineárně nezávislé.

Pro nalezení souřadnic vektoru x v bázi $\mathcal{Y}$, pišme

$$(x)_\mathcal{Y} =: \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}, \qquad \text{kde} \qquad x = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 \,,$$

kde $\alpha_1, \alpha_2\alpha_3 \in \mathbb{T}$ jsou hledané souřadnice. Z posledního vztahu (s využitím toho, že $\mathcal{X}$ je báze) dostáváme

$$(x)_{\mathcal{X}} = \alpha_1(y_1)_{\mathcal{X}} + \alpha_2(y_2)_{\mathcal{X}} + \alpha_3(y_3)_{\mathcal{X}}\,,$$

což je ekvivalentní nehomogenní soustavě

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 10 & 8 & -12 \\ 0 & -5 & -1 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 10 & 8 & -12 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right)$$

pro neznámé $\alpha_1, \alpha_2\alpha_3$. Z poslední matice okamžitě dostáváme $\alpha_3 = 6/6 = 1$, $\alpha_2 = (-12 - 8\alpha_3)/10 = -2$ a $\alpha_1 = -2 - 3\alpha_2 - 2\alpha_3 = 2$ (a navíc, že $(y_1)_{\mathcal{X}}, (y_2)_{\mathcal{X}}, (y_3)_{\mathcal{X}}$ je báze v $\mathbb{T}^3$). Tedy

$$(x)_{\mathcal{Y}} =: \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 4

Nechť $\mathcal{X} := (x_1, x_2, x_3)$ a $\mathcal{Y} := (y_1, y_2, y_3)$ jsou báze $\mathbb{C}^3$ a $x, y \in \mathbb{C}^3$, kde

$$x_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (x)_{\mathcal{Y}} := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},$$
$$(y_1)_{\mathcal{X}} := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (y_2)_{\mathcal{X}} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (y_3)_{\mathcal{X}} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (y)_{\mathcal{X}} := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Určete $(x - 2y)_{\mathcal{E}}$ a $(x - 2y)_{\mathcal{X}}$.

Zde $\mathcal{E} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je standardní báze v $\mathbb{C}^3$.

Určení $(x - 2y)_{\mathcal{X}}$ je jednodušší. Poněvadž $(x - 2y)_{\mathcal{X}} = (x)_{\mathcal{X}} - 2(y)_{\mathcal{X}}$ a souřadnice $(y)_{\mathcal{X}}$ jsou zadané, zbývá určit $(x)_{\mathcal{X}}$. Ze zadaných souřadnic $(x)_{\mathcal{Y}}$ víme, že

$$x = y_1 - 2y_2 - y_3\,,$$

odkud

$$(x)_{\mathcal{X}} = (y_1)_{\mathcal{X}} - 2(y_2)_{\mathcal{X}} - (y_3)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$(x - 2y)_{\mathcal{X}} = (x)_{\mathcal{X}} - 2(y)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Vektor $x - 2y = (x - 2y)_{\mathcal{E}} = (x)_{\mathcal{E}} - 2(y)_{\mathcal{E}}$ bychom mohli určit tak, že bychom zjistili, jak vypadají jednotlivé vektory $(x)_{\mathcal{E}} = x$ a $(y)_{\mathcal{E}} = y$. Alternativně však můžeme rychleji využít toho, že už známe souřadnice hledaného vektoru $x - 2y$ vzhledem k bázi $\mathcal{X}$, jež je zadaná explicitně:

$$(x - 2y)_{\mathcal{E}} = x - 2y = 0x_1 - 8x_2 - 4x_3 = 0\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -24 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 5

Nechť $\mathcal{X} := \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{C}^{2,2}$.

(a) Doplňte vektory $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ na bázi $\mathcal{Y}$ prostoru $\mathbb{C}^{2,2}$.

(b) Nalezněte $(X)_{\mathcal{Y}}$, je-li $(X)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Pišme $\mathcal{X} =: (x_1, x_2, x_3, x_4)$ a $y_1 := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a $y_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Standardní bázi prostoru $\mathbb{C}^{2,2}$ označme standardně $\mathcal{E} := (e_1, e_2, e_3, e_4)$, kde $e_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ad (a)

Postup je standardní: Soubor $(y_1, y_2, e_1, e_2, e_3, e_4)$ zúžíme na bázi (alternativně bychom mohli zúžit soubor $(y_1, y_2, x_1, x_2, x_3, x_4)$). Maticová rovnice $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 e_1 + \alpha_4 e_2 + \alpha_5 e_3 + \alpha_6 e_4 = 0$, kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_6 \in \mathbb{C}$, je ekvivalentní homogenní soustavě

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Z poslední matice je zřejmé, že hledaná báze je například $\mathcal{Y} = (y_1, y_2, e_1, e_3)$.

ad (b)

Ze zadání nejdříve spočteme

$$X = 0x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = \begin{pmatrix} 0 & -2+2i \\ 2i & -i \end{pmatrix}.$$

Podle definice $(X)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix}$, kde

$$X = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \beta_3 e_1 + \beta_4 e_3$$

a $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \in \mathbb{C}$ jsou hledané souřadnice. Tato maticová rovnice je ekvivalentní nehomogenní soustavě

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2+2i \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2i \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -i \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2+2i \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2i \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & i \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & i \end{array}\right),$$

odkud $\beta_4 = i$, $\beta_3 = 0$, $\beta_2 = 1$ a $\beta_1 = -(-i+\beta_2) = -1+i$. Tedy

$$(X)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}.$$

Cvičení 6

Nechť $\mathcal{Y} := \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^{2,2}$. Nechť X_1, X_2, X_3, X_4 jsou vektory z $\mathbb{R}^{2,2}$, kde

$$(X_1)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (X_2)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (X_3)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad (X_4)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Rozhodněte, zda $\mathcal{X} := (X_1, X_2, X_3, X_4)$ je báze $\mathbb{R}^{2,2}$. Vysvětlete.
(b) Vyberte bázi z generátorů $[X_1, X_2, X_3, X_4]_\lambda$.
(c) Doplňte $Z := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ na bázi $[X_1, X_2, X_3, X_4]_\lambda$, je-li to možné.
(d) Nechť $(U)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Doplňte U, Z na bázi $\mathbb{R}^{2,2}$, je-li to možné.

ad (a)

Stačí využít isomorfismu $\mathbb{R}^{2,2} \ni X \mapsto (X)_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R}^4$ a ověřit, že $((X_1)_{\mathcal{Y}}, (X_2)_{\mathcal{Y}}, (X_3)_{\mathcal{Y}}, (X_4)_{\mathcal{Y}})$ je báze v $\mathbb{R}^4$. Za tímto účelem stačí prozkoumat, zda vektory $(X_1)_{\mathcal{Y}}, (X_2)_{\mathcal{Y}}, (X_3)_{\mathcal{Y}}, (X_4)_{\mathcal{Y}}$ jsou lineárně nezávislé. Tato otázka vede na homogenní soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

jež má však zřejmě netriviální řešení. Tudíž $\mathcal{X}$ není báze $\mathbb{R}^{2,2}$.

ad (b)

Po maticových úpravách v bodě (a) je zřejmé, že hledaná báze je například (X_1, X_2, X_3).

ad (c)

V prvním kroku najdeme souřadnice vektoru Z vzhledem k bázi $\mathcal{Y}$. Pišme $(Z)_\mathcal{Y} =: \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\\ \beta_4\end{pmatrix}$, kde

$$Z = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3 + \beta_4 y_4\,,$$

značíme $(y_1, y_2, y_3, y_4) := \mathcal{Y}$ a $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \in \mathbb{R}$ jsou hledané souřadnice. Tato maticová rovnice je ekvivalentní nehomogenní soustavě

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right),$$

jež už je v dolním stupňovitém tvaru, tudíž rovnou nacházíme $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 3-\beta_1 = 1$, $\beta_3 = -2-\beta_1-\beta_2 = -5$ a $\beta_4 = -3 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 = -1$. Tedy

$$(Z)_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix}2\\ 1\\ -5\\ -1\end{pmatrix}.$$

V druhém kroku se standardně pokusíme zúžit soubor (Z, X_1, X_2, X_3) na bázi lineárního obalu

$$[X_1, X_2, X_3, X_4]_\lambda = [X_1, X_2, X_3]_\lambda \subset\subset \mathbb{R}^{2,2}$$

(rovnost platí díky bodu (b)). To je ekvivalentní pokusu zúžit soubor $((Z)_\mathcal{Y}, (X_1)_\mathcal{Y}, (X_2)_\mathcal{Y}, (X_3)_\mathcal{Y})$ na bázi lineárního obalu

$$[(X_1)_\mathcal{Y}, (X_2)_\mathcal{Y}, (X_3)_\mathcal{Y}]_\lambda \subset\subset \mathbb{R}^4\,.$$

Tato procedura vede na prozkoumání homogenní soustavy

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 1\\ -5 & 1 & 1 & -2\\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 1\\ -5 & 1 & 1 & -2\\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & -2 & -1\\ 0 & -4 & 11 & 3\\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 9 & 2\\ 0 & -2 & 8 & 4\\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 9 & 2\\ 0 & 0 & -10 & 0\\ 0 & 0 & -5 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 9 & 2\\ 0 & 0 & -10 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Z konečné matice vidíme, že vektory Z, X_1, X_2, X_3 jsou lineárně nezávislé. Tudíž $Z \notin [X_1, X_2, X_3]_\lambda$, a Z tudíž nelze doplnit na bázi $[X_1, X_2, X_3]_\lambda$.

ad (d)

Standardně se pokusíme zúžit soubor $(U, Z, e_1, e_2, e_3, e_4)$ na bázi $\mathbb{R}^{2,2}$. To je ekvivalentní pokusu zúžit soubor $((U)_\mathcal{Y}, (Z)_\mathcal{Y}, (e_1)_\mathcal{Y}, (e_2)_\mathcal{Y}, (e_3)_\mathcal{Y}, (e_4)_\mathcal{Y})$ na bázi $\mathbb{R}^4$. Souřadnice $(U)_\mathcal{Y}$ jsou zadané a $(Z)_\mathcal{Y}$ jsme našli v části (c), zbývá tedy zjistit souřadnice standardní báze $\mathbb{R}^{2,2}$ vzhledem k bázi $\mathcal{Y}$. To můžeme učinit stejným postupem jako v části (c). Přímější je využít jednoduchého tvaru zadání báze $\mathcal{Y}$ a kanonicky jednoduchého tvaru standardní báze $\mathcal{E}$. Vskutku, rovnou vidíme, že

$$e_4 = y_4\,, \qquad e_3 = y_3 - y_4\,, \qquad e_2 = y_2 - y_3\,, \qquad e_1 = y_1 - y_2\,,$$

odkud

$$(e_4)_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \qquad (e_3)_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}, \qquad (e_2)_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}, \qquad (e_1)_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Vektorová rovnice $\gamma_1(U)_{\mathcal{Y}} + \gamma_2(Z)_{\mathcal{Y}} + \gamma_3(e_1)_{\mathcal{Y}} + \gamma_4(e_2)_{\mathcal{Y}} + \gamma_5(e_3)_{\mathcal{Y}} + \gamma_6(e_4)_{\mathcal{Y}} = 0$, kde $\gamma_1, \dots, \gamma_6 \in \mathbb{R}$, je ekvivalentní homogenní soustavě

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 19 & -10 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 19 & -10 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -15 & 19 \end{pmatrix}.$$

Z poslední matice vidíme, že hledaná báze je například (Z, U, e_1, e_2).

6 Podprostor

Pojem podprostoru jsme zavedli už v kapitolce 2. Připomeňme, že pro ověření toho, že podmnožina $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ je podprostor, stačí ověřit, že podmnožina $\mathcal{U}$ obsahuje nulový vektor a že je uzavřená vůči sčítání vektorů a vůči násobení čísly.

Další potřebné pojmy z teorie jsou *součet* a *průnik* podprostorů $P, Q \subset\subset \mathcal{V}$:

$$P + Q := \{p + q : \ p \in P, \ q \in Q\} \subset\subset \mathcal{V},$$
$$P \cap Q := \{p : \ p \in P \ \wedge \ p \in Q\} \subset\subset \mathcal{V}.$$

Poněvadž se jedná opět o podprostory, má smysl mluvit o dimenzi a bázi.

Cvičení 1

Zjistěte, zda množina $M \subset \mathbb{C}^3$ je podprostor $\mathbb{C}^3$, a pokud je, určete bázi a dimenzi M.

(a) $M := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : \ \forall j \in \{1,2,3\}, \ x_j \in \mathbb{Z} \right\}$,

(b) $M := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : \ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$,

(c) $M := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : \ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \ \wedge \ x_1 - x_3 = 0 \right\}$,

(d) $M := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : \ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \right\}$.

ad (a)

Existuje vektor $x \in M$ a číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ (například $x := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ a $\alpha := \frac{1}{2}$) takové, že $\alpha x \notin M$. Tudíž množina M není uzavřená vůči násobení čísly, a M není podprostor $\mathbb{C}^3$.

ad (b)

Z geometrické interpretace množiny M víme, že se jedná o rovinu procházející počátkem. Tudíž M je podprostor $\mathbb{C}^3$ a $\dim M = 2$. Báze je dána libovolnými dvěma lineárně nezávislými vektory, jež jsou kolmé na normálový vektor $n := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, tedy například $\left(\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)\right)$.

Alegebraicky bychom postupovali takto. Nulový vektor $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ zřejmě splňuje rovnici $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. Mějme dva libovolné vektory $x := \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ a $y := \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right)$, jež leží v M, což znamená, že $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ a $y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$. Jejich součet splňuje $x + y = \left(\begin{smallmatrix} x_1+y_1 \\ x2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{smallmatrix}\right)$, tudíž

$$\begin{aligned} (x+y)_1 - 2(x+y)_2 + (x+y)_3 &= (x_1 + y_1) - 2(x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) \\ &= (x_1 - 2x_2 + x_3) + (y_1 - 2y_2 + y_3) \\ &= 0 + 0 = 0 . \end{aligned}$$

Tedy množina M je uzavřená vůči sčítání vektorů. To, že je M uzavřená i vůči násobení (komplexními) čísly, se ověří analogicky (zkuste si). Čistě algebraicky jsme tedy ověřili, že M je podprostor $\mathbb{C}^3$.

Abychom našli nějakou bázi M, z rovnice $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$, jež definuje podprostor M, vyjádříme například $x_1 = 2x_2 - x_3$ a dosadíme:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 2x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \ x_2, x_3 \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \ x_2, x_3 \in \mathbb{C} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda .$$

Odtud vidíme, že báze M je například soubor $\left(\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$ a $\dim M = 2$.

ad (c)

Zřejmě platí, že $M = M_1 \cap M_2$, kde

$$M_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : \ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\} \qquad \text{a} \qquad M_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : \ x_1 - x_3 = 0 \right\}.$$

Z předchozího bodu (b) už víme, že M_1 je podprostor (rovina). Stejným způsobem bychom ověřili, že i M_2 je podprostor (opět rovina). Tudíž M je podprostor. Z geometrické interpretace víme, že se musí jednat o přímku (protože $M_1 \neq M_2$), tudíž $\dim M = 1$. Skutečně, i algebraicky, užitím obou rovnic $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ a $x_1 - x_3 = 0$ dostáváme

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} : \ x_2 \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \ x_2 \in \mathbb{C} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda .$$

Odtud rovněž vidíme, že $\dim M = 1$, a navíc že báze M je například soubor $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \right)$.

ad (d)

Geometricky se jedná o rovinu, jež neprochází počátkem, tudíž M není podprostor $\mathbb{C}^3$. Algebraicky bychom to ověřili například tak, že si všimneme, že nulový vektor $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$ zřejmě nesplňuje rovnici $x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$.

Cvičení 2

Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^3$, $Q \subset\subset \mathbb{R}^3$. Nalezněte dimenzi a bázi $P + Q$ a $P \cap Q$, je-li

$$P := \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_\lambda \qquad \text{a} \qquad Q := \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right]_\lambda .$$

Nejdříve prozkoumejme samotné prostory P a Q:

$$P: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q: \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 0 & 8 & -8 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud vidíme, že $\dim P = 2 = \dim Q$ a báze P je například soubor (p_1, p_2) a báze Q je například soubor (q_1, q_2)

$$p_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad p_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad q_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Geometricky se tedy v obou případech jedná o roviny. Poněvadž normálové vektory

$$p_1 \times p_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad q_1 \times q_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nejsou kolineární, $P \neq Q$. Tedy nezbytně $P + Q = \mathbb{R}^3$, odkud $\dim(P + Q) = 3$ a báze součtu je jakákoli báze R^3 (například standardní); a $P \cap Q$ je přímka, odkud $\dim(P \cap Q) = 1$.

Algebraické řešení, včetně nalezení báze průniku, je následující. Podle definice součtu, platí $P + Q = [p_1, p_2, q_1, q_2]_\lambda$. Bázi prostoru takovéhoto typu jsme už hledali mnohokrát (jedná se o zúžení na bázi):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

odkud dostáváme, že $\dim(P+Q)=3$ (tedy nezbytně $P+Q=\mathbb{R}^3$) a báze $P+Q$ je například (p_1,p_2,q_1) (nebo jakákoli jiná báze $\mathbb{R}^3$). Pro nalezení báze průniku si stačí uvědomit, že $u \in P\cap Q$ tehdy a jen tehdy, pokud existují čísla $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2 \in \mathbb{R}$ taková, že $u=\alpha_1 p_1+\alpha_2 p_2$ a zároveň $u=\beta_1 q_1+\beta_2 q_2$, odkud $\alpha_1 p_1+\alpha_2 p_2=\beta_1 q_1+\beta_2 q_2$ neboli $\alpha_1 p_1+\alpha_2 p_2+(-\beta_1)q_1+(-\beta_2)q_2=0$, což je opět ekvivalentní soustavě (6.1), avšak s jinou interpretací, a to následující. Z konečné matice v (6.1) dostáváme $-\beta_1+\beta_2=0$, což implikuje

$$u=\beta_1(q_1+q_2)=\beta_1\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix},$$

odkud vidíme, že báze $P\cap Q$ je například soubor $(q_1+q_2)=\left(\left(\begin{smallmatrix}3\\5\\1\end{smallmatrix}\right)\right)$ a $\dim(P\cap Q)=1$.

Zkušenost z opravování zkouškových písemek je, že nalezení báze a dimenze součtu $P+Q$ je pro studenty obvykle jednodušší. Pokud si zoufalý student neví v písemce s průnikem $P\cap Q$ rady, lze nějaké další body nasbírat alespoň identifikací dimenze $P\cap Q$, k čemuž lze využít obecný dimenzionální vztah

$$\dim(P+Q)=\dim P+\dim Q-\dim(P\cap Q)\,, \tag{6.2}$$

a to aniž bychom samotnou bázi průniku našli.

Cvičení 3

Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^3$, $Q \subset\subset \mathbb{C}^3$. Nalezněte dimenzi a bázi $P+Q$ a $P\cap Q$, je-li

$$P:=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^3 :\ 2x_1+4x_2-3x_3=0\right\}$$

a

$$\text{(a)}\quad Q:=\left[\begin{pmatrix}5\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda,\qquad\qquad \text{(b)}\quad Q:=\left[\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}\right]_\lambda.$$

ad (a)

Rovnou vidíme, že P je rovina, tudíž $\dim P=2$. Zároveň rovnou vidíme, že $\dim Q=2$ (jelikož vektory q_1,q_2, jež generují Q, jsou jasně lineárně nezávislé), tudíž Q je rovněž rovina. Normálový vektor Q je

$$q_1\times q_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix},\qquad \text{kde}\qquad q_1:=\begin{pmatrix}5\\-1\\1\end{pmatrix},\quad q_2:=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},$$

zatímco normálový vektor P je $\left(\begin{smallmatrix}2\\4\\-3\end{smallmatrix}\right)$, tudíž $P\neq Q$. Tedy nezbytně $P+Q=\mathbb{C}^3$, odkud $\dim(P+Q)=3$ a báze součtu je jakákoli báze $\mathbb{C}^3$ (například standardní); a $P\cap Q$ je přímka, odkud $\dim(P\cap Q)=1$.

Alegebraické řešení je následující. Nejdříve vyjádříme P jako lineární obal

$$\begin{aligned}P&=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} :\ x_1=3s\ \wedge\ x_2=3t\ \wedge\ x_3=\frac{2x_1+4x_2}{3}=2s+4t\ \wedge\ s,t\in\mathbb{C}\right\}\\
&=\left\{\begin{pmatrix}3s\\3t\\2s+4t\end{pmatrix} :\ s,t\in\mathbb{C}\right\}=\left\{s\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} :\ s,t\in\mathbb{C}\right\}\\
&=[p_1,p_2]_\lambda\,,\qquad \text{kde}\qquad p_1:=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix},\quad p_2:=\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Jak už víme, pro nalezení báze $P+Q$ i $P\cap Q$ se stačí podívat na soustavu

$$\begin{pmatrix}3&0&5&3\\0&3&-1&0\\2&4&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&0&5&3\\0&3&-1&0\\0&12&-7&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&0&5&3\\0&3&-1&0\\0&0&-3&-3\end{pmatrix}.$$

Odtud vidíme, že $\dim(P+Q)=3$ (tedy nezbytně $P+Q=\mathbb{C}^3$) a báze $P+Q$ je například (p_1,p_2,q_1) (nebo jakákoli jiná báze $\mathbb{C}^3$). Zároveň vidíme, že $u\in P\cap Q$ tehdy a jen tehdy, pokud $u\in[q_1-q_2]_\lambda$, tedy báze $P\cap Q$ je například soubor $(q_1-q_2)=\left(\left(\begin{smallmatrix}2\\-1\\0\end{smallmatrix}\right)\right)$ a $\dim(P\cap Q)=1$.

ad (b)

Už víme, že P je rovina, tudíž $\dim P=2$, a báze P je (p_1,p_2). Zároveň stejně jako v případě (a) vidíme, že $\dim Q=2$, tudíž Q je rovněž rovina. Normálový vektor Q je

$$q_1\times q_2=\begin{pmatrix}4\\8\\-6\end{pmatrix},\qquad \text{kde}\qquad q_1:=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\quad q_2:=\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix},$$

což je dvojnásobek normálového vektoru P, který je roven $\left(\begin{smallmatrix}2\\4\\-3\end{smallmatrix}\right)$, tudíž $P=Q$. Tedy nezbytně $P+Q=P=Q$ (rovina), odkud $\dim(P+Q)=2$ a báze součtu je například (p_1,p_2) nebo (q_1,q_2). Zároveň $P\cap Q=P=Q$, odkud $\dim(P\cap Q)=2$ a báze průniku je opět například (p_1,p_2) nebo (q_1,q_2).

Ke stejnému výsledku přijdeme i čistě algebraicky. Jak už víme, pro nalezení báze $P+Q$ i $P\cap Q$ se stačí podívat na soustavu

$$\begin{pmatrix}3&0&1&5\\0&3&1&-1\\2&4&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&0&1&5\\0&3&1&-1\\0&12&4&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&0&1&5\\0&3&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Odtud vidíme, že $\dim(P+Q)=2$ a báze $P+Q$ je například (p_1,p_2). Užitím obecného vztahu (6.2) dostáváme, že rovněž $\dim(P\cap Q)=2$, a poněvadž $\dim P=2=\dim Q$, nezbytně $P=Q$, tudíž báze $P\cap Q$ je rovněž například (p_1,p_2). Alternativně, z poslední matice v (6.3) vidíme, že $u\in P\cap Q$ tehdy a jen tehdy, pokud

$$u=\beta_1q_1+\beta_2q_2\quad\wedge\quad u=\frac{\beta_1-5\beta_2}{3}p_1+\frac{\beta_1-\beta_2}{3}p_2\,,$$

kde $\beta_1,\beta_2\in\mathbb{C}$ jsou libovolná čísla, a zároveň vektory q_1,q_2 lze vyjádřit jako lineární kombinace p_1,p_2, tudíž báze $P\cap Q$ je (p_1,p_2) nebo (q_1,q_2).

Cvičení 4

Nechť $P\subset\subset\mathbb{R}^4$, $Q\subset\subset\mathbb{R}^4$. Nalezněte dimenzi a bázi $P+Q$ a $P\cap Q$, je-li

$$P:=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4:\ x_2+3x_3+x_4=0\ \wedge\ 2x_1+x_2+3x_3-x_4=0\right\},$$

$$Q:=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4:\ -2x_1+x_2+5x_3+5x_4=0\ \wedge\ 4x_1+3x_2+5x_3-5x_4=0\right\}.$$

Jsme sice ve čtyřech dimenzích, avšak možné geometrické scénáře nejsou o moc pestřejší. Prostor P je definován coby průnik dvou různých nadrovin (což jsou trojdimenzionální prostory), tudíž se musí jednat o rovinu (dvojdimenzionální prostor); $\dim P=2$. Stejná tvrzení platí o Q; $\dim Q=2$. Pokud $P=Q$, pak $P\cap Q=P=Q$ je rovina, a tudíž $\dim(P\cap Q)=2$; jinak $P\cap Q$ je přímka, a tudíž $\dim(P\cap Q)=1$. V prvním případě ($P=Q$) by platilo, že $P+Q$ je rovina, a tudíž $\dim(P+Q)=2$; zatímco v druhém ($P\neq Q$) je to nezbytně nadrovina, a tudíž $\dim(P+Q)=3$. Snadno se přesvědčíme, že nastává druhý scénář ($P\neq Q$), poněvadž například

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\in P\qquad\wedge\qquad\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\notin Q\,.$$

Tudíž $\dim(P\cap Q)=1$ a $\dim(P+Q)=3$. Ověřme nyní tuto čistě geometrickou úvahu algebraickým výpočtem, který se od vás očekává a navíc dá požadované báze.

Z druhé rovnice definující P vyjádříme například $x_4 = 2x_1 + x_2 + 3x_3$ a dosadíme do první rovnice, čímž dostaneme rovnici $x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$, z které vyjádříme například $x_1 = -x_2 - 3x_3 = 0$. Tento výsledek můžeme zpětně dosadit do $x_4 = 2(-x_2 - 3x_3) + x_2 + 3x_3 = -x_2 - 3x_3$. Nakonec lze tedy psát

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ -x_2 - 3x_3 \end{pmatrix} : \; x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = [p_1, p_2]_\lambda , \qquad \text{kde} \qquad p_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad p_2 := \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Vektory p_1, p_2 jsou očividně lineárně nezávislé, tudíž tvoří bázi P a $\dim P = 2$.

Obdobně, z první rovnice definující Q vyjádříme například $x_2 = 2x_1 - 5x_3 - 5x_4$ a dosadíme do druhé rovnice, čímž dostaneme rovnici $x_1 - x_3 - 2x_4 = 0$, z které vyjádříme například $x_1 = x_3 + 2x_4$. Tento výsledek můžeme zpětně dosadit do $x_2 = 2(x_3 + 2x_4) - 5x_3 - 5x_4 = -3x_3 - x_4$. Nakonec lze tedy psát

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_3 + 2x_4 \\ -3x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : \; x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = [q_1, q_2]_\lambda , \qquad \text{kde} \qquad q_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vektory q_1, q_2 jsou očividně lineárně nezávislé, tudíž tvoří bázi Q a $\dim Q = 2$.

Další postup už dobře známe. Ze soustavy

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

okamžitě dostáváme, že $\dim(P + Q) = 3$ a báze součtu je například (p_1, p_2, q_1). Zároveň vidíme, že jakýkoli vektor $u \in P \cap Q$ splňuje $u \in [q_1 - q_2]_\lambda$, tudíž $\dim(P \cap Q) = 1$ a báze průniku je například soubor $(q_1 - q_2)$, tedy explicitně

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

7 Podprostor (2. část)

Cvičení 1

Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, $Q \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde

$$P := \left[\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\3\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda \quad \text{a} \quad Q := \left[\begin{pmatrix}2\\1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\right]_\lambda$$

(a) Najděte dimenzi a bázi proprostorů $P + Q$ a $P \cap Q$.
(b) Najděte doplněk $P + Q$ do $\mathbb{R}^4$.

ad (a)

Pišme $P =: [p_1, p_2, p_3]_\lambda$ a $Q =: [q_1, q_2, q_3]_\lambda$, kde pořadí vektorů je jako v zadání. Ze soustavy

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\-1 & -2 & -1\\1 & 1 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\0 & -1 & 2\\0 & 0 & 0\\0 & -1 & -8\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\0 & -1 & 2\\0 & 0 & -10\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

vidíme, že vektory p_1, p_2, p_3 jsou lineárně nezávislé, tudíž $\dim P = 3$ (nadplocha). Obdobně, ze soustavy

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\1 & 5 & 0\\2 & 0 & 0\\-1 & 0 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\1 & 5 & 0\\2 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 5 & 1\\0 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

vidíme, že rovněž vektory q_1, q_2, q_3 jsou lineárně nezávislé, tudíž $\dim Q = 3$ (nadplocha). Z velké soustavy

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1\\-1 & -2 & -1 & 1 & 5 & 0\\1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0\\3 & 2 & 1 & -1 & 0 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1\\0 & -1 & 2 & 3 & 5 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\0 & -1 & -8 & -7 & 0 & -4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1\\0 & -1 & 2 & 3 & 5 & 1\\0 & 0 & -10 & -10 & -5 & -5\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

vidíme, že báze součtu $P + Q$ je například (p_1, p_2, p_3, q_3), tudíž $\dim(P + Q) = 4$ a $P + Q = \mathbb{R}^4$ (tudíž za alternativní bázi lze zvolit i jakoukoli jinou bázi v $\mathbb{R}^4$, například standardní). Podle obecného vztahu (6.2) předem víme, že $\dim(P \cap Q) = 2$ (rovina). Z velké soustavy výše navíc vidíme, že libovolný vektor $u \in P \cap Q$, jenž musí být tvaru $u = \beta_1 q_1 + \beta_2 q_2 + \beta_3 q_3$, kde $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$, nezbytně splňuje $\beta_3 = 0$, tudíž $u \in [q_1, q_2]_\lambda$. Tedy báze průniku $P \cap Q$ je například (q_1, q_2).

ad (b)

Poněvadž součet $P + Q$ je celý prostor $\mathbb{R}^4$, jeho doplněk je nulový podprostor

$$\{0\} = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Cvičně můžeme nalézt i doplněk průniku $P \cap Q$ do $\mathbb{R}^4$. Libovolný vektor $v \in \mathbb{R}^4$ lze psát jako $v = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 r + \alpha_4 s$, kde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ a vektory $r, s \in \mathbb{R}^4$ jsou takové, že (q_1, q_2, r, s) je báze v $\mathbb{R}^4$. Tedy doplněk $P \cap Q$ do $\mathbb{R}^4$ je dvojdimenzionální podprostor (rovina) $[r, s]_\lambda$. Abychom nalezli vektory r, s, stačí doplnit vektory q_1, q_2 na bázi v $\mathbb{R}^4$. Alternativně stačí soubor $(q_1, q_2, e_1, e_2, e_3, e_4)$ zúžit na bázi $\mathbb{R}^4$. Z odpovídající soustavy

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0\\2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 10 & 1 & -2 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 10 & 1 & -2 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

vidíme, že báze $\mathbb{R}^4$, jež obsahuje vektory q_1, q_2, je například soubor (q_1, q_2, e_1, e_3), tedy můžeme zvolit $r := e_1$ a $s := e_3$ (to, že vektor e_2 musí být vyhozen, je jasné už z toho, že $q_2 = 5e_2$). Doplněk $P \cap Q$ do $\mathbb{R}^4$ je tedy podprostor

$$[e_1, e_3]_\lambda = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda .$$

Cvičení 2

Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^{2,2}$, $Q \subset\subset \mathbb{C}^{2,2}$. Určete dimenzi, nalezněte bázi $P+Q$ a $P \cap Q$ a dále najděte doplněk P do $\mathbb{C}^{2,2}$, je-li:

(a) $P := \left[\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\right]_\lambda, \quad Q := \left[\begin{pmatrix}2 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\3 & 7\end{pmatrix}\right]_\lambda,$

(b) $P := \left[\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & -3\end{pmatrix}\right]_\lambda, \quad Q := \left[\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}\right]_\lambda,$

(c) $P := \left[\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3\\1 & 3\end{pmatrix}\right]_\lambda, \quad Q := \left[\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 1\\3 & 1\end{pmatrix}\right]_\lambda,$

(d) $P := \left\{\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\x_3 & x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} :\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\right\}, \quad Q := \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}\right]_\lambda,$

(e)
$$P := \left\{\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\x_3 & x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} :\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \ \wedge\ 2x_1 - x_3 - 3x_4 = 0 \ \wedge\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0\right\},$$
$$Q := \left\{\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\x_3 & x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} :\ 3x_1 = 2x_2 \ \wedge\ x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\}.$$

ad (a)

Je zřejmé, že $\dim P = 2 = \dim Q$, tudíž geometrický význam obou podprostorů P, Q je rovina. Báze P je (p_1, p_2) a báze Q je (q_1, q_2), kde

$$p_1 := \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}, \quad p_2 := \begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}, \quad q_1 := \begin{pmatrix}2 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}, \quad q_2 := \begin{pmatrix}1 & -1\\3 & 7\end{pmatrix}.$$

Soustava odpovídající rovnici $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 q_1 + \alpha_4 q_2 = 0$, kde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$, má tvar

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\2 & 1 & -1 & -1\\1 & 1 & 0 & 3\\0 & -1 & 1 & 7\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\0 & 3 & -5 & -3\\0 & 2 & -2 & 2\\0 & -1 & 1 & 7\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\0 & 0 & -2 & 18\\0 & 0 & 0 & 16\\0 & -1 & 1 & 7\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\0 & -1 & 1 & 7\\0 & 0 & -1 & 9\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Odtud vidíme, že vektory p_1, p_2, q_1, q_2 jsou lineárně nezávislé, tudíž $\dim(P+Q) = 4$ a $P + Q = \mathbb{C}^{2,2}$. Báze $P+Q$ je například soubor (p_1, p_2, q_1, q_2) (nebo jakákoli jiná báze $\mathbb{C}^{2,2}$, například standardní). Z upravené soustavy výše rovněž vidíme, že jediný vektor ležící v průniku $P \cap Q$ je nulový vektor, tudíž

$$P \cap Q = \{0\} = \left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\right\},$$

$\dim(P \cap Q) = 0$ a báze je prázdný soubor (). (Alternativně bychom ke stejnému výsledku došli užitím rovnice (6.2)).

Poněvadž $P \cap Q = \{0\}$, platí $P + Q = P \oplus Q$ (direktní součet), tudíž doplněk P do $\mathbb{C}^{2,2}$ je Q.

Poznámka. Za bázi nulového prostoru $\{0\}$ se definotoricky bere prázdný soubor (), což je výhodné pro konzistentní formulaci obecných tvrzení (s touto konvencí například platí, že pro každý vektorový prostor existuje báze, což se v konečně dimenzionálních vektorových prostorech dá ukázat právě rozšířením prázdného souboru () na bázi). Jindy se konvenčně řekne, že pro nulový prostor $\{0\}$ báze neexistuje. Držte se konvence, kterou máte ve skriptech.

Pozor! Správná odpověď ohledně báze $P + Q \subset\subset \mathbb{C}^{2,2}$ je, že báze je (například) soubor (p_1, p_2, q_1, q_2), tedy

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\3 & 7\end{pmatrix}\right) \subset \mathbb{C}^{2,2} \times \mathbb{C}^{2,2} \times \mathbb{C}^{2,2} \times \mathbb{C}^{2,2}.$$

V písemkách se každý rok setkáváme se studenty, kteří neváhají napsat, že báze $P+Q$ je soubor

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\7\end{pmatrix}\right)\subset \mathbb{C}^4\times\mathbb{C}^4\times\mathbb{C}^4\times\mathbb{C}^4.$$

To je špatně a zbytečně se za to strhávají body.

ad (b)

Analýzou soustavy

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&2\\1&1&2\\-2&0&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&0\\0&-1&1\\0&4&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&-1\\0&-1&1\\0&0&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

vidíme, že $\dim P=3$ (P je nadrovina) a báze P je soubor (p_1,p_2,p_3), kde

$$p_1:=\begin{pmatrix}1&2\\1&-2\end{pmatrix},\quad p_2:=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix},\quad p_3:=\begin{pmatrix}1&2\\2&-3\end{pmatrix}.$$

Rovněž je rovnou vidět, že $\dim Q=2$ (Q je rovina) a báze Q je soubor (q_1,q_2), kde

$$q_1:=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\quad q_2:=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}.$$

Z rozšířené soustavy

$$\begin{pmatrix}1&2&1&1&1\\2&3&2&1&0\\1&1&2&1&1\\-2&0&-3&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&1&1\\0&-1&0&-1&-2\\0&-1&1&0&0\\0&4&-1&3&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&1&1\\0&0&-1&-1&-2\\0&-1&1&0&0\\0&0&3&3&1\end{pmatrix}$$
$$\sim\begin{pmatrix}1&2&1&1&1\\0&-1&1&0&0\\0&0&-1&-1&-2\\0&0&0&0&-5\end{pmatrix}$$

vidíme, že $\dim(P+Q)=4$, tudíž $P+Q=\mathbb{C}^{2,2}$, a báze $P+Q$ je například (p_1,p_2,p_3,q_2) (nebo jakákoli jiná báze $\mathbb{C}^{2,2}$, například standardní). Z obecného vztahu (6.2) dopočítáme $\dim(P\cap Q)=1$ ($P\cap Q$ je přímka). Ten samý výsledek dostáváme z výše upravené matice, odkud navíc vidíme, že $P\cap Q=[q_1]_\lambda$, tudíž báze $P\cap Q$ je například (q_1).

Poněvadž báze P je (p_1,p_2,p_3) a za bázi $P+Q=\mathbb{C}^{2,2}$ lze zvolit (p_1,p_2,p_3,q_2), doplněk P do $\mathbb{C}^{2,2}$ je podprostor $[q_2]_\lambda$.

ad (c)

Analýzou soustavy

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&3\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&2\\0&0&0\\0&-2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

vidíme, že $\dim P=2$ (P je rovina) a báze P je například soubor (p_1,p_2), kde

$$p_1:=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\quad p_2:=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}.$$

Obdobně, analýzou soustavy

$$\begin{pmatrix}1&1&3\\2&2&1\\0&1&3\\2&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&3\\0&0&-5\\0&1&3\\0&0&-5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&3\\0&0&-5\\0&0&0\end{pmatrix}$$

vidíme, že $\dim Q = 3$ (Q je nadrovina) a báze Q je soubor (q_1, q_2, q_3), kde

$$q_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad q_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad q_3 := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Z rozšířené soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vidíme, že $\dim(P+Q) = 3$ ($P+Q$ je nadrovina) a báze $P+Q$ je například (p_1, p_2, q_1). Z obecného vztahu dopočítáme $\dim(P \cap Q) = 2$, tudíž nezbytně $P \subset Q$ a $P \cap Q = P$ (geometricky to znamená, že průnik nadroviny a roviny je genericky přímka, kromě výjimečného případu, že rovina je podmnožinou nadroviny, což zde nastává). Za bázi $P \cap Q$ lze zvolit bázi P, což je například soubor (p_1, p_2). Z faktu $P \subset Q$ rovněž plyne, že $P + Q = Q$, tudíž za bázi $P + Q$ lze alternativně zvolit bázi Q, což je soubor (q_1, q_2, q_3).

Abychom našli doplněk P do $\mathbb{C}^{2,2}$, zúžíme soubor $(p_1, p_2, e_1, e_2, e_3, e_4)$ na bázi $\mathbb{C}^{2,2}$. Tato procedura vede na soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

odkud vidíme, že doplněk P do $\mathbb{C}^{2,2}$ je například podprostor

$$[e_1, e_2]_\lambda = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

ad (d)

Jak jsme zvyklí, nejdříve vyjádříme P jako lineární obal:

$$\begin{aligned} P &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix} : \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} : \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C} \right\} \\ &= [p_1, p_2, p_3]_\lambda, \qquad \text{kde} \qquad p_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad p_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Následnou analýzou soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vidíme, že $\dim P = 3$ (P je nadrovina) a báze P je soubor (p_1, p_2, p_3). Obdobně, analýzou soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vidíme, že rovněž $\dim Q = 3$ (Q je nadrovina) a báze Q je soubor (q_1, q_2, q_3), kde

$$q_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad q_2 := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad q_3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Z rozšířené soustavy

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}
$$
$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix},
$$

vidíme, že $\dim(P+Q) = 4$, tudíž $P+Q = \mathbb{C}^{2,2}$, a za bázi $P+Q$ lze zvolit například (p_1, p_2, p_3, q_1). Rovněž vidíme, že

$$
P \cap Q = [q_1 + q_2, q_1 + q_3]_\lambda = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right]_\lambda ,
$$

odkud $\dim(P \cap Q) = 2$ a báze $P \cap Q$ je například $(q_1 + q_2, q_1 + q_3)$.

Přestože za bázi $P+Q = \mathbb{C}^{2,2}$ lze zvolit jakoukoli bázi $\mathbb{C}^{2,2}$ (například standardní), naše volba (p_1, p_2, p_3, q_1) výše je výhodná, jelikož rovnou ukazuje, že doplněk P do $\mathbb{C}^{2,2}$ je podprostor $[q_1]_\lambda$.

ad (e)

Nejdříve vyjádříme P jako lineární obal. P je geometricky průnik tří různých nadrovin, tudíž se jedná o přímku. Algebraicky se jedná o vyřešení soustavy

$$
\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},
$$

odkud $x_3 = 3x_4$, $x_2 = \frac{1}{2}(-x_3 + x_4) = -x_4$ a $x_1 = x_2 + x_3 + x_4 = 3x_4$. Tedy

$$
P = [p]_\lambda , \qquad \text{kde} \qquad p := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Báze P je (p). Obdobně

$$
\begin{aligned}
Q &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x_2 & x_2 \\ x_3 & -x_2 - x_3 \end{pmatrix} : \ x_2, x_3 \in \mathbb{C} \right\} \\
&= \left\{ \frac{1}{3}x_2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} : \ x_2, x_3 \in \mathbb{C} \right\} \\
&= [q_1, q_2]_\lambda , \qquad \text{kde} \qquad q_1 := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad q_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Odtud vidíme, že $\dim Q = 2$ (Q je rovina) a za bázi lze zvolit soubor (q_1, q_2). Z rozšířené soustavy

$$
\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 11 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

vidíme, že vektory p, q_1, q_2 jsou lineárně nezávislé. Tudíž $\dim(P+Q) = 3$ a báze $P+Q$ je například soubor (p, q_1, q_2). Z obecného vztahu (6.2) pak rovnou dopočítáme $\dim(P \cap Q) = 0$, tudíž průnik je triviální,

$$
P \cap Q = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},
$$

a jeho báze je prázdný soubor ().

Abychom našli doplněk P do $\mathbb{C}^{2,2}$, zúžíme soubor (p, e_1, e_2, e_3, e_4) na bázi $\mathbb{C}^{2,2}$. Tato procedura vede na soustavu

$$
\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix},
$$

odkud vidíme, že doplněk P do $\mathbb{C}^{2,2}$ je například podprostor

$$[e_1, e_2, e_3]_\lambda = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_\lambda .$$

Cvičení 3

Nechť $M \subset \mathcal{P}_4$. Zjistěte, zda $M \subset\subset \mathcal{P}_4$, a v kladém případě určete $\dim M$, je-li:
(a) $M := \{x \in \mathcal{P}_4 : \ x(1) = 0\}$,
(b) $M := \{x \in \mathcal{P}_4 : \ x(0) = 1\}$,
(c) $M := \{x \in \mathcal{P}_4 : \ \text{stupeň } x \text{ je 0 nebo 1 nebo 2}\}$,
(d) $M := \{x \in \mathcal{P}_4 : \ \forall t \in [0,1], \ x(t) = x(1-t)\}$,
(e) $M := \{x \in \mathcal{P}_4 : \ \forall t \in \mathbb{R}, \ x(t) = x(1)\}$,
(f) $M := \{x \in \mathcal{P}_4 : \ x(1) - 2x(-1) = 0 \ \wedge \ x(0) + x(1) = 0\}$.

ad (a)

Nulový polynom 0 zřejmě splňuje $0(1) = 0$. Máme-li dva polynomy $x, y \in \mathcal{P}_4$ splňující $x(1) = 0$ a $y(1) = 0$, potom rovněž $(x+y)(1) = x(1) + y(1) = 0$, tudíž množina M je uzavřená na sčítání. Obdobně se ukáže, že je uzavřená na násobení čísly. Množina M je tedy podprostorem $\mathcal{P}_4$.

Libovolný polynom $x \in \mathcal{P}_4$ má tvar $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3$, kde $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ jsou koeficienty, jež jednoznačně určují polynom x (jedná se o souřadnice vektoru x vzhledem ke standardní bázi $e_0(t) := 1$, $e_1(t) := t$, $e_2(t) := t^2$, $e_3(t) := t^3$), a $t \in \mathbb{C}$ je proměnná. Podmínka $x(1) = 0$ je ekvivalentní vztahu $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, odkud lze vyjádřit například $\alpha_3 = -\alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2$. Tedy libovolný vektor $x \in M$ má tvar

$$\begin{aligned} x &= \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + (-\alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2) e_3 \\ &= \alpha_0 (e_0 - e_3) + \alpha_1 (e_1 - e_3) + \alpha_2 (e_2 - e_3) , \end{aligned}$$

kde $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ jsou libovolná. Tedy $M = [e_0 - e_3, e_1 - e_3, e_2 - e_3]_\lambda$. Odtud už je vidět, že $\dim M = 3$ (M je nadrovina) a báze M je například

$$(e_0 - e_3, e_1 - e_3, e_2 - e_3) \subset \mathcal{P}_4 \times \mathcal{P}_4 \times \mathcal{P}_4 .$$

Explicitně $(e_0 - e_3)(t) = 1 - t^3$, $(e_1 - e_3)(t) = t - t^3$ a $(e_2 - e_3)(t) = t^2 - t^3$.

POZOR! Opět se najdou studenti, co neváhají do písemky napsat, že řešením je báze

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right) \subset \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 ,$$

což je zřejmý nesmysl.

ad (b)

Nulový polynom 0 zřejmě nesplňuje $0(0) = 1$, tudíž M není podprostor v $\mathcal{P}_4$.

ad (c)

Nulový polynom 0 nemá definovaný stupeň, tudíž $0 \notin M$, tudíž M není podprostor v $\mathcal{P}_4$.

ad (d)

Libovolný polynom $x \in M$ má tvar $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3$, kde $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ a $t \in \mathbb{C}$, a splňuje vztah

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 &= \alpha_0 + \alpha_1 (1-t) + \alpha_2 (1-t)^2 + \alpha_3 (1-t)^3 \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_1 t + \alpha_2 - 2\alpha_2 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 - 3\alpha_3 t + 3\alpha_3 t^2 - \alpha_3 t^3 \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + (-\alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3) t + (\alpha_2 + 3\alpha_3) t^2 - \alpha_3 t^3 . \end{aligned}$$

Poněvadž tato identita musí být splněna pro všechna $t \in \mathbb{C}$, je ekvivalentní skalární soustavě

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\,,\\ \alpha_1 &= -\alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3\,,\\ \alpha_2 &= \alpha_2 + 3\alpha_3\,,\\ \alpha_3 &= -\alpha_3\,.\end{aligned}$$

Odtud $\alpha_3 = 0$ a $\alpha_1 = -\alpha_2$ (na α_0 nedostáváme žádnou podmínku). Tedy

$$x \in M \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \alpha_0, \alpha_2 \in \mathbb{C}, \quad x = \alpha_0 e_0 - \alpha_2 e_1 + \alpha_2 e_2\,.$$

Jinými slovy

$$M = [e_0, e_2 - e_1]_\lambda\,.$$

Odtud je vidět, že M je podprostor v $\mathcal{P}_4$, $\dim M = 2$ (M je rovina) a báze je například $(e_0, e_2 - e_1)$.

ad (e)

Libovolný polynom $x \in M$ má tvar $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3$, kde $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ a $t \in \mathbb{C}$, a splňuje vztah

$$\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\,.$$

Poněvadž tato identita musí být splněna pro všechna $t \in \mathbb{C}$, je ekvivalentní skalární soustavě

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\,,\\ \alpha_1 &= 0\,,\\ \alpha_2 &= 0\,,\\ \alpha_3 &= 0\,.\end{aligned}$$

Odtud vidíme, že

$$x \in M \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \alpha_0 \in \mathbb{C}, \quad x = \alpha_0 e_0\,.$$

Jinými slovy

$$M = [e_0]_\lambda = \mathcal{P}_1\,.$$

Odtud je vidět, že M je podprostor v $\mathcal{P}_4$ (je to prostor konstantních polynomů), $\dim M = 1$ (M je přímka) a báze je například (e_0).

ad (f)

Libovolný polynom $x \in M$ má tvar $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3$, kde $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ a $t \in \mathbb{C}$, a splňuje vztahy

$$\begin{aligned}\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 2(\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)\,,\\ -\alpha_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\,.\end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme $\alpha_0 = 3\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3$ a po dosazení do druhé rovnice dostaneme

$$2(3\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3) + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 7\alpha_1 - \alpha_2 + 7\alpha_3 = 0\,,$$

odkud vyjádříme $\alpha_2 = 7\alpha_1 + 7\alpha_3$. Po zpětném dosazení $\alpha_0 = 3\alpha_1 - (7\alpha_1 + 7\alpha_3) + 3\alpha_3 = -4\alpha_1 + 4\alpha_3$. Tedy

$$x \in M \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{C}, \quad \begin{aligned} x &= (-4\alpha_1 + 4\alpha_3)e_0 + \alpha_1 e_1 + (7\alpha_1 + 7\alpha_3)e_2 + \alpha_3 e_3\\ &= \alpha_1(-4e_0 + e_1 + 7e_2) + \alpha_3(4e_0 + 7e_2 + e_3)\,.\end{aligned}$$

Jinými slovy

$$M = [-4e_0 + e_1 + 7e_2, 4e_0 + 7e_2 + e_3]_\lambda\,.$$

Odtud je vidět, že M je podprostor v $\mathcal{P}_4$, $\dim M = 2$ (M je rovina) a báze je například

$$(-4e_0 + e_1 + 7e_2, 4e_0 + 7e_2 + e_3)\,.$$

Cvičení 4

Nechť $P, Q \subset \mathcal{P}_4$. Najděte doplněk P do $\mathcal{P}_4$ a doplněk Q do $\mathcal{P}_4$. Nalezněte dimenzi a bázi podprostorů P, Q, $P+Q$ a $P \cap Q$, je-li

$$P := \{x \in \mathcal{P}_4 : \; x(0) + x(1) = 0\} \qquad \text{a} \qquad Q := [a, b, c]_\lambda \,,$$

kde pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí

$$a(t) := 1 - t - t^2 \,, \qquad b(t) := 1 + t + t^2 \,, \qquad c(t) := 2 + 2t \,.$$

Podobně jako v předchozím příkladu, libovolný polynom $x \in P$ má tvar $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3$, kde $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ a $t \in \mathbb{C}$, a splňuje vztah

$$2\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \,.$$

Pokud z této rovnice vyjádříme například $\alpha_3 = -2\alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2$, dostáváme

$$x \in M \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}, \quad \begin{aligned} x &= \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + (-2\alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2) e_3 \\ &= \alpha_0 (e_0 - 2e_3) + \alpha_1 (e_1 - e_3) + \alpha_2 (e_2 - e_3) \,, \end{aligned}$$

kde $e_0(t) := 1$, $e_1(t) := t$, $e_2(t) := t^2$, $e_3(t) := t^3$ je standardní báze v $\mathcal{P}_4$. Jinými slovy

$$P = [e_0 - 2e_3, e_1 - e_3, e_2 - e_3]_\lambda \,.$$

Snadno se přesvědčíme, že vektory $e_0 - 2e_3, e_1 - e_3, e_2 - e_3$ jsou lineárně nezávislé (návod, viz hned níže). Odtud je vidět, že P je podprostor v $\mathcal{P}_4$, $\dim P = 3$ (P je nadrovina) a báze je například

$$(e_0 - 2e_3, e_1 - e_3, e_2 - e_3) =: (p_1, p_2, p_3) \,.$$

Podprostor Q je rovnou definován jako lineární obal, podívejme se však, jestli generující vektory jsou lineárně nezávislé. Platí $a = e_0 - e_1 - e_2$, $b = e_0 + e_1 + e_2$ a $c = 2e_0 + 2e_1$. Rovnice $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, je ekvivalentní vektorové rovnici $(\alpha + \beta + 2\gamma)e_0 + (-\alpha + \beta + 2\gamma)e_1 + (-\alpha + \beta)e_2 = 0$. Z lineární nezávislosti vektorů e_0, e_1, e_2 dostaneme soustavu tří skalárních rovnic o třech neznámých (α, β, γ), kterou můžeme maticově zapsat takto

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

Odtud je rovnou vidět, že nezbytně $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Vektory a, b, c jsou tedy lineárně nezávislé. Tudíž $\dim Q = 3$ (Q je nadrovina) a báze je například

$$(a, b, c) = (e_0 - e_1 - e_2, e_0 + e_1 + e_2, 2e_0 + 2e_1) =: (q_1, q_2, q_3) \,.$$

Podle definice součtu podprostorů, $P + Q = [p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3]_\lambda$. Pro určení dimenze $P + Q$ je tedy potřeba vyšetřit lineární nezávislost generujících vektorů $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$. To vede na systém

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} .$$

Odtud je vidět, že $\dim(P + Q) = 4$, $P + Q = \mathcal{P}_4$ a báze je například (p_1, p_2, p_3, q_2). Poněvadž $P + Q = \mathcal{P}_4$, lze za bázi zvolit i jakoukoli jinou bázi v $\mathcal{P}_4$, například standardní (e_0, e_1, e_2, e_3). Avšak volba (p_1, p_2, p_3, q_2) je vhodná pro okamžité odvození, že doplněk P do $\mathcal{P}_4$ je podprostor $[q_2]_\lambda$.

Z obecného vztahu (6.2) dopočítáme $\dim(P \cap Q) = 2$ ($P \cap Q$ je rovina). Z upravené matice výše navíc vidíme, že pro libovolný vektor $u = \beta_1 q_1 + \beta_2 q_2 + \beta_3 q_3 \in P \cap Q$ platí $\beta_3 = -\frac{2}{3}\beta_2$, tedy $u = \beta_1 q_1 + \beta_2(q_2 - \frac{2}{3}q_3)$, odkud

$$P \cap Q = [q_1, q_2 - \tfrac{2}{3}q_3]_\lambda = [q_1, 3q_2 - 2q_3]_\lambda\,.$$

Báze $P \cap Q$ je například $(q_1, 3q_2 - 2q_3)$. Explicitně

$$q_1(t) = a(t) = 1 - t - t^2 \qquad \text{a} \qquad (3q_2 - 2q_3)(t) = 3b(t) - 2c(t) = -1 - t + 3t^2\,.$$

Zbývá najít doplněk Q do $\mathcal{P}_4$. Jak už víme, stačí doplnit soubor (q_1, q_2, q_3) na bázi $\mathcal{P}_4$. To bychom mohli například tak, že bychom soubor $(q_1, q_2, q_3, e_0, e_1, e_2, e_3)$ (nebo $(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$) zúžili na bázi $\mathcal{P}_4$. Namísto standardního výpočtu si lze uvědomit, že vektory q_1, q_2, q_3 jsou polynomy stupně nejvýše dva. Tudíž chybějící polynom do báze je zřejmě e_3. Tedy doplněk Q do $\mathcal{P}_4$ je podprostor $[e_3]_\lambda$.

Cvičení 5

Nechť $M \subset\subset \mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$ (t.j. $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$),

$$M := \left[\begin{pmatrix}1+2i\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\2+i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1+2i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2+i\\i\end{pmatrix}\right]_\lambda.$$

(a) Vyberte bázi M z generátorů.
(b) Doplňte – je-li to možné – na bázi M následující vektory

$$\text{(b1)} \quad \begin{pmatrix}i\\-i\end{pmatrix}, \qquad \text{(b2)} \quad \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1+i\\1-i\end{pmatrix}.$$

Připomeňme, že $\dim \mathbb{C}^2_{\mathbb{R}} = 4$ (protože se násobí pouze reálnými čísly). Označme

$$m_1 := \begin{pmatrix}1+2i\\1\end{pmatrix}, \quad m_2 := \begin{pmatrix}i\\2+i\end{pmatrix}, \quad m_3 := \begin{pmatrix}1\\1+2i\end{pmatrix}, \quad m_4 := \begin{pmatrix}2+i\\i\end{pmatrix}$$

$$n := \begin{pmatrix}i\\-i\end{pmatrix}, \quad o := \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \quad p := \begin{pmatrix}1+i\\1-i\end{pmatrix}.$$

ad (a)

Zároveň s vybráním báze můžeme prozkoumat, zda vektory n, o, p leží v M, což je postačující a nutná podmínka pro to, aby problém (b) měl řešení. Pišme

$$v = \begin{pmatrix}v_{11} + iv_{12}\\v_{21} + iv_{22}\end{pmatrix}, \qquad v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22} \in \mathbb{R}\,,$$

pro libovolný vektor v $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$. Vektor v leží v M, tehdy a jen tehdy, pokud existují čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ taková, že $\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \alpha_3 m_3 + \alpha_4 m_4 = v$, tedy

$$\begin{pmatrix}\alpha_1(1+2i) + \alpha_2 i + \alpha_3 + \alpha_4(2+i)\\\alpha_1 + \alpha_2(2+i) + \alpha_3(1+2i) + \alpha_4 i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_{11} + iv_{12}\\v_{21} + iv_{22}\end{pmatrix}.$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí dostaneme systém čtyř rovnic o čtyřech neznámých $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, jenž můžeme maticově zapsat takto

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 1 & 2 & v_{11}\\2 & 1 & 0 & 1 & v_{12}\\1 & 2 & 1 & 0 & v_{21}\\0 & 1 & 2 & 1 & v_{22}\end{array}\right).$$

Za v můžeme dosadit n, o nebo p, nebo také vše řešit najednou:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c|c|c} & & & & n & o & p \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Odtud vidíme vše. Zapomeneme-li na přidané pravé strany n, o, p, vidíme, že $\dim M = 3$ (M je nadplocha) a báze je například (m_1, m_2, m_3). Zároveň vidíme, že $n, p \in M$, avšak $o \notin M$. Tudíž (b1) má řešení, avšak (b2) řešit nelze.

ad (b)

Už víme, že má smysl řešit pouze (b1). Postup je standardní, jedná se o zúžení souboru (n, m_1, m_2, m_3) na bázi $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$. Porovnáním reálných a imaginárních částí jako výše to vede na soustavu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud vidíme, že hledaná báze je například (n, m_1, m_2).

8 Lineární funkcionál a lineární zobrazení

Nechť $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ jsou vektorové prostory nad $\mathbb{T}$.

Lineární zobrazení z $\mathcal{V}$ do $\mathcal{W}$ je zobrazení $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ splňující tyto vlastnosti:

(1) $\forall u, v \in \mathcal{V}, \qquad T(u + v) = T(u) + T(v);$ (aditivita)

(2) $\forall \alpha \in \mathbb{T}, \quad v \in \mathcal{V}, \qquad T(\alpha v) = \alpha T(v).$ (homogenita)

Namísto standardního značení $T(v)$ pro funkční hodnotu zobrazení T v bodě v, používáme i zjednodušující značení Tv. Množinu všech lineárních zobrazení z $\mathcal{V}$ do $\mathcal{W}$ značíme $\mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Pokud $\mathcal{W} = \mathcal{V}$, zkracujeme $\mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V}) =: \mathscr{L}(\mathcal{V})$. Pokud $\mathcal{W} = \mathbb{T}$, říkáme T *funkcionál* a v lineárním případě značíme $\mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathbb{T}) =: \mathcal{V}^{\#}$.

Jádro lineárního zobrazení $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ je podmnožina výchozího $\mathcal{V}$ prostoru definovaná předpisem

$$\ker T := \{v \in \mathcal{V} : \; Tv = 0\}.$$

Pro lineární(!) zobrazení platí, že T je injektivní (=prosté) tehdy a jen tehdy, pokud $\ker T = \{0\}$. *Obor hodnot* lineárního zobrazení $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ je podmnožina cílového prostoru $\mathcal{W}$ definovaná předpisem

$$T(\mathcal{V}) := \{Tv \in \mathcal{W} : \; v \in \mathcal{V}\}.$$

Podle definice platí (pro jakékoli zobrazení, ne nezbytně lineární), že T je surjektivní (=na) tehdy a jen tehdy, pokud $T(\mathcal{V}) = \mathcal{W}$. Zobrazení, jež je zároveň injektivní a surjektivní se nazývá bijektivní (nebo isomorfismus, pokud je T navíc lineární).

Pokud prostory $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ jsou konečně(!) dimenzionální, platí naprosto fundamentální výsledek:

$$\dim \mathcal{V} = \mathrm{d}(T) + \mathrm{h}(T), \qquad \text{kde} \qquad \mathrm{d}(T) \overset{\textit{defekt}}{:=} \dim \ker T, \quad \mathrm{h}(T) \overset{\textit{hodnost}}{:=} \dim T(\mathcal{V}), \tag{8.1}$$

Odtud vidíme, že pokud navíc $\mathcal{V} = \mathcal{W}$ (výchozí a cílový prostor jsou identické!), T je injektivní tehdy a jen tehdy, pokud T je surjektivní. Jakákoli z těchto dvou vlastností je navíc postačující proto, aby T bylo bijektivní (nutnost je samozřejmá).

Cvičení 1

Nechť je definován funkcionál $\varphi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ pro každé $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^3$ následujícím způsobem

(a) $\varphi(x) := x_1 + 2x_2 + 3x_3$,

(b) $\varphi(x) := 0$,

(c) $\varphi(x) := |x_1|$,

(d) $\varphi(x) := \mathrm{Re}(x_1)$,

(e) $\varphi(x) := \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$, kde $(x)_{\mathcal{X}} = \left(\begin{smallmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{smallmatrix}\right)$ a $\mathcal{X}$ je báze prostoru $\mathbb{C}^3$ definovaná následovně

$$\mathcal{X} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

(f) $\varphi(x) := x_1 + 2\alpha_2 - x_2 + \alpha_3$ za stejných předpokladů jako v předchozím bodě.

Zjistěte, zda $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^{\#}$. V kladném případě najděte hodnost $\mathrm{h}(\varphi)$, defekt $\mathrm{d}(\varphi)$ a bázi $\ker \varphi$.

ad (a)

Nechť $x, y \in \mathbb{C}^3$ jsou libovolné vektory. Poněvadž

$$\begin{aligned} \varphi(x + y) &= (x + y)_1 + 2(x + y)_2 + 3(x + y)_3 \\ &= x_1 + y_1 + 2(x_2 + y_2) + 3(x_3 + y_3) \\ &= (x_1 + 2x_2 + 3x_3) + (y_1 + 2y_2 + 3y_3) \\ &= \varphi(x) + \varphi(y)\,, \end{aligned}$$

je zobrazení φ aditivní. Homogenita se ukáže analogicky. φ je tedy lineární funkcionál.

Pokud hledáme jádro zobrazení φ, nepřemýšlíme a rovnou položíme $\varphi(x) = 0$, kde vektor x ležící ve výchozím prostoru hledáme. V našem případě $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ a vztah $\varphi(x) = 0$ je ekvivalentní jedné rovnici $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ o třech neznámých $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$. Vyjádříme například $x_1 = -2x_2 - 3x_3$ a odtud

$$\begin{aligned}
\ker\varphi &= \left\{ \begin{pmatrix} -2x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \ x_2, x_3 \in \mathbb{C} \right\} \\
&= \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \ x_2, x_3 \in \mathbb{C} \right\} \\
&= [u, v]_\lambda \,, \qquad \text{kde} \qquad u := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Poněvadž vektory u, v jsou očividně lineárně nezávislé, dostáváme $\mathrm{d}(\varphi) = 2$ a báze $\ker\varphi$ je například (u, v). Hodnost dopočítáme ze vztahu (8.1), tedy $\mathrm{h}(\varphi) = \dim \mathbb{C}^3 - \mathrm{d}(\varphi) = 3 - 2 = 1$.

Jelikož $\ker\varphi$ je netriviální, φ není injektivní. Jelikož $\mathrm{h}(\varphi) = 1$, což je dimenze cílového prostoru $\mathbb{C}$, platí $\varphi(\mathbb{C}^3) = \mathbb{C}$ a φ je surjektivní.

ad (b)

Snadno ověříme, že φ je lineární (nulový) funkcionál. Poněvadž $\varphi(x) = 0$ je podle definice pravda pro jakýkoli vektor $x \in \mathbb{C}^3$, platí $\ker\varphi = \mathbb{C}^3$. Tedy $\mathrm{d}(\varphi) = 3$ a za bázi $\ker\varphi$ můžeme vzít jakoukoli bázi $\mathbb{C}^3$ (například standardní). Ze vztahu (8.1) dopočítáme $\mathrm{h}(\varphi) = 0$, tudíž $\varphi(\mathbb{C}^3) = 0$ (což je zřejmé od začátku, tudíž jsme mohli postupovat i obráceně). φ není injektivní ani surjektivní.

ad (c)

φ není aditivní ani homogenní. Aditivita neplatí proto, že existují vektory $x, y \in \mathbb{C}^3$ (například $x := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ a $y := \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$) takové, že $\varphi(x + y) \neq \varphi(x) + \varphi(y)$ (jelikož $\varphi(x + y) = \varphi(0) = |0| = 0$, avšak $\varphi(x) = |1| = 1$ a $\varphi(x) = |1| = 1$, tudíž $\varphi(x) + \varphi(y) = 2 \neq 0 = \varphi(x + y)$). Snadno se najde i protipříklad k homogenitě.

ad (d)

φ je sice aditivní (dokažte si), avšak není homogenní. Homogenita neplatí proto, že existuje vektory $x \in \mathbb{C}^3$ (například $x := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$) a číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ (například $\alpha := i$) takové, že $\varphi(\alpha x) \neq \alpha\varphi(x)$ (jelikož $\varphi(\alpha x) = \mathrm{Re}(i) = 0$, avšak $\varphi(x) = \mathrm{Re}(1) = 1$, tudíž $\alpha\varphi(x) = i \neq 0 = \varphi(\alpha x)$).

ad (e)

Označme $\mathcal{X} =: (a, b, c)$. Přímočará možnost, jak postupovat, je explicitně vyjádřit souřadnice $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ coby funkce x. Platí $x = \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c$, což je ekvivalentní soustavě

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ -1 & 1 & -2 & x_2 \\ 1 & 2 & 1 & x_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 2 & -1 & x_1 + x_2 \\ 0 & 1 & 0 & -x_1 + x_3 \end{array}\right)$$

pro neznámé $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$, kde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ uvažujeme coby zadaná čísla. Odtud

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= -x_1 + x_3 \,, \\
\alpha_3 &= 2\alpha_2 - (x_1 + x_2) = 2(-x_1 + x_3) - (x_1 + x_2) = -3x_1 - x_2 + 2x_3 \,, \\
\alpha_1 &= x_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = x_1 - (-x_1 + x_3) - (-3x_1 - x_2 + 2x_3) = 5x_1 + x_2 - 3x_3 \,.
\end{aligned} \tag{8.2}$$

Tedy

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \\
&= (5x_1 + x_2 - 3x_3) + (-x_1 + x_3) - (-3x_1 - x_2 + 2x_3) \\
&= 7x_1 + 2x_2 - 4x_3 \,.
\end{aligned}$$

Nyní, stejně jako v příkladu (a), ověříme, že φ je lineární.

Podmínka $\varphi(x) = 0$ pro nalezení jádra je ekvivalentní vztahům $x_1 = 4t_1$, $x_2 = 4t_2$ a $x_3 = (7x_1 + 2x_2)/4 = 7t_1 + 2t_2$, kde $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$ jsou libovolná čísla. Odtud

$$\ker\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} 4t_1 \\ 4t_2 \\ 7t_1 + 2t_2 \end{pmatrix} : \ t_1, t_2 \in \mathbb{C} \right\} = [u, v]_\lambda \,, \qquad \text{kde} \qquad u := \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Poněvadž vektory u, v jsou očividně lineárně nezávislé, dostáváme $\mathrm{d}(\varphi) = 2$ a báze $\ker\varphi$ je například (u, v). Hodnost dopočítáme ze vztahu (8.1), tedy $\mathrm{h}(\varphi) = 1$. φ není injektivní, avšak je surjektivní.

ad (f)

Využitím obecných vztahů (8.2) dostáváme

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x_1 + 2\alpha_2 - x_2 + \alpha_3 \\ &= x_1 + 2(-x_1 + x_3) - x_2 + (-3x_1 - x_2 + 2x_3) \\ &= -4x_1 - 2x_2 + 4x_3 \,. \end{aligned}$$

Z tohoto vyjádření se pak snadno ověří, že φ je lineární. Z podmínky $\varphi(x) = 0$ pro nalezení jádra vyjádříme $x_2 = -2x_1 + 2x_3$, odkud následně

$$\ker\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 + 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : \ x_1, x_3 \in \mathbb{C} \right\} = [u, v]_\lambda \,, \qquad \text{kde} \qquad u := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Poněvadž vektory u, v jsou očividně lineárně nezávislé, dostáváme $\mathrm{d}(\varphi) = 2$ a báze $\ker\varphi$ je například (u, v). Hodnost dopočítáme ze vztahu (8.1), tedy $\mathrm{h}(\varphi) = 1$. φ není injektivní, avšak je surjektivní.

Cvičení 2

Nechť je definován funkcionál $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$ pomocí obrazů bazických vektorů

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} := 3 \,, \qquad \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} := -3 \,, \qquad \varphi\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} := 6 \,.$$

(a) Najděte explicitní předpis pro φ, t.j. $\varphi\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) = \dots$

(b) Najděte hodnost $\mathrm{h}(\varphi)$, defekt $\mathrm{d}(\varphi)$ a bázi $\ker\varphi$.

ad (a)

Označme bazické vektory následovně:

$$a := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Libovolný vektor $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^3$ rozložme do báze (a, b, c), tedy pišme $x = \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c$, kde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ jsou hledané souřadnice. Jako ve Cvičení 1(e) je nalezneme vyřešením soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x_1 \\ 1 & 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x_1 \\ 0 & 0 & 2 & -x_1 + x_2 \\ 0 & -1 & 2 & -x_1 + x_3 \end{array}\right),$$

tedy

$$\begin{aligned} &\alpha_3 = \tfrac{1}{2}(-x_1 + x_2) \,, \\ &\alpha_2 = 2\alpha_3 - (-x_1 + x_3) = (-x_1 + x_2) - (-x_1 + x_3) = x_2 - x_3 \,, \\ &\alpha_1 = x_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = x_1 - (x_2 - x_3) + \tfrac{1}{2}(-x_1 + x_2) = \tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + x_3 \,. \end{aligned}$$

Platí

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(\alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c)\\ &= \alpha_1\varphi(a) + \alpha_2\varphi(b) + \alpha_3\varphi(c)\\ &= \left(\tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + x_3\right)3 + (x_2 - x_3)(-3) + \tfrac{1}{2}(-x_1 + x_2)\,6\\ &= -\tfrac{3}{2}x_1 - \tfrac{3}{2}x_2 + 6x_3\,,\end{aligned}$$

kde druhá rovnost platí díky linearitě φ a třetí rovnost jsou zadané definiční vztahy na prvcích báze.

ad (b)

Nejdříve si povšimněme, že explicitní tvar z části (a) pro určení defektu a hodnosti nepořebujeme. Vskutku, poněvadž například $\varphi(a) = 3 \neq 0$, z linearity φ okamžitě dostáváme $\varphi([a]_\lambda) = \mathbb{C}$. Tedy rozhodně $\varphi(\mathbb{C}^3) = \mathbb{C}$, odkud $\mathrm{h}(\varphi) = 1$. Defekt pak dopočítáme z (8.1), tedy $\mathrm{d}(\varphi) = 2$. φ není injektivní, avšak je surjektivní.

Explicitní tvar nicméně potřebujeme pro určení jádra. Podmínka $\varphi(x) = 0$ pro nalezení jádra je ekvivalentní vztahům $x_1 = 12t_1$, $x_2 = 12t_2$ a $x_3 = (\frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2)/6 = 3t_1 + 3t_2$, kde $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$ jsou libovolná čísla. Odtud

$$\ker\varphi = \left\{\begin{pmatrix}12t_1\\12t_2\\3t_1+3t_2\end{pmatrix} :\ t_1,t_2\in\mathbb{C}\right\} = [u,v]_\lambda\,, \qquad \text{kde} \qquad u := \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}.$$

Poněvadž vektory u, v jsou očividně lineárně nezávislé, báze $\ker\varphi$ je například (u, v).

Cvičení 3

Nechť je definováno zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ pro každé $x = \left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ následovně

$$\text{(a)}\ Ax := \begin{pmatrix}x_3 - 3x_1\\ x_2 - x_3\end{pmatrix}, \qquad \text{(c)}\ Ax := \begin{pmatrix}x_2 - 2\\ x_1\end{pmatrix},$$

$$\text{(b)}\ Ax := \begin{pmatrix}2x_2^2\\ x_1 + x_2 + x_3\end{pmatrix}, \qquad \text{(d)}\ Ax := \begin{pmatrix}2x_3 + x_2\\ 4x_3 + 2x_2\end{pmatrix}.$$

Zjistěte, zda $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. V pozitivním případě vyšetřete obor hodnot $A(\mathbb{R}^3)$, hodnost $\mathrm{h}(A)$, jádro $\ker A$ a defekt $\mathrm{d}(A)$. V negativním případě vysvětlete, proč A není lineární.

ad (a)

Nechť $x = \left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right)$ a $y = \left(\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{smallmatrix}\right)$ jsou libovolné vektory v $\mathbb{R}^3$. Potom

$$A(x+y) = \begin{pmatrix}(x+y)_3 - 3(x+y)_1\\ (x+y)_2 - (x+y)_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(x_3+y_3) - 3(x_1+y_1)\\ (x_2+y_2) - (x_3+y_3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_3 - 3x_1\\ x_2 - x_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}y_3 - 3y_1\\ y_2 - y_3\end{pmatrix} = A(x) + A(y),$$

tudíž A je aditivní. Homogenita se ověří obdobně.

Podle definice

$$\begin{aligned}A(\mathbb{R}^3) = \{Ax :\ x \in \mathbb{R}^3\} &= \left\{\begin{pmatrix}x_3 - 3x_1\\ x_2 - x_3\end{pmatrix} :\ x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{R}\right\}\\ &= \left\{x_1\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} :\ x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\right\}\\ &= [u,v,w]_\lambda\,, \qquad \text{kde} \qquad u := \begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\\ &= \mathbb{R}^2\,.\end{aligned}$$

Odtud $\mathrm{h}(A) = 2$. Ze vztahu (8.1) dopočítáme $\mathrm{d}(A) = 1$. Abychom našli jádro A, uvědomíme si, že požadavek $Ax = 0$ je ekvivalentní dvěma rovnicím

$$x_3 - 3x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 - x_3 = 0$$

o třech neznámých $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Z první vyjádříme $x_3 = 3x_1$ a z druhé dopočítáme $x_2 = x_3 = 3x_1$, zatímco $x_1 \in \mathbb{R}$ je volný parametr. Tedy

$$\ker A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 3x_1 \\ 3x_1 \end{pmatrix} : \ x_1 \in \mathbb{R} \right\} = [a]_\lambda , \qquad \text{kde} \qquad a := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Odtud vidíme, že báze $\ker A$ je například (a).

A je surjektivní, avšak není injektivní.

ad (b)

Nejedná se o lineární zobrazení, poněvadž není aditivní (ani homogenní). Skutečně, pro vektory $x := \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ a $y := \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ platí $A(x+y) = A(0) = 0$, zatímco $A(x) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ a $A(y) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, tudíž $A(x) + A(y) = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = A(x+y)$.

ad (c)

Nejedná se o lineární zobrazení, poněvadž není aditivní (ani homogenní). Skutečně, pro vektory $x := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ a $y := \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ platí $A(x+y) = A(0) = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, zatímco $A(x) = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ a $A(y) = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, tudíž $A(x) + A(y) = \left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = A(x+y)$.

ad (d)

Jako v části (a) snadno ověříme, že se jedná o lineární zobrazení. Podle definice

$$\begin{aligned} A(\mathbb{R}^3) = \left\{ Ax : \ x \in \mathbb{R}^3 \right\} &= \left\{ \begin{pmatrix} 2x_3 + x_2 \\ 4x_3 + 2x_2 \end{pmatrix} : \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} : \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= [u, v, w]_\lambda , \qquad \text{kde} \qquad u := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \\ &= [v]_\lambda . \end{aligned}$$

Odtud $\mathrm{h}(A) = 1$. Ze vztahu (8.1) dopočítáme $\mathrm{d}(A) = 2$. Abychom našli jádro A, uvědomíme si, že požadavek $Ax = 0$ je ekvivalentní dvěma rovnicím

$$2x_3 + x_2 = 0 \quad \wedge \quad 4x_3 + 2x_2 = 0$$

o třech neznámých $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Okamžitě vidíme, že rovnice jsou závislé. Tudíž máme jedinou podmínku $x_2 = -2x_3$, zatímco $x_1, x_3 \in \mathbb{R}$ jsou volné parametry. Tedy

$$\ker A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : \ x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = [a, b]_\lambda , \qquad \text{kde} \qquad a := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Odtud vidíme, že báze $\ker A$ je například (a, b).

A není surjektivní ani injektivní.

Cvičení 4

Nechť $\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathbb{R}^3)^\#$, kde pro každé $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ platí $\varphi_1(x) := x_1$ a funkcionál φ_2 je zadaný pomocí obrazů bazických vektorů prostoru $\mathbb{R}^3$ následovně:

$$\varphi_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} := 1 , \qquad \varphi_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} := 1 , \qquad \varphi_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} := -1 .$$

Najděte bázi průniku jader funkcionálů φ_1 a φ_2, t.j. $\varphi_1^{-1}(\{0\}) \cap \varphi_2^{-1}(\{0\})$.

Označme

$$a := \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad b := \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad c := \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad e_1 := \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad e_2 := \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad e_3 := \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Poněvadž $\varphi_1(e_1) = 1 \neq 0$, z linearity dostáváme $\varphi_1([e_1]_\lambda) = \mathbb{R}$. Tedy určitě $\varphi_1(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}$, odkud $\mathrm{h}(\varphi_1) = 1$. Ze vztahu (8.1) pak dopočítáme $\mathrm{d}(\varphi_1) = 2$, tudíž $\ker\varphi_1$ je rovina (dvojdimenzionální podprostor) v $\mathbb{R}^2$. Obdobně rovnou vidíme, že $\ker\varphi_2$ je rovina v $\mathbb{R}^2$. Průnik dvou rovin (procházejících počátkem) je buď rovina (pokud $\ker\varphi_1 = \ker\varphi_2$), nebo přímka (pokud $\ker\varphi_1 \neq \ker\varphi_2$).

Z jednoduchého zadání φ_1 rovnou vidíme, že $\varphi_1(e_2) = 0 = \varphi_1(e_3)$, tudíž $[e_2, e_3]_\lambda \subset \ker\varphi_1$. Poněvadž už víme, že $\mathrm{d}(\varphi_1) = 2$, nezbytně platí rovnost $[e_2, e_3]_\lambda = \ker\varphi_1$. Tedy báze $\ker\varphi_1$ je například (e_2, e_3).

Podobně, rovnou ze zadání φ_2, vidíme, že $\varphi_2(a-b) = 0 = \varphi_1(a+c)$, tudíž $[a-b, a+c]_\lambda \subset \ker\varphi_2$. Poněvadž už víme, že $\mathrm{d}(\varphi_2) = 2$, a $a-b, a+c$ jsou lineárně nezávislé, nezbytně platí rovnost $[a-b, a+c]_\lambda = \ker\varphi_2$. Tedy báze $\ker\varphi_2$ je například $(a-b, a+c)$.

Jelikož $\ker\varphi_2 \ni a + c \notin \ker\varphi_1$ (první souřadnice vektoru $a + c$ je nenulová), vidíme, že $\ker\varphi_1 \neq \ker\varphi_2$, tudíž $\ker\varphi_1 \cap \ker\varphi_2$ je přímka (procházející počátkem). Zbývá si všimnout, že $\ker\varphi_2 \ni a - b = e_3 \in \ker\varphi_1$. Tudíž

$$\ker\varphi_1 \cap \ker\varphi_2 = [e_3]_\lambda \,.$$

Báze průniku je například (e_3).

9 Lineární funkcionál a zobrazení (2. část)

Nechť $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, kde $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ jsou libovolné vektorové prostory. Operátorová rovnice $Tv = w$, kde $w \in \mathcal{W}$ je zadaný vektor a $v \in \mathcal{V}$ je hledaný vektor (neznámá), má podle definice oboru hodnot řešení tehdy a jen tehdy, pokud $w \in T(\mathcal{V})$. Pokud $w \in T(\mathcal{V})$, potom pro nalezení *celé* množiny řešení stačí znát jádro T a pouze jedno (tzv. *partikulární*) řešení:

$$T^{-1}(w) := \{v \in \mathcal{V} : \ Tv = w\} = \{u\} + \ker T , \qquad \text{kde} \qquad Tu = w .$$

Jak ostatně samo tvrzení napovídá, partikulárních řešení může existovat mnoho. Prakticky se postupuje tak, že se najdou všechna řešení homogenní rovnice $Tv = 0$ (ta určují jádro zobrazení T) a uhádne jedno (libovolné) partikulární řešení u.

Cvičení 1

Nechť $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ je pro každé $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ definované následovně:

$$\text{(a) } Ax := \begin{pmatrix} x_3 - 3x_1 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix} , \qquad \text{(b) } Ax := \begin{pmatrix} 2x_3 + x_2 \\ 4x_3 + 2x_2 \end{pmatrix} .$$

Najděte všechna řešení rovnice $Ax = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

ad (a)

Nejdříve ověříme, zda $w := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ náleží $A(\mathbb{R}^3)$. Obor hodnot A nelezneme, jak jsme zvyklí:

$$\begin{aligned} A(\mathbb{R}^3) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_3 - 3x_1 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix} : \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} : \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left[\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_\lambda = \mathbb{R}^2 . \end{aligned}$$

Tedy očividně $w \in A(\mathbb{R}^3)$.

V dalším kroku nalezneme jádro, jak jsme zvyklí:

$$\begin{aligned} \ker A &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \ \begin{pmatrix} x_3 - 3x_1 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \ x_3 = 3x_1 \ \wedge \ x_2 = x_3 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 3x_1 \\ 3x_1 \end{pmatrix} : \ x_1 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_\lambda . \end{aligned}$$

Poněvadž je jádro netriviální, bude existovat nekonečně mnoho řešení rovnice $Ax = w$.

Nakonec stačí nalézt jedno řešení soustavy

$$\begin{aligned} x_3 - 3x_1 &= 1 , \\ x_2 - x_3 &= 1 , \end{aligned}$$

kde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ jsou neznámé. Například první rovnici zaručíme volbou $x_1 := 1$ a $x_3 := 4$, z druhé rovnice pak dopočítáme $x_2 = 1 + x_3 = 5$. Tedy partikulární řešení $Au = w$ je například

$$u := \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Nakonec

$$A^{-1}(w) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_\lambda .$$

ad (b)

Nejdříve ověříme, zda w náleží $A(\mathbb{R}^3)$. Obor hodnot A nelezneme, jak jsme zvyklí:

$$\begin{aligned} A(\mathbb{R}^3) &= \left\{ \begin{pmatrix} 2x_3 + x_2 \\ 4x_3 + 2x_2 \end{pmatrix} : \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} : \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right]_\lambda = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_\lambda . \end{aligned}$$

Poněvadž očividně $w = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ nedostaneme jako násobek $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, platí $w \notin A(\mathbb{R}^3)$. Tudíž

$$A^{-1}(w) = \varnothing .$$

Cvičení 2

Nechť $A \in \mathscr{L}(\mathcal{P}_3, \mathbb{C}^3)$ a nechť pro každé $x \in \mathcal{P}_3$, kde $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$, platí

$$Ax := \begin{pmatrix} 2\alpha_0 - 2\alpha_1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_0 - \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Najděte

(a) $\mathrm{h}(A)$ a $\mathrm{d}(A)$,
(b) $\ker A$,
(c) všechna řešení rovnice $Ax = \left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$.

ad (a)

Podívejme se na obor hodnot (zde $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ jsou libovolná čísla, protože polynom $x \in \mathcal{P}_3$ je libovolný):

$$\begin{aligned} A(\mathcal{P}_3) &= \left\{ \begin{pmatrix} 2\alpha_0 - 2\alpha_1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_0 - \alpha_1 \end{pmatrix} : \ \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ \alpha_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \ \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} \right\} \\ &= [u, v, w]_\lambda , \qquad \text{kde} \qquad u := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ &= [u, w]_\lambda , \end{aligned}$$

kde poslední rovnost platí, protože $v = -u - w$. Vektory u, w jsou lineárně nezávislé, tudíž báze $A(\mathcal{P}_3)$ je soubor (u, w) a $\mathrm{h}(A) = 2$. Odtud dopočítáme defekt $\mathrm{d}(A) = \dim \mathcal{P}_3 - \mathrm{h}(A) = 3 - 2 = 1$.

ad (b)

V části (a) jsme našli obor hodnot a hodnost, následně dopočítali defekt. Mohli bychom postupovat i obráceně: nalézt jádro a defekt, následně dopočítat hodnost. V každém případě nyní jsme žádáni jádro nalézt. Označme $e_0(t) := 1$, $e_1(t) := t$, $e_1(t) := t^2$ vektory standardní báze v $\mathcal{P}_3$. Potom

$$\begin{aligned}\ker A &= \left\{\alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 : \begin{pmatrix}2\alpha_0 - 2\alpha_1\\ -\alpha_1+\alpha_2\\ \alpha_0-\alpha_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \ \wedge\ \alpha_0,\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C}\right\}\\ &= \{\alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 :\ \alpha_0 = \alpha_1 \ \wedge\ \alpha_2 = \alpha_1 \ \wedge\ \alpha_0 = \alpha_1 \ \wedge\ \alpha_0,\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{C}\}\\ &= \{\alpha_0 e_0 + \alpha_0 e_1 + \alpha_0 e_2 :\ \alpha_0 \in \mathbb{C}\}\\ &= \{\alpha_0(e_0+e_1+e_2) :\ \alpha_0\in\mathbb{C}\}\\ &= [e_0+e_1+e_2]_\lambda\,.\end{aligned}$$

Odtud vidíme, že báze $\ker A$ je generována polynomem $e_0+e_1+e_2$ (explicitně $(e_0+e_1+e_2)(t) = 1+t+t^2$).

ad (c)

Vektor $z := \left(\begin{smallmatrix}6\\2\\3\end{smallmatrix}\right)$ náleží oboru hodnot zobrazení A, poněvadž $z = 3u+2w$, kde (u,w) je už dříve, v části (a), nalezená báze $A(\mathcal{P}_3)$. Tudíž řešení rovnice $Ax = z$ existuje. Poněvadž už jsme našli jádro, abychom zjitili, jak vypadají všechna řešení, stačí najít jedno partikulární řešení. To odpovídá nalezení jenoho řešení soustavy

$$\begin{aligned}2\alpha_0 - 2\alpha_1 &= 6\,,\\ -\alpha_1+\alpha_2 &= 2\,,\\ \alpha_0-\alpha_1 &= 3\,.\end{aligned}$$

Stačí se koukat na poslední dvě rovnice, protože první a třetí rovnice jsou závislé. Abychom zaručili poslední rovnici, zvolíme například $\alpha_0 := 4$ a $\alpha_1 := 1$. Z druhé rovnice pak dopočítáme $\alpha_2 = 2+\alpha_1 = 2+1 = 3$. Partikulární řešení rovnice $Ax = z$ je tedy polynom $x := 4e_0+e_1+3e_2$. Nakonec tedy

$$A^{-1}(z) = \{4e_0+e_1+3e_2\} + [e_0+e_1+e_2]_\lambda\,.$$

Cvičení 3

Nechť $A \in \mathscr{L}(\mathcal{P}_3, \mathbb{C}^2)$ je zadané

$$Ax_1 := \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad Ax_2 := \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad Ax_3 := \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

kde $\mathcal{X} := (x_1,x_2,x_3)$ je báze $\mathcal{P}_3$ taková, že pro každé $t\in\mathbb{C}$ platí

$$x_1(t) := 1-t\,, \qquad x_2(t) := t^2\,, \qquad x_3(t) := 1+t\,.$$

Nalezněte množinu všech řešení rovnice $Ax = \left(\begin{smallmatrix}-1\\-2\end{smallmatrix}\right)$.

Obor hodnot zobrazení A je očividně celé $\mathbb{R}^2$ (protože $A(\mathcal{P}_3) = [\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)]_\lambda = \mathbb{R}^2$), tudíž řešení určitě existuje. Zároveň rovnou vidíme, že jich bude nekonečně mnoho, jelikož $\mathrm{d}(A) = \dim\mathcal{P}_3 - \mathrm{h}(A) = 3-2 = 1 > 0$.

Z posledního výpočtu rovněž vidíme, že jádro A je jednodimenzionální podprostor. Poněvadž, z linearity, $A(x_1-x_2) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$, rovnou dostáváme, že $\ker A = [x_1-x_2]_\lambda$.

Zbývá nalézt partikulární řešení. Poněvadž, opět z linearity, $A(-x_2-x_3) = \left(\begin{smallmatrix}-1\\-2\end{smallmatrix}\right)$, partikulární řešení je například polynom $-x_2-x_3$. Nakonec tedy

$$A^{-1}(\left(\begin{smallmatrix}-1\\-2\end{smallmatrix}\right)) = \{-x_2-x_3\} + [x_1-x_2]_\lambda\,.$$

Cvičení 4

Nechť D je operátor derivování a nechť $A \in \mathscr{L}(\mathcal{P}_3)$ je pro každé $x \in \mathcal{P}_3$ a pro každé $t \in \mathbb{C}$ definované

$$(Ax)(t) := x(-2t+1)\,.$$

(a) Vyšetřete jádro, defekt a hodnost složeného zobrazení DA,
(b) najděte všechna řešení rovnice $(DA)x = b$, kde $b(t) := -1 + 4t$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

Obecný vektor $x \in \mathcal{P}_3$ má tvar $x = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, kde $e_0(t) := 1$, $e_1(t) := t$, $e_1(t) := t^2$ jsou vektory standardní báze v $\mathcal{P}_3$ a $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ jsou čísla (souřadnice vzhledem ke standardní bázi), jež vektor určují. Podle definice

$$\begin{aligned}(Ax)(t) &= \alpha_0 + \alpha_1(-2t+1) + \alpha_2(-2t+1)^2 \\ &= (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) + (-2\alpha_1 - 4\alpha_2)t + 4\alpha_2 t^2\,.\end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}(DAx)(t) &= (-2\alpha_1 - 4\alpha_2) + 8\alpha_2 t \\ &= (-2\alpha_1 - 4\alpha_2)e_0(t) + 8\alpha_2 e_1(t)\,.\end{aligned}$$

Nebo stručněji $DA = (-2\alpha_1 - 4\alpha_2)e_0 + 8\alpha_2 e_1$.

ad (a)

Z odvozeného explicitního vztahu pro složené zobrazení rovnou vidíme, že $(DA)(\mathcal{P}_3) = [e_0, e_1]_\lambda = \mathcal{P}_2$. Tudíž $\mathrm{h}(DA) = 2$. Odtud dopočítáme $\mathrm{d}(DA) = \dim \mathcal{P}_3 - \mathrm{h}(DA) = 3 - 2 = 1$. Jádro A je tedy jednodimenzionální podprostor $\mathcal{P}_3$. Platí, $\forall \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \in \ker DA \quad &\Longleftrightarrow \quad (-2\alpha_1 - 4\alpha_2 = 0 \ \wedge\ 8\alpha_2 = 0) \\ &\Longleftrightarrow \quad (\alpha_1 = 0 \ \wedge\ \alpha_2 = 0)\,.\end{aligned}$$

Tedy $\ker A = [e_0]_\lambda$.

ad (b)

Poněvadž už jsme zjistili, že $(DA)(\mathcal{P}_3) = \mathcal{P}_2$ a $b = -e_0 + 4e_1 \in \mathcal{P}_2$, víme, že řešení existuje. Jelikož jádro A už jsme našli, zbývá najít jedno partikulární řešení rovnice $(DA)x = b$, jež je ekvivalentní soustavě

$$\begin{aligned}-2\alpha_1 - 4\alpha_2 &= -1\,, \\ 8\alpha_2 &= 4\,.\end{aligned}$$

Tomu odpovídá jednoznačně určené řešení $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ a $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$, avšak koeficient $\alpha_0 \in \mathbb{C}$ je stále libovolný; pro partikulární řešení můžeme zvolit $\alpha_0 = 0$. Tedy

$$(DA)^{-1}(b) = \left\{ -\tfrac{1}{2}e_1 + \tfrac{1}{2}e_2 \right\} + [e_0]_\lambda\,.$$

Cvičení 5

Nechť $\varphi \in \mathcal{P}_4^{\#}$ takový, že $\varphi(x) := x(-1)$ pro každé $x \in \mathcal{P}_4$, a nechť $P \subset\subset \mathcal{P}_4$, kde

$$P := \big\{x \in \mathcal{P}_4 : \ \forall t \in [-3,4], \ x(t) = x(1-t)\big\}.$$

Najděte bázi $\varphi^{-1}(0) \cap P$.

Podle definice je φ lineární zobrazení $\varphi : \mathcal{P}_4 \to \mathbb{C}$ takové, že $\varphi(x) = x(-1)$. Poněvadž, rovněž podle definice, $\varphi^{-1}(0) = \{x \in \mathcal{P}_4 : \ x(-1) = 0\}$, množina $\varphi^{-1}(0)$ je tvořená polynomy nejvýše třetího stupně (včetně nulového polynomu), jež mají -1 za kořen.

Podle definice, polynom $x \in \varphi^{-1}(0) \cap P$ tehdy a jen tehdy, pokud $x(-1) = 0$ a zároveň $x \in P$. Z druhé podmínky dostáváme $x(-1) = x(1-(-1)) = x(2)$, tudíž $x(2) = 0$ (protože $x(-1) = 0$). Množina $\varphi^{-1}(0)\cap P$ je tedy tvořená polynomy nejvýše třetího stupně (včetně nulového polynomu), jež mají -1 a 2 za kořen, a navíc splňují symetrii $x(t) = x(1-t)$ pro všechna $t \in [-3,4]$.

Pro libovolný prvek $x \in \varphi^{-1}(0) \cap P$ tedy existují čísla $c, t_0 \in \mathbb{C}$ a $m \in \{0,1\}$ taková, že

$$\forall t \in \mathbb{C}, \qquad x(t) = c(t+1)(t-2)(t-t_0)^m\,,$$

($m = 0$ odpovídá možnosti, že x je polynom druhého stupně nebo nulový polynom, zatímco $m \geq 2$ není možné, protože $x \in \mathcal{P}_4$) a zároveň

$$\forall t \in [-3,4], \qquad c(t+1)(t-2)(t-t_0)^m = c(2-t)(-1-t)(1-t_0-t)^m\,.$$

Dosazením 0 za t dostáváme identitu $c(-t_0)^m = c(1-t_0)^m$, odkud nezbytně $c = 0$ pro $m = 1$, nebo $c \in \mathbb{C}$ libovolné pro $m = 0$. Tudíž průnik $\varphi^{-1}(0) \cap P$ je tvořen pouze jedním polynomem:

$$\varphi^{-1}(0) \cap P = [p]_\lambda\,, \qquad \text{kde} \qquad p(t) := (t+1)(t-2)\,.$$

Báze je například soubor (p).

10 Matice lineárního zobrazení (1. část)

Matice zobrazení $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ vzhledem k bázím $(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{V}^n$ a $(w_1, \dots, w_m) \in \mathcal{W}^m$ je tabulka

$$ {}^{(v_1,\dots,v_n)}T^{(w_1,\dots,w_m)} := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, $$

jejíž prvky jsou (jednoznačně) určeny rozklady

$$ Tv_k = a_{1k}w_1 + \dots + a_{mk}w_m \,, \qquad k = 1, \dots, n \,. $$

Jako pomůcku pro zapamatování si, jak je matice ze zobrazení zkonstruována, si můžete napsat vektory báze výchozího prostoru $v_1, \dots, v_n$ nahoru a vektory báze cílového prostoru $w_1, \dots, w_m$ doleva tabulky takovýmto způsobem:

$$ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} v_1 & \dots & v_k & \dots & v_n \end{array} \\ \begin{array}{c} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{array} & \begin{pmatrix} \quad & \quad & a_{1k} & \quad & \quad \\ & & \vdots & & \\ & & a_{mk} & & \end{pmatrix} \end{array}. $$

Zde zobrazujeme pouze k-tý sloupec matice, a ten se skládá právě z čísel, která potřebujeme, abychom mohli zapsat Tv_k coby lineární kombinaci vektorů $w_1, \dots, w_m$.

Jediné, co je potřeba si zapamatovat, je, že souřadnice z rozkladu skládáme do sloupečku matice.

Cvičení 1

Nechť $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, kde pro každé $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ platí $Ax := \left(\begin{smallmatrix} x_2 - x_1 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$. Nechť $\mathcal{X}$ báze prostoru $\mathbb{R}^2$ a $\mathcal{Y}$ báze $\mathbb{R}^3$ jsou definovány

$$ \mathcal{X} := \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \qquad \mathcal{Y} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right). $$

Sestavte (a) ${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{E}_3}$, (b) ${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{Y}}$, (c) ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3}$, (d) ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$.

ad (a)

Pišme $\mathcal{E}_2 =: (e_1, e_2)$ a $\mathcal{E}_3 =: (f_1, f_2, f_3)$. Potom

$$ Ae_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -f_1 + f_2 + f_3 \,, $$

$$ Ae_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = f_1 - f_2 + f_3 \,. $$

Odtud (skládáme do sloupečků!)

$$ {}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. $$

Všimněte si, že

$$ Ax = {}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{E}_3}\, x = {}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{E}_3}\, (x)_{\mathcal{E}_2} \,. $$

ad (b)

Pišme $\mathcal{Y} =: (y_1, y_2, y_3)$. Potom

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 \,,$$

$$Ae_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3 \,,$$

odkud

$$^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{pmatrix}.$$

Abychom určili koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ a $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$, zbývá vektory Ae_1 a Ae_1 rozložit do báze $\mathcal{Y}$, což odpovídá řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Odtud $\alpha_3 = 2$, $\alpha_2 = -\alpha_3 - 1 = -3$, $\alpha_1 = -1 - \alpha_2 = 2$ a $\beta_3 = 0$, $\beta_2 = -\beta_3 + 1 = 1$, $\beta_1 = 1 - \beta_2 = 0$. Tedy

$$^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

ad (c)

Pišme $\mathcal{X} =: (x_1, x_2)$. Potom

$$Ax_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = f_1 - f_2 - f_3 \,,$$

$$Ax_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0f_1 + 0f_2 + 2f_3 \,,$$

odkud

$$^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Všimněte si, že část (c) je jednodušší než část (b), poněvadž do standardní báze se snadněji rozkládá.

ad (d)

Bez nutnosti přemýšlet postupujeme jako výše:

$$Ax_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \gamma_3 y_3 \,,$$

$$Ax_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \delta_1 y_1 + \delta_2 y_2 + \delta_3 y_3 \,,$$

kde koeficienty $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}$ a $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathbb{R}$ určíme ze soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right),$$

kde $\gamma_3 = -2$, $\gamma_2 = -\gamma_3 + 1 = 3$, $\gamma_1 = 1 - \gamma_2 = -2$ a $\delta_3 = 2$, $\delta_2 = -\delta_3 = -2$, $\delta_1 = -\delta_2 = 2$. Tedy

$$ {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}. $$

Alternativně si napíšeme

$$ {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}(IAI)^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{E}_3}I^{\mathcal{Y}}\ {}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{E}_3}\ {}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{E}_2}. $$

Zde matice ${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{E}_3}$ je zřejmá přímo ze zadání zobrazení A (viz konec části (a)). Zároveň

$$ Ix_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_1 + 0e_2 , \qquad Ix_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 + e_2 , $$

$$ Iy_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f_1 + 0f_2 + f_3 , \qquad Iy_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = f_1 - f_2 + f_3 , \qquad Iy_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0f_1 - f_2 + f_3 , $$

odkud rovnou

$$ {}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad {}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. $$

Nakonec

$$ {}^{\mathcal{E}_3}I^{\mathcal{Y}} = \left({}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{E}_2}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. $$

Potom už zbývá jen hledanou matici zobrazení nalézt coby násobení matic

$$ {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, $$

což souhlasí s výše odvozeným výsledkem.

Cvičení 2

Nechť $A \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$ je zadané obrazy bazických vektorů prostoru $\mathbb{C}^3$ následovně

$$ A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}. $$

Sestavte ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2}$.

Pišme $\mathcal{X} := (x_1, x_2, x_3)$, kde

$$ x_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. $$

Potom rovnou ze zadání máme

$$ {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}. $$

Dále pišme

$$ {}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2} = {}^{\mathcal{E}_3}(AI)^{\mathcal{E}_2} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2}\ {}^{\mathcal{E}_3}I^{\mathcal{X}} $$

a protože ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2}$ už známe, zbývá najít ${}^{\mathcal{E}_3}I^{\mathcal{X}}$. Jednodušší je nalézt

$$ {}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} $$

a dopočítat ${}^{\mathcal{E}_3}I^{\mathcal{X}}$ coby inverzní matici

$$ {}^{\mathcal{E}_3}I^{\mathcal{X}} = \left({}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{E}_3}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. $$

Nakonec

$$ {}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \end{pmatrix}. $$

Cvičení 3

Sestavte ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3}$, je-li $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ zadané maticí ${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{Y}}$, kde $\mathcal{Y}$ je báze $\mathbb{R}^3$ a $\mathcal{X}$ je báze $\mathbb{R}^2$, platí-li

$$ {}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{Y} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \qquad \mathcal{X} := \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right). $$

Pišme

$$ {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3} = {}^{\mathcal{X}}(IAI)^{\mathcal{E}_3} = {}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{E}_3}\ {}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{Y}}\ {}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{E}_2}, $$

kde ze zadání rovnou známe ${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{Y}}$ a

$$ {}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad {}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}. $$

Tedy

$$ {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 23 & 1 \\ 13 & 1 \end{pmatrix}. $$

Cvičení 4

Nechť $A \in \mathscr{L}(\mathcal{V}_3)$, kde $\mathcal{X} := (x_1, x_2, x_3)$ a $\mathcal{Y} := (2x_1 + 3x_2 + x_3, 3x_1 + 4x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + 2x_3)$ jsou báze $\mathcal{V}_3$. Sestavte ${}^{\mathcal{Y}}A$, je-li

$$ {}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}. $$

Pišme

$$ {}^{\mathcal{Y}}A = {}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{Y}}(IAI)^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}\ {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{X}}\ {}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}} = {}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}\ {}^{\mathcal{X}}A\ {}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}}. $$

Ze zadání známe ${}^{\mathcal{X}}A$ a

$$ {}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. $$

Zbývající matici ${}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}$ dopočítáme jako inverzi

$$ {}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}} = \left({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. $$

Nakonec
$$ {}^{\mathcal{Y}}\!A = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. $$

Cvičení 5

Nechť $A \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$. Nalezněte $A \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, je-li

$$ {}^{\mathcal{X}}\!A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{X} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \qquad \mathcal{Y} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right). $$

Pišme $\mathcal{X} =: (x_1, x_2, x_3)$, $\mathcal{Y} =: (y_1, y_2)$ a $u := \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. Trik je si uvědomit, že $u = x_1 + x_2 - x_3$, tudíž $(u)_{\mathcal{X}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, a napsat si
$$ (Au)_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}\!A^{\mathcal{Y}}\ (u)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}. $$

Odtud
$$ Au = 0y_1 + 6y_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \end{pmatrix}. $$

11 Matice lineárního zobrazení (2. část)

Cvičení 1

Nechť $A \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^2)$ je takové, že

$$^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{kde} \qquad \mathcal{X} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Nalezněte
(a) bázi oboru hodnot a bázi jádra zobrazení A,
(b) hodnost $\mathrm{h}(A)$ a defekt $\mathrm{d}(A)$,
(c) všechna řešení rovnice $Ax = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

ad (b)

Nejjednodušší je začít druhou částí. *Hodnost zobrazení* je definována jako dimenze oboru hodnot. *Hodnost matice* je definována jako počet lineárně nezávislých sloupců. Platí pozoruhodné tvrzení, že hodnost zobrazení je rovna hodnosti matice zobrazení, a to vzhledem k jakkoli zvolené bázi (pozoruhodnost spočívá v tom, že bázi lze vskutku zvolit libovolně).

Dále platí, že hodnost matice je rovna hodnosti matice transponované. Tudíž hodnost matice je rovněž počet lineárně nezávislých řádků.

V tomto zadání máme rovnou zadanou matici zobrazení A (vzhledem k bázím $\mathcal{X}$ v $\mathbb{C}^2$ a $\mathcal{E}_2$ v $\mathbb{C}^2$). Má čtyři sloupce, avšak pouze dva řádky, tudíž je jednodušší prozkoumat hodnost skrze řádky: v našem případě jsou očividně lineárně nezávislé (protože jeden není násobkme druhého). Tudíž

$$\mathrm{h}(A) = \mathrm{h}\left(^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2}\right) = \mathrm{h}\left((^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2})^T\right) = 2\,.$$

Povšimněte si, že i počet lineárně nezávislých sloupců matice $^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2}$ je dva. Defekt dopočítáme jako obvykle:

$$\mathrm{d}(A) = \dim \mathbb{C}^4 - \mathrm{h}(A) = 4 - 2 = 2\,.$$

ad (a)

Poněvadž z předchozí části už víme, že dimenze oboru hodnot zobrazení A je dva, zatímco dimenze cílového prostoru $\mathbb{C}^2$ je rovněž dva, nezbytně platí

$$A(\mathbb{C}^4) = \mathbb{C}^2\,.$$

Tudíž za bázi oboru hodnot A lze zvolit například standardní bázi $\mathcal{E}_2$.

Abychom určili jádro zobrazení, postupujeme nejlépe podle následujících ekvivalencí:

$$u \in \ker A \qquad \Longleftrightarrow \qquad Au = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad {^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2}}\,(u)_{\mathcal{X}} = 0\,.$$

Pro libovolný vektor $u = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^4$ pišme $(u)_{\mathcal{X}} =: \left(\begin{smallmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{smallmatrix}\right)$, kde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$ jsou čísla jednoznačně určená rozkladem vektoru u do báze $\mathcal{X}$, tedy

$$u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4\,,$$

kde $\mathcal{X} =: (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Maticová rovnice $^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2}\,(u)_{\mathcal{X}} = 0$ je soustava dvou rovnic pro čtyři neznámé $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, již můžeme rovnou řešit. Z první rovnice například vyjádříme $\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_3$, kde $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ budou volné parametry, a z druhé rovnice pak vyjádříme $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_1 + (2\alpha_1 + \alpha_3) + \alpha_3 = 3\alpha_1 + 2\alpha_3$. Tedy

$$(u)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 \\ \alpha_3 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_3 \end{pmatrix} = \alpha_1\,(v)_{\mathcal{X}} + \alpha_3\,(w)_{\mathcal{X}}\,, \qquad \text{kde} \qquad (v)_{\mathcal{X}} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad (w)_{\mathcal{X}} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Poněvadž $\alpha_1(v)_{\mathcal{X}} + \alpha_3(w)_{\mathcal{X}} = (\alpha_1 v + \alpha_3 w)_{\mathcal{X}}$, platí $u \in [v,w]_\lambda$. Tudíž $\ker A = [v,w]_\lambda$. Báze $\ker A$ je soubor (v,w), protože souřadnicové vektory $(v)_{\mathcal{X}}, (w)_{\mathcal{X}}$ jsou očividně lineárně nezávislé (nebo užitím toho, že už víme, že defekt A je dva). Zbývá nalézt explicitní tvar bazických vektorů:

$$v = 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 3x_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\\3\end{pmatrix},$$

$$w = 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 2x_4 = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

ad (c)

Poněvadž už známe jádro A, zbývá nalézt jedno partikulární řešení x rovnice

$$Ax = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (Ax)_{\mathcal{E}_2} = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)_{\mathcal{E}_2} = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2}\,(x)_{\mathcal{X}} = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right).$$

Poslední vztah je ekvivalentní soustavě

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right),$$

jež má zřejmé řešení například

$$(x)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Potom (pozor, x_3 je označení pro třetí vektor báze $\mathcal{X}$)

$$x = 1x_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Nakonec $A^{-1}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) = x + [v,w]_\lambda$.

Cvičení 2

Nechť $A \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^3)$ je takové, že

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}0\\1\\-\alpha\end{pmatrix}.$$

Nechť $B \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^3)$ je zadané pomocí matice

$${}^{\mathcal{E}_3}B := \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & -3\\ \alpha & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{C}$ určete hodnost zobrazení BA.

Opět užijeme toho, že hodnost zobrazení je rovno hodnosti odpovídající matice vzhledem k libovolně zvoleným bázím. Vzhledem k zadání, je vhodné se držet báze $\mathcal{E}_3$ v $\mathbb{C}^3$ a báze $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ v $\mathbb{C}^4$, kde

$$x_1 := \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad x_2 := \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad x_3 := \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad x_4 := \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Platí

$$\mathrm{h}(BA) = \mathrm{h}\left({}^{\mathcal{X}}(BA)^{\mathcal{E}_3}\right) = \mathrm{h}\left({}^{\mathcal{E}_3}B^{\mathcal{E}_3}\ {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3}\right) = \mathrm{h}\left({}^{\mathcal{E}_3}B\ {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3}\right).$$

Matice ${}^{\mathcal{E}_3}B$ je explicitně zadána a ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3}$ v podstatě taky, protože je zadána akce A na prvcích báze $\mathcal{X}$:

$${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\begin{aligned}
{}^{\mathcal{E}_3}B\ {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -\alpha \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \alpha \\ -1 & -1 & 5 & 2+3\alpha \\ 2 & \alpha & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & -2 & 4 & 2+2\alpha \\ 0 & 2+\alpha & 2 & 1+\alpha \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & -2 & 4 & 2+2\alpha \\ 0 & \alpha & 6 & 3+3\alpha \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & -2 & 4 & 2+2\alpha \\ 0 & 0 & 4\alpha+12 & 2\alpha^2+8\alpha+6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & -2 & 4 & 2+2\alpha \\ 0 & 0 & 2(\alpha+3) & (\alpha+3)(\alpha+1) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Z posledního tvaru vidíme, že matice ${}^{\mathcal{E}_3}B\ {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3}$ má tři lineárně nezávislé sloupce tehdy a jen tehdy, pokud $\alpha \neq -3$. Pokud $\alpha = -3$, matice má právě dva lineárně nezávislé sloupce. Nakonec tedy

$$\mathrm{h}(BA) = \begin{cases} 3 & \Leftrightarrow \quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-3\}, \\ 2 & \Leftrightarrow \quad \alpha = -3. \end{cases}$$

Cvičení 3

Nechť $\mathcal{X}, \mathcal{X}$ jsou dvě báze vektorového prostoru $\mathbb{C}^3$ a nechť $B \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^3)$, kde

$$\mathcal{X} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \qquad \mathcal{Y} := \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right), \qquad {}^{\mathcal{X}}B := \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte množinu $B^{-1}(b)$, je-li

$$\text{(a)} \quad (b)_{\mathcal{X}} := \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad b := \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}, \qquad \text{(c)} \quad (b)_{\mathcal{Y}} := \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Poněvadž očividně $\mathrm{h}(B) = \mathrm{h}({}^{\mathcal{X}}B) = 1$ (matice má pouze jeden lineárně nezávislý sloupec), platí $\mathrm{d}(B) = 2$, což znamená, že jádro B je generováno dvěma lineárně nezávislými vektory u, v. Ze zadání rovnou vidíme, že například

$$(u)_{\mathcal{X}} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad (v)_{\mathcal{X}} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud a z explicitního zadání báze $\mathcal{X}$ dostáváme

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad v := \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Potom $B^{-1}(b) = w + [u, v]_\lambda$, kde w je partikulární řešení rovnice $Bw = b$, pokud existuje, jinak $B^{-1}(b) = \emptyset$. Zbývá hledat partikulární řešení.

ad (a)

$Bw = b$ tehdy a jen tehdy, pokud ${}^{\mathcal{X}}B\ (w)_{\mathcal{X}} = (b)_{\mathcal{X}}$, což je ekvivalentní soustavě

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -3 & 0 & 9 \\ 4 & -2 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right),$$

jež má zřejmě řešení

$$(w)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{odkud} \qquad w = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

ad (b)

Obor hodnot zobrazení B je jednodimenzionální podprostor $[y]_\lambda$, kde

$$(y)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{odkud} \qquad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Poněvadž $b \notin [y]_\lambda$ (zadané b není násobkem y), (partikulární) řešení neexistuje a $B^{-1}(b) = \emptyset$.

ad (c)

Jedna možnost, jak postupovat, je si uvědomit, že

$$IBw = Bw = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad {}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}\ {}^{\mathcal{X}}B\ (w)_{\mathcal{X}} = (b)_{\mathcal{Y}}\,.$$

Matici ${}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}$ najdeme (podle definice) tak, že vektory báze $\mathcal{X}$ vyjádříme v bázi $\mathcal{Y}$. Tato úloha vede na soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 0 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right),$$

odkud dostáváme (připomínám, že hledané koeficienty skládáme do sloupečků)

$${}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poněvadž

$${}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}\ {}^{\mathcal{X}}B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

rovnice ${}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}\ {}^{\mathcal{X}}B\ (w)_{\mathcal{X}} = (b)_{\mathcal{Y}}$ je ekvivalentní soustavě

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 0 & -4 \\ 4 & -2 & 0 & 4 \\ 6 & -3 & 0 & 6 \end{array}\right),$$

jež má zřejmé řešení

$$(w)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{odkud} \qquad w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 4

Nechť $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$je definované

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 , \qquad Ax := \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha x_3 \\ -\alpha x_1 + \beta x_3 \end{pmatrix}.$$

V závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ najděte $\ker A$ a $A^{-1}((\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}))$.

Platí

$${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha \\ -\alpha & 0 & \beta \end{pmatrix},$$

odkud (prozkoumáním, kolik máme lineárně nezávislých řádků) rovnou vidíme, že

$$\mathrm{h}(A) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \ \wedge \ \beta = 0 \,, \\ 2 & \Leftrightarrow \quad \alpha \neq 0 \ \vee \ \beta \neq 0 \,. \end{cases}$$

Následně dopočítáme

$$\mathrm{d}(A) = \begin{cases} 3 & \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \ \wedge \ \beta = 0 \,, \\ 1 & \Leftrightarrow \quad \alpha \neq 0 \ \vee \ \beta \neq 0 \,. \end{cases}$$

Odtud vidíme, že

$$\ker A = \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \ \wedge \ \beta = 0 \,, \\ [u]_\lambda & \Leftrightarrow \quad \alpha \neq 0 \ \vee \ \beta \neq 0 \,, \end{cases}$$

kde $u \in \mathbb{R}^3$ je nenulový vektor splňující

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha \\ -\alpha & 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Snadno ověříme, že hledaný vektor má (pro všechny hodnoty parametrů $\alpha \neq 0 \ \vee \ \beta \neq 0$) tvar

$$u := \begin{pmatrix} \beta^2 \\ -\alpha\beta - \alpha^2 \\ \alpha\beta \end{pmatrix}. \tag{11.1}$$

Zbývá nalézt partikulární řešení $x \in \mathbb{R}^3$ rovnice

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha \\ -\alpha & 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{11.2}$$

Poněvadž $A(\mathbb{R}^3) = (\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix})$ v singulárním případě $\alpha = 0 \ \wedge \ \beta = 0$ (jelikož $\mathrm{h}(A) = 0$), (partikulární) řešení v tomto případě nebude existovat a $A^{-1}((\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix})) = \varnothing$. V ostatních případech lze například zaručit druhou rovnici v (11.2) volbou $x_1 := -\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$ a $x_3 := \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$, zatímco z první se pak dopočítá $x_2 := \frac{1+\alpha^2-\alpha\beta}{\beta(\alpha^2+\beta^2)}$; ve speciálním případě $\beta = 0$, kdy volba x_2 nemá smysl, lze volit $x_1 := -1/\alpha$, $x_2 := 0$ a $x_3 := 2/\alpha$.

Shrnutí je následující (v rovině (α, β) je třeba dát pozor pouze na souřadnicovou osu α):

$$A^{-1}((\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix})) = \begin{cases} \varnothing & \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \ \wedge \ \beta = 0 \,, \\ \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + [u]_\lambda & \Leftrightarrow \quad \alpha \neq 0 \ \wedge \ \beta = 0 \,, \\ \frac{1}{\alpha^2+\beta^2} \begin{pmatrix} -\alpha \\ \frac{1+\alpha^2-\alpha\beta}{\beta} \\ \beta \end{pmatrix} + [u]_\lambda & \Leftrightarrow \quad \alpha \in \mathbb{R} \ \wedge \ \beta \neq 0 \,, \end{cases}$$

kde vektor u je definován v (11.1).

12 Projektor

Cvičení 1

Nechť $P, Q \subset\subset \mathbb{R}^3$, kde

$$P := \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda, \qquad Q := \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

Sestavte ${}^{\mathcal{E}}A_P$, t.j. matici projektoru A na P podle Q.

Pišme

$$p_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad p_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad q := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tudíž (p_1, p_2) je báze P a (q) je báze Q. Všimněte si, že (p_1, p_2, q) je báze $\mathbb{R}^3$. Pro libovolný vektor $x \in \mathbb{R}^3$ tedy existují čísla $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in \mathbb{R}$ taková, že

$$x = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \beta q\,. \tag{12.1}$$

To je ekvivalentní soustavě

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & 2 & x_2 \\ -1 & 0 & 1 & x_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & 2 & x_2 \\ 0 & 2 & 5 & 3x_3 + x_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & 2 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 3x_3 + x_1 - 2x_2 \end{array}\right),$$

odkud

$$\begin{aligned} \beta &= x_1 - 2x_2 + 3x_3\,, \\ \alpha_2 &= x_2 - 2\beta = -2x_1 + 5x_2 - 6x_3\,, \\ \alpha_1 &= \tfrac{1}{3}(x_1 - 2\alpha_2 - 2\beta) = \tfrac{1}{3}(3x_1 - 6x_2 + 6x_3) = x_1 - 2x_2 + 2x_3\,. \end{aligned} \tag{12.2}$$

Obecné zobrazení A na $\mathbb{R}^3$ má tvar

$$Ax := {}^{\mathcal{E}}A\, x\,, \qquad \text{kde} \qquad {}^{\mathcal{E}}A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}\,,$$

a pravou stranu je nutno chápat jako maticové násobení. Projektor A na P podle Q je charakterizován tím, že

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} \overset{\downarrow}{=} \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + 0q\,,$$

kde $x \in \mathbb{R}^3$ je libovolný vektor a α_1, α_2 jsou koeficienty z rozkladu (12.1). To je ekvivalentní soustavě rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= -x_1 + 4x_2 - 6x_3\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= -2x_1 + 5x_2 - 6x_3\,, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= -x_1 + 2x_2 - 2x_3\,, \end{aligned}$$

odkud z libovolnosti vektoru x dostáváme

$$\begin{aligned} a_{11} &= -1\,, & a_{12} &= 4\,, & a_{13} &= -6\,, \\ a_{21} &= -2\,, & a_{22} &= 5\,, & a_{23} &= -6 \\ a_{31} &= -1\,, & a_{32} &= 2\,, & a_{33} &= -2\,. \end{aligned}$$

Tedy

$${}^{\mathcal{E}}A_P = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -6 \\ -2 & 5 & -6 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 4

Nechť $P, Q \subset\subset \mathcal{P}_3$, kde

$$P := \{y \in \mathcal{P}_3 : \ \forall t \in \mathbb{C}, \quad y(t) + y(-t) = 0\} \,, \qquad Q := [y_1, y_2]_\lambda \,,$$

kde $y_1(t) := 1+t$ a $y_2(t) := 1-t^2$ pro všechna $t \in \mathbb{C}$. Nechť A je projektor na P podle Q a D je operátor derivování. Řešte rovnici $3Ax = 4Dx + z$, kde $z(t) := 16 - 12t$ pro všechna $t \in \mathbb{C}$.

Platí $\mathcal{P}_3 = [e_0, e_1, e_2]_\lambda$, kde $e_0(t) := 1$, $e_1(t) := t$ a $e_2(t) := t^2$. Poněvadž, podle definice, P je podprostor $\mathcal{P}_3$ charakterizován tím, že jeho prvky jsou liché polynomy, platí $P = [e_1]_\lambda$ a (e_1) je báze P. Zároveň $Q = [e_0 + e_1, e_0 - e_2]_\lambda$ a $(e_0 + e_1, e_0 - e_2)$ je báze Q. Jelikož $P \oplus Q = \mathcal{P}_3$ (jinými slovy $(e_1, e_0 + e_1, e_0 - e_2)$ je báze $\mathcal{P}_3$), pro libovolný polynom $x \in \mathcal{P}_3$, jenž můžeme psát ve tvaru $x = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, kde $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, existují čísla $\alpha, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ taková, že

$$\begin{aligned} x &= \alpha e_1 + \beta_1(e_0 + e_1) + \beta_2(e_0 - e_2) \\ &= (\beta_1 + \beta_2)e_0 + (\alpha + \beta_1)e_1 - \beta_2 e_2 \,, \end{aligned}$$

odkud

$$\begin{aligned} \beta_2 &= -\alpha_2 \,, \\ \beta_1 &= \alpha_0 - \beta_2 = \alpha_0 + \alpha_2 \,, \\ \alpha &= \alpha_1 - \beta_1 = -\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 \,. \end{aligned}$$

Projektor A je charakterizován tím, že

$$\begin{aligned} Ax &= \alpha e_1 + 0(e_0 + e_1) + 0(e_0 - e_2) \\ &= (-\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2)e_1 \,. \end{aligned}$$

Speciálně

$$Ae_0 = -e_1 \,, \qquad Ae_1 = e_1 \,, \qquad Ae_2 = -e_1 \,,$$

odkud

$$^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

kde $\mathcal{E} := (e_0, e_1, e_2)$. Zároveň

$$De_0 = 0 \,, \qquad De_1 = e_0 \,, \qquad De_2 = 2e_1 \,,$$

tudíž

$$^{\mathcal{E}}D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Definujme $B := 3A - 4D$. Potom rovnice $3Ax = 4Dx + z$ je ekvivalentní rovnici $Bx = z$ a množina všech řešení je dána obvyklým vztahem $B^{-1}(z) = x_p + \ker B$, kde x_p je partikulární řešení rovnice $Bx = z$. Jelikož

$$^{\mathcal{E}}B = 3\ ^{\mathcal{E}}A - 4\ ^{\mathcal{E}}D = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -3 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

snadno nahlédneme, že

$$\ker B = [11e_0 - 3e_2]_\lambda \,.$$

Poněvadž $z = 16e_0 - 12e_1$, pro nalezení partikulárního řešení je potřeba se podívat na soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 0 & 16 \\ -3 & 3 & -11 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) ,$$

odkud nalezneme například

$$x_p := -4e_1 \,.$$

Nakonec tedy

$$(3A - 4D)^{-1}(z) = -4e_1 + [11e_0 - 3e_2]_\lambda \,.$$