Lineární algebra

David Krejčiřík

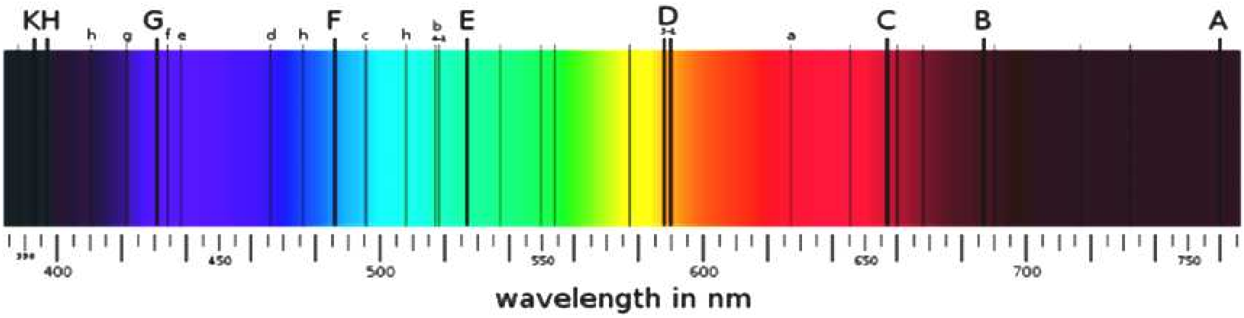
http://nsa.fjfi.cvut.cz/david/

31. října 2024

Jednosemestrální přednáška *Matematika 3* přednášená
autorem na FJFI ČVUT na podzim 2024.

Aktuální verzi tohoto textu lze najít na tomto odkazu:

http://nsa.fjfi.cvut.cz/david/other/la.pdf



Obsah

Linear algebra abstracts the two basic operations with vectors: the addition of vectors, and their multiplication by numbers (scalars). It is astonishing that on such slender foundations an elaborate structure can be built, with romanesque, gothique and baroque aspects. It is even more astounding that linear algebra has not only the right theorems but also the right language for many mathematical topics, including applications of mathematics.

Peter D. Lax, *Linear algebra and its applications*, [9, p. 1]

0 Úvod

Název předmětu je složen ze dvou slov [2, 1]:

- **algebra** pochází z arabského slova *al-džabr* (nespisovně *al-džebr*), jež původně znamenalo lékařský chirurgický úkon za účelem nápravy zlomených či vymknutých kostí. V přeneseném významu tedy "obnovení", "náprava", "sjednocení rozbitých částí". V matematickém významu bylo slovo použito v názvu práce perského matematika Muhammada al-Chwárizmího z 9. století po Kristu (820 AD) o řešení (lineárních a kvadratických) rovnic.
- **lineární** pochází z latinského slova *linearis*, jež znamená "tvořeno přímkami". V přeneseném významu tedy něco "přímého", "rovného".

V dnešním významu "algebra" zahrnuje celou řadu rozličných matematických disciplín. Odvětví "lineární algebra" se zabývá prostory, jejich prvky (členy) a zobrazeními (transformacemi) mezi nimi, schematicky:

- prostor, • prvek, • zobrazení,

jež jsou charakterizovány lineárností; vše se tedy v podstatě redukuje na sčítání prvků a jejich násobení čísly. Je fascinující, že takovéto jednoduché úkony vedou k nesmírně propracované abstraktní teorii, jež poskytuje elegantní sjednocující aparát pro množství problémů v matematice, fyzice a dalších vědních oborech. Vždyť kvantová mechanika, což je nejlepší fyzikální teorie, kterou má lidstvo v současnosti k dispozici, není matematicky vlastně nic jiného než lineární algebra na nekonečně dimenzionálních prostorech. V této přednášce se však budeme výhradně zabývat konečně dimenzionálními prostory.

Mlhavě výše nazvané předměty zájmu lineární algebry se přesněji nazývají:

- vektorový prostor, • vektor, • lineární zobrazení.

Tyto objekty znáte z každodenního života. Mnoho fyzikálních veličin lze charakterizovat pouze jejich velikostí (tzv. skaláry, např. hmotnost, čas, teplota) a tedy popsat pouze jedním číslem. Jiné však mají i směr (např. poloha, rychlost, síla) a tyto pak popisujeme více čísly, jejichž počet je určen dimenzí prostoru; to jsou vektory. V klasické mechanice se za vektorový prostor obvykle bere třírozměrný eukleidovský prostor $\mathbb{R}^3$, v němž lze vektor $v \in \mathbb{R}^3$ (např. rychlost) tedy charakterizovat třemi reálnými čísly v_1, v_2, v_3. Zapisujeme

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

a číslům v_1, v_2, v_3 říkáme složky vektoru v. Obecná lineární transformace tohoto vektoru v na jiný vektor w (např. při pootočení souřadné soustavy) bude mít tvar

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3 \\ a_{31}v_1 + a_{32}v_2 + a_{33}v_3 \end{pmatrix} =: \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \tag{0.1}$$

kde a_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, jsou libovolná reálná čísla. Tabulce A se říká matice (jedná se tudíž o jakousi reprezentaci zobrazení, jež přiřazuje starému vektoru v nový vektor w) a poslední rovnost v (0.1) je vlastně definice pro násobení matice s vektorem. (Symbol $=:$ či $:=$ je rovnost, kde dvojtečka navíc zdůrazňuje, že zavádíme něco nového, zde úplně vpravo.) Lineární transformaci (0.1) lze tedy elegantně zapsat ve tvaru

$$w = Av\,.$$

Zobecnění:

- ◇ **Dimenze.** V přírodě se setkáváme i s prostory jiné dimenze (nižší i vyšší) než tři. Například i v klasické mechanice je zvykem popisovat stav jedné částice polohou a rychlostí coby jedním vektorem v šestirozměrném (fázovém) prostoru $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Obecněji, stav N částic ve fázovém prostoru je reprezentován vektorem o $2N$ složkách. V teorii relativity je stav popsán v čtyřrozměrném časoprostoru. Budeme tedy uvažovat vektorové prostory libovolné dimenze (příležitostně dokonce dimenze nekonečné).
- ◇ **Číselné těleso.** Kromě nutnosti uvažovat libovolně dimenzionální vektorové prostory se ukazuje jako užitečné zobecnění vzít za složky vektoru prvky libovolného číselného tělesa (například komplexní čísla v kvantové mechanice). Lze tedy uvažovat vektorové prostory nad libovolným číselným tělesem. V této přednášce se však výhradně zaměříme na vektorové prostory nad čísly reálnými či komplexními.
- ◇ **Různé prostory.** Dalším zobecněním je možnost uvažovat lineární transformace mezi dvěma prostory odlišných dimenzí, což vede k maticím obdélníkového tvaru místo čtvercového.

Předmětem lineární algebry – a tedy úkolem této přednášky – je zavést takovouto obecnou matematickou abstrakci a studovat vlastnosti lineárních zobrazení. Seznámíte se s robustním aparátem a jeho metodami, který vám poskytne sjednocující strukturu pro aplikace na konkrétní problémy v oborech, které studujete.

Literatura

Hlavním zdrojem této přednášky je zcela výjimečná učebnice amerického autora Sheldona Axlera *Linear algebra done right*. Čerpám z druhého vydání z roku 2004 [3], avšak existuje už i třetí, barevné vydání z roku 2014 [4]. Velká část mé přednášky je pouhý (a neumělý) překlad vybraných partií z [3] do češtiny. Posluchačovi doporučuji k nahlédnutí volně přístupnou zkrácenou verzi třetího vydání [5].

Částečně čerpám rovněž z Halmosovy knihy *Finite-dimensional vector spaces* [6] a z Kopáčkových skript *Matematika pro fyziky II* [8]. Druhou zmiňovanou referenci sleduji zvláště při zavedení pojmu determinantu, který Axler považuje v rámci moderního pojetí lineární algebry za překonaný, a zavádí ho tudíž až úplně na konci, jiným způsobem.

Obrázek na první stránce je absorpční spektrum Slunce. Během přednášky se seznámíte se spektrem lineárního zobrazení. Oba tyto pojmy spolu úzce souvisí, a to skrze kvantovou teorii hmoty.

1 Vektorový prostor

V této přednášce se budeme výhradně zabývat vektorovými prostory nad reálnými čísly $\mathbb{R}$ nebo komplexními čísly $\mathbb{C}$. Připomeňme, že komplexní čísla lze identifikovat s množinou

$$\mathbb{C} := \{a + bi : \ a, b \in \mathbb{R}\}, \qquad \text{kde} \qquad i := \sqrt{-1}$$

je symbol, jenž se nazývá *imaginární jednotka*. Reálným číslům a, b se říká reálná a imaginární část komplexního čísla $a + bi$. Nebudeme připomínat, jak se formálně zavádí sčítání a násobení komplexních čísel; poznamenejme jen, že na komplexní čísla můžeme formálně aplikovat obvyklou aritmetiku, kterou dobře známe z reálných čísel, pokud budeme konzistentně užívat vzorce $i^2 = -1$.

Abychom mohli efektivně uvádět definice a dokazovat věty, které platí jak pro reálná, tak komplexní čísla, zavedeme toto sjednocující značení:

$$\boxed{\mathbb{K} := \mathbb{R} \text{ nebo } \mathbb{C}.}$$

Prvky číselného tělesa $\mathbb{K}$, tedy čísla (někdy též nazývané *skaláry*), budeme obvykle značit řeckými písmeny.

1.1 Definice

Vektorový prostor je, zhruba řečeno, množina objektů, jež můžeme navzájem sčítat a rovněž násobit čísly tak, že výsledky těchto operací jsou opět prvky této množiny. Formální definice zní takto:

Definice 1.1. *Vektorový prostor* je množina $\mathcal{V}$ prvků nazývané *vektory*, která splňuje následující axiomy:

(A) Existuje zobrazení (*součet vektorů*) $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V} : \{(u, v) \mapsto u + v\}$ splňující:

(1) $\forall u, v \in \mathcal{V}, \qquad u + v = v + u;$ (komutativita)

(2) $\forall u, v, w \in \mathcal{V}, \qquad u + (v + w) = (u + v) + w;$ (asociativita)

(3) $\exists 0 \in \mathcal{V}, \quad \forall u \in \mathcal{V}, \qquad u + 0 = u;$ (nulový vektor, počátek)

(4) $\forall u \in \mathcal{V}, \quad \exists -u \in \mathcal{V}, \qquad u + (-u) = 0.$ (opačný vektor)

(B) Existuje zobrazení (*násobení vektorů čísly*) $\mathbb{K} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V} : \{(\alpha, u) \mapsto \alpha u\}$ splňující:

(1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad u \in \mathcal{V}, \qquad \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u;$ (asociativita)

(2) $\forall u \in \mathcal{V}, \qquad 1u = u.$ (identita)

(C) Tato zobrazení jsou vzájemně provázána skrze distributivitu:

(1) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad u, v \in \mathcal{V}, \qquad \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v;$ (distributivita 1)

(2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad u \in \mathcal{V}, \qquad (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u.$ (distributivita 2)

Vektorové prostory budeme obvykle značit velkými psacími písmeny a jejich prvky (vektory) malými latinskými písmeny.

Operace násobení vektorů čísly závisí na volbě číselného tělesa $\mathbb{K}$. Budeme-li tedy chtít přesní, řekneme, že $\mathcal{V}$ je *vektorový prostor nad tělesem* $\mathbb{K}$. Vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ se nazývá *reálný vektorový prostor* a vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ se nazývá *komplexní vektorový prostor*.

1.2 Vlastnosti

Nyní se budeme věnovat základním vlastnostem vektorových prostorů, které plynou z Definice 1.1. Abychom se vyhnuli neustálému opakování tvrzení typu "nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$", dohodněme se pro zbytek přednášky, že symbol $\mathcal{V}$ bude značit libovolný vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$, tedy:

$$\boxed{\mathcal{V} := \text{libovolný vektorový prostor nad } \mathbb{K}.}$$

Všimněte si, že stejný symbol 0, který standardně používáme pro číselnou nulu, v Definici 1.1 označuje nulový vektor. Toto matení studenta by nikdy nemělo vést k jeho popletení, a to díky následujícím tvrzením, jež užívání stejného značení ospravedlňují:

Tvrzení 1.2 (Nedůležitost schismatu nulového symbolu)**.**

(i) $\forall v \in \mathcal{V}, \qquad 0v = 0.$ *(vlevo číselná nula, vpravo nulový vektor)*

(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \qquad \alpha 0 = 0.$ *(vlevo i vpravo nulový vektor)*

Důkaz. Všimněte si, že obě tvrzení vypovídají něco o násobení vektorů čísly a nulovém vektoru (neutrální prvek vůči součtu). Poněvadž jediná část Definice 1.1, jež spojuje sčítání vektorů a jejich násobení čísly, je axiom (C), bude v důkazu třeba využít právě distributivní vlastnosti.

ad (i). Pro libovolný vektor $v \in \mathcal{V}$ máme

$$0v = (0+0)v = 0v + 0v\,,$$

kde první rovnost je elementární identita mezi čísly a druhá rovnost plyne z axiomu (C2). K oboum stranám této rovnice přičteme $-0v$ (tedy opačný vektor k $0v$) a užitím axiomu (A4) dostaneme

$$0 = 0v\,,$$

což je rovnost, kterou jsme chtěli dokázat.

ad (ii). Pro libovolné číslo $\alpha \in \mathbb{K}$ máme

$$\alpha 0 = \alpha(0+0) = \alpha 0 + \alpha 0\,,$$

kde první rovnost využívá axiom (A3), zatímco druhá rovnost plyne z axiomu (C1). K oboum stranám této rovnice přičteme $-\alpha 0$ (tedy opačný vektor k $\alpha 0$) a užitím axiomu (A4) dostaneme

$$0 = \alpha 0\,,$$

což je rovnost, kterou jsme chtěli dokázat. (Čtvereček znamená konec důkazu.) $\square$

První tvrzení (i) lze chápat jako konstrukci nulového vektoru: dostaneme ho tak, že libovolný vektor přenásobíme číslem nula.

Axiom (A3) vyžaduje, aby ve vektorovém prostoru existoval *alespoň jeden* počátek (nulový vektor). Další tvrzení upřesňuje, že takovýto počátek je *právě jeden* (význam kvantifikátoru $\exists!$).

Tvrzení 1.3 (Jedinečnost nulového vektoru). $\exists! 0 \in \mathcal{V}, \quad \forall u \in \mathcal{V}, \qquad u + 0 = u.$

Důkaz. Tento typ tvrzení se nejlépe dokazuje sporem. Nechť ve vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ existují dva *různé* nulové vektory $0 \neq 0'$. Pak

$$0' = 0' + 0 = 0\,,$$

kde první rovnost využívá nulovosti vektoru 0 (tedy jeho neutralitu vůči sčítání, axiom (A3)) a druhá rovnost využívá nulovosti vektoru $0'$ (společně s axiomem (A1) o komutativitě). Tedy $0 = 0'$, což je ve sporu s předpokladem, že nulové vektory 0 a $0'$ jsou různé. □

Obdobně, axiom (A4) vyžaduje, aby pro každý prvek vektorového prostoru existoval *alespoň jeden* inverzní prvek. Další tvrzení upřesňuje, že takovýto prvek je *právě jeden*.

Tvrzení 1.4 (Jedinečnost opačného vektoru). $\forall u \in \mathcal{V}, \quad \exists! -u \in \mathcal{V}, \qquad u + (-u) = 0.$

Důkaz. Nechť $u \in \mathcal{V}$ je libovolný. Předpokládejme, že existují dva různé opačné vektory $v \neq v'$ splňující $u + v = 0$ a $u + v' = 0$. Pak

$$v = v + 0 = v + (u + v') = (v + u) + v' = 0 + v' = v'\,,$$

kde jsme navíc využili asociativitu a komutativitu. Tedy $v = v'$, což je ve sporu s předpokladem, že opačné vektory v a v' jsou různé. □

Už v Definici 1.1 jsme si označili opačný vektor k u intuitivním značením $-u$. Toto značení je obhájeno následujícím tvrzením.

Tvrzení 1.5 (Konstrukce opačného vektoru). $\forall u \in \mathcal{V}, \qquad -u = (-1)u.$

Důkaz. Pro libovolný vektor $u \in \mathcal{V}$ máme

$$u + (-1)u = 1u + (-1)u = [1 + (-1)]u = 0u = 0\,,$$

kde první rovnost využívá axiomu (B2), druhá rovnost je distributivita (C2), třetí rovnost je elementární a čtvrtá rovnost je Tvrzení 1.2(i). Výsledná rovnost říká, že výsledkem součtu vektorů u a $(-1)u$ je nulový vektor, tedy $(-1)u$ musí být roven opačnému vektoru $-u$, což jsme chtěli dokázat. □

V následujícím budeme zkracovat $u + (-v) =: u - v$.

1.3 Příklady

Nyní nastal čas si představit několik charakteristických příkladů vektorových prostorů.

Příklad 1.6 (Nulový prostor)**.** Nejjednodušší vektorový prostor obsahuje pouze jeden prvek, a to nulový vektor. Jinými slovy, množina $\{0\}$ je vektorový prostor, který splňuje triviální pravidla pro sčítání vektorů a násobení čísly:

$$0 + 0 = 0 \qquad \text{a} \qquad \alpha 0 = 0\,,$$

kde $\alpha \in \mathbb{K}$. Tento prostor není samozřejmě nijak zajímavý, avšak dejme mu jméno, *nulový prostor*. (Diamant znamená konec příkladu.) $\diamondsuit$

Příklad 1.7 (Číselné těleso)**.** Samotné číselné těleso $\mathbb{K}$ se stane vektorovým prostorem, pokud definujeme sčítání jeho prvků a násobení čísly z $\mathbb{K}$ obvyklými operacemi pro sčítání a násobení čísel. Speciálně $\mathbb{C}$ je pak komplexní vektorový prostor a $\mathbb{R}$ je reálný vektorový prostor.

Můžeme rovněž uvažovat $\mathbb{C}$ coby reálný vektorový prostor (máme tedy na mysli nestandardní volbu $\mathcal{V} := \mathbb{C}$ a $\mathbb{K} := \mathbb{R}$), pokud definujeme sčítání komplexních čísel jako obvykle a násobení komplexního čísla reálným číslem jako obvykle, avšak tento příklad se liší od $\mathbb{C}$ coby komplexního vektorového prostoru. Naopak $\mathbb{R}$ nelze uvažovat jako komplexní vektorový prostor (protože přenásobením reálného čísla komplexním číslem obecně dostaneme nereálné číslo). $\diamondsuit$

Příklad 1.8 (Souřadnicový prostor)**.** Nechť $\mathbb{K}^n$ s $n \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N}\backslash\{0\}$ (v naší konvenci přirozená čísla obsahují nulu) je množina tvořená uspořádánými n-ticemi čísel z tělesa $\mathbb{K}$. Prvek $x \in \mathbb{K}^n$ budeme zapisovat v podobě sloupce

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

kde $x_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, n$. Čísla x_i nazýváme *složky* vektoru v. Sčítání prvků $x, y \in \mathbb{K}^n$ a násobení čísly $\alpha \in \mathbb{K}$ definujeme po složkách:

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha x := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}.$$

S takto definovanými operacemi se $\mathbb{K}^n$ stane vektorovým prostorem (nad tělesem $\mathbb{K}$), jenž budeme nazývat *n-dimenzionální souřadnicový prostor* (nad $\mathbb{K}$). $\mathbb{C}^n$ budeme nazývat *n-dimenzionální komplexní souřadnicový prostor* a $\mathbb{R}^n$ budeme nazývat *n-dimenzionální reálný souřadnicový prostor* ($\mathbb{R}^n$ je také někdy zvykem nazývat *n-dimenzionální eukleidovský prostor*). Nulový vektor $0 \in \mathbb{K}^n$ a opačný vektor $-x$ k vektoru $x \in \mathbb{K}^n$ splňují

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad -x := \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

V n-dimenzionálním reálném souřadnicovém prostoru $\mathbb{R}^n$ s $n = 1, 2, 3$ a v 1-dimenzionálním komplexním prostoru $\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$ můžeme vektory reprezentovat pomocí šipek. Sčítání vektorů a jejich násobení čísly má pak krásnou geometrickou interpretaci. $\diamondsuit$

Příklad 1.9 (Prostor polynomů)**.** Nechť $m \in \mathbb{N}$. Funkce $p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ se nazývá *polynom*, pokud existují čísla $\alpha_0, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ taková, že

$$\forall x \in \mathbb{K}\,, \qquad p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_m x^m\,.$$

Pokud $\alpha_m \neq 0$, p se nazývá polynom stupně m (pokud je polynom p identicky roven nule, přiřadíme mu stupeň $-\infty$). Součet dvou polynomů p a q a přenásobení číslem $\alpha \in \mathbb{K}$ definujeme, jak je pro funkce obvyklé:

$$(p+q)(x) := p(x) + q(x)\,, \qquad (\alpha p)(x) := \alpha p(x)\,,$$

pro všechna $x \in \mathbb{K}$. S takto definovanými operacemi se množina všech polynomů stupně nejvýše m, kterou budeme značit $\mathcal{P}_m$, stane vektorovým prostorem nad $\mathbb{K}$. Nulový vektor v $\mathcal{P}_m$ je polynom, jenž je identicky roven nule (t.j. všechna čísla $\alpha_0, \dots, \alpha_m$ jsou rovna nule),

$$0(x) = 0 \tag{1.2}$$

pro všechna $x \in \mathbb{K}$, a opačný polynom $-p$ k polynomu $p \in \mathcal{P}_m$ je dán vztahem

$$(-p)(x) = -p(x) \tag{1.3}$$

pro všechna $x \in \mathbb{K}$. (Všimněte si, že $\mathcal{P}_0 = \mathbb{K}$ s obvyklými operacemi sčítání a násobení mezi čísly.)

Kromě vektorového prostoru $\mathcal{P}_m$, jenž je charakterizován tím, že obsahuje polynomy nejvýše stupně m, budeme příležitostně rovněž uvažovat prostor *všech* polynomů na $\mathbb{K}$. Označme takovýto prostor symbolem $\mathcal{P}$. Zřejmě platí

$$\mathcal{P} = \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathcal{P}_m\,.$$

$\diamondsuit$

Příklad 1.10 (Prostor kvantové částice)**.** V nerelativistické kvantové mechanice je fyzikální stav částice (například elektronu) popsán bodem v prostoru měřitelných funkcí, jež jsou kvadraticky integrabilní (Lebesgueův prostor):

$$L^2(\mathbb{R}^3) := \left\{ \psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

S obvyklými operacemi sčítání dvou funkcí a jejich násobení čísly lze ověřit, že se skutečně jedná o vektorový prostor. $\diamondsuit$

1.4 Podprostory

Z geometrie víte, že kromě celého prostoru $\mathbb{R}^3$ a jeho bodů (vektory) je zajímavé uvažovat další lineární objekty jako přímky a roviny. Následující definice zobecňuje tyto pojmy na abstraktní vektorové prostory (včetně libovolné dimenze).

Definice 1.11. *Podprostor* vektorového prostoru $\mathcal{V}$ je podmnožina $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, jež je sama o sobě vektorovým prostorem (se stejnými operacemi sčítání vektorů a násobení čísly jako ve $\mathcal{V}$). Značíme $\mathcal{U} \subset\subset \mathcal{V}$.

Upozornění: Pokud chceme chápat podprostory jako zobecněné přímky a roviny, musíme mít na paměti, že tyto jsou v definici výše vyžadovány procházet počátkem (poněvadž $0 \in \mathcal{U}$ coby důsledek toho, že $\mathcal{U}$ je sám o sobě vektorový prostor).

Definice 1.11 je elegantní, avšak nehodí se pro konkrétní ověřování, zda daná podmnožina $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{V}$ je podprostorem ve $\mathcal{V}$, poněvadž její ověření vyžaduje kontrolu všech axiomů Definice 1.1. Následující věta poskytuje vhodné kriterium, jak určit, zda daná podmnožina $\mathcal{V}$ je podprostorem $\mathcal{V}$, protože ve skutečnosti stačí ověřit jen tři věci; zbytek plyne z toho, že $\mathcal{U}$ je podmnožinou ve $\mathcal{V}$.

Věta 1.12. *Nechť $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$. Platí tato ekvivalence:*

$$\mathcal{U} \subset\subset \mathcal{V} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{(i)} & 0 \in \mathcal{U}\,; & & \textit{(obsahuje počátek)} \\ \text{(ii)} & \forall u, v \in \mathcal{U}, & u + v \in \mathcal{U}\,; & \textit{(uzavřenost vůči součtu)} \\ \text{(iii)} & \forall \alpha \in \mathbb{K},\ u \in \mathcal{U}, & \alpha u \in \mathcal{U}\,. & \textit{(uzavřenost vůči násobení)} \end{cases}$$

(Logická spojka mezi vlastnostmi (i), (ii), (iii) *je "a" (konjunkce).)*

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$ je zřejmá: pokud je $\mathcal{U}$ podprostor, je podle Definice 1.11 sám o sobě vektorovým prostorem, tudíž musí speciálně splňovat body (i)–(iii), viz Definice 1.1.

Opačná implikace $\Leftarrow$ nám říká, že stačí ověřit pouze vlastnosti (i)–(iii), abychom si byli jisti, že $\mathcal{U}$ je podprostorem. Jinými slovy, musíme dokázat, že body (i)–(iii) implikují všechny axiomy (A), (B) a (C) Definice 1.1. Bod (ii) zaručuje, že sčítání vektorů v $\mathcal{U}$ je dobře definováno a bod (iii) zaručuje, že násobení vektorů z $\mathcal{U}$ čísly z $\mathbb{K}$ je dobře definováno. Díky tomu axiomy (A1), (A2), (B) a (C) není třeba ověřovat, poněvadž platí na větší množině $\mathcal{V}$. Bod (i) zaručuje, že nulový vektor leží v $\mathcal{U}$, tudíž i axiom (A3) platí (opět z důvodu jeho platnosti na větší množině $\mathcal{V}$). Zbývá ověřit axiom (A4). Nechť $u \in \mathcal{U} \subset \mathcal{V}$. Pak existuje $-u \in \mathcal{V}$ takový, že $u - u = 0$ coby identita ve $\mathcal{V}$. Avšak podle Tvrzení 1.5 platí $-u = (-1)u$, kde pravá strana leží v $\mathcal{U}$ díky bodu (iii). Tedy $-u \in \mathcal{U}$ a rovnost $u - u = 0$ platí coby identita ve $\mathcal{U}$. □

Užitím Věty 1.12 snadno ověříme následující příklady.

Příklad 1.13 (Nulový a celý prostor)**.** Nejjednodušším příkladem podprostoru libovolného vektorového prostoru $\mathcal{V}$ je nulový prostor $\{0\}$ a celý prostor $\mathcal{V}$.

Prázdná množina $\varnothing$ není podprostor, poněvadž podprostor je vektorový prostor a vektorový prostor musí obsahovat alespoň jeden prvek, a to počátek 0. ♢

Příklad 1.14 (Přímky, roviny atd.)**.** Podprostory číselného prostoru $\mathbb{R}$ jsou nulový prostor $\{0\}$ a celý prostor $\mathbb{R}$. Podprostory dvojdimezionálního eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^2$ jsou nulový prostor $\{0\}$, celý prostor $\mathbb{R}^2$ a všechny přímky procházející počátkem. Podprostory trojdimezionálního eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou nulový prostor $\{0\}$, celý prostor $\mathbb{R}^3$, všechny přímky procházející počátkem a všechny roviny procházející počátkem.

Obecněji, nechť $m, n \in \mathbb{N}^*$ s $m \leq n$. Pak

$$\{x \in \mathbb{K}^n : x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0\}$$

je podprostorem $\mathbb{K}^n$. ♢

Příklad 1.15 (Sudé a liché polynomy)**.** Množiny (symbol $\pm$ znamená buď plus nebo minus)

$$\mathcal{P}_m^{\pm} := \{p \in \mathcal{P}_m : \ \forall x \in \mathbb{K},\ p(x) = \pm p(-x)\} \tag{1.4}$$

jsou podprostory vektorového prostoru polynomů $\mathcal{P}_m$. Všimněte si, že podprostor $\mathcal{P}_m^+$ je tvořen polynomy p^+, jež obsahují pouze sudé mocniny x,

$$p^+(x) = \alpha_0 + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_{2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} x^{2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor},$$

a podprostor $\mathcal{P}_m^-$ je tvořen polynomy p^-, jež obsahují pouze liché mocniny x,

$$p^-(x) = \alpha_1 x + \alpha_3 x^3 + \cdots + \alpha_{2\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor - 1} x^{2\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor - 1},$$

kde $\lfloor \beta \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq \beta\}$ značí *dolní celou část* reálného čísla β. Ve speciálním případě $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ jsou polynomy v podprostoru $\mathcal{P}_m^+$ sudé funkce na $\mathbb{R}$ a polynomy v podprostoru $\mathcal{P}_m^-$ jsou liché funkce na $\mathbb{R}$. ♢

Příklad 1.16. Uvažujme podmnožinu prostoru stavů kvantové částice (viz Příklad 1.10), jež je charakterizována stavy, pro něž i první derivace jsou kvadraticky integrabilní (Sobolevův prostor):

$$W^{1,2}(\mathbb{R}^3) := \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{R}^3) : \ \nabla\psi \in L^2(\mathbb{R}^3) \right\}.$$

Lze ověřit, že skutečně platí $W^{1,2}(\mathbb{R}^3) \subset\subset L^2(\mathbb{R}^3)$. V kvantové mechanice lze $W^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ interpretovat coby prostor fyzikálních stavů s konečnou (kinetickou) energií. ♢

1.5 Součet podprostorů

Jedna možnost, jak utvořit ze dvou daných množin $\mathcal{U}_1$ a $\mathcal{U}_2$ další množinu, je vzít jejich sjednocení $\mathcal{U} := \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$. Pokud $\mathcal{U}_1$ a $\mathcal{U}_2$ jsou podprostory nějakého vektorového prostoru $\mathcal{V}$, jen "málokdy" se však stane, že jejich sjednocení $\mathcal{U}$ bude opět podprostor (přesný význam uvozovek zde je, že jeden z podprostorů musí být podmnožinou toho druhého, aby se tak stalo). Z tohoto důvodu je pro podprostory zajímavější jiná operace.

Definice 1.17. Nechť $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{V}$. *Součet* množin $\mathcal{U}_1$ a $\mathcal{U}_2$ je množina

$$\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 := \{u_1 + u_2 : \ u_1 \in \mathcal{U}_1, \ u_2 \in \mathcal{U}_2\}.$$

Měli byste si ověřit, že pokud navíc $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset\subset \mathcal{V}$, pak takto definovaná množina $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ je skutečně podprostorem $\mathcal{V}$.

Součet dvou podprostorů v teorii vektorových prostorů je operace analogická operaci sjednocení množin v teorii množin v tomto smyslu: Nejmenší podprostor obsahující dva dané podprostory je právě jejich součet. (Analogicky, nejmenší množina obsahující dvě dané množiny je jejich sjednocení.) Schematicky:

$$\text{součet podprostorů} \qquad \longleftrightarrow \qquad \text{sjednocení množin.} \tag{1.5}$$

Avšak tuto analogii je třeba brát s rezervou, viz Poznámka 2.37 níže.

Podívejme se nyní na pár příkladů.

Příklad 1.18. Nechť

$$\mathcal{U}_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 : \ x \in \mathbb{K} \right\} \qquad \text{a} \qquad \mathcal{U}_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 : \ y \in \mathbb{K} \right\}.$$

Pak

$$\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{K}^3 : \ x, y \in \mathbb{K} \right\}.$$

V případě $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ lze $\mathcal{U}_1$ a $\mathcal{U}_2$ geometricky interpretovat jako souřadnicové osy x a y v xyz-kartézském souřadnicovém systému na $\mathbb{R}^3$. Součet $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ má pak geometrický význam roviny xy. ♢

Příklad 1.19. Nechť

$$\mathcal{U}_1 := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{K}^3 : \ x \in \mathbb{K} \right\} \qquad \text{a} \qquad \mathcal{U}_2 := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} y \\ y \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{K}^3 : \ y \in \mathbb{K} \right\}.$$

I v tomto případě dostaneme stejný výsledek jako v předešlém příkladu,

$$\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{K}^3 : \ x, y \in \mathbb{K} \right\}.$$

V případě $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ lze $\mathcal{U}_1$ geometricky interpretovat jako souřadnicovou osu x, $\mathcal{U}_2$ jako souřadnicovou osu y pootočenou o 45° v xy-rovině a součet $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ má opět geometrický význam roviny xy. ♢

1.6 Direktní součet podprostorů

Uvažujme nyní speciální případ podprostorů $\mathcal{U}_1$ a $\mathcal{U}_2$ vektorového prostoru $\mathcal{V}$, jejichž součet dá celý prostor $\mathcal{V}$, tedy $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$. Pak každý prvek $v \in \mathcal{V}$ můžeme napsat ve tvaru $v = u_1 + u_2$, kde $u_1 \in \mathcal{U}_1$ a $u_2 \in \mathcal{U}_2$, tedy

$$\forall v \in \mathcal{V}, \quad \exists\, u_1 \in \mathcal{U}_1, u_2 \in \mathcal{U}_2, \qquad v = u_1 + u_2 \,.$$

Zvláště důležitá situace nastává, když tento rozklad je určen *jednoznačně*.

Definice 1.20. Nechť $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset\subset \mathcal{V}$. Řekneme, že $\mathcal{V}$ je *direktním součtem* podprostorů $\mathcal{U}_1$ a $\mathcal{U}_2$, pokud

$$\forall v \in \mathcal{V}, \quad \exists!\, u_1 \in \mathcal{U}_1, u_2 \in \mathcal{U}_2, \qquad v = u_1 + u_2 \,.$$

Zapisujeme $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$.

Podívejme se nyní na pár charakteristických příkladů.

Příklad 1.21. Nechť

$$\mathcal{U}_1 := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{K}^3 : \ x, y \in \mathbb{K} \right\} \qquad \text{a} \qquad \mathcal{U}_2 := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{K}^3 : \ z \in \mathbb{K} \right\}.$$

Pak

$$\mathbb{K}^3 = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \,.$$

V případě $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ lze $\mathcal{U}_1$ geometricky interpretovat jako xy-rovinu a $\mathcal{U}_2$ jako souřadnicovou osu z. ♢

Příklad 1.22. Nechť

$$\mathcal{U}_1 := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{K}^3 : \ x \in \mathbb{K} \right\}, \ \mathcal{U}_2 := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{K}^3 : \ y \in \mathbb{K} \right\}, \ \mathcal{U}_3 := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{K}^3 : \ z \in \mathbb{K} \right\}.$$

Pak

$$\mathbb{K}^3 = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \mathcal{U}_3 \,.$$

V případě $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ lze $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ a $\mathcal{U}_3$ geometricky interpretovat jako souřadnicové osy. ♢

Příklad 1.23. Nechť $\mathcal{P}_m^{\pm}$ jsou podprostory vektorového prostoru polynomů $\mathcal{P}_m$ definované v (1.4). Pak

$$\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_m^{+} \oplus \mathcal{P}_m^{-} \,.$$

V reálném případě $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ je toto dobře známý rozklad funkce na $\mathbb{R}$ jako součet její sudé a liché části. ♢

Příklad 1.24. Nyní uveďme příklad pro pochopení rozdílu mezi součtem a direktním součtem podprostorů. Nechť

$$\mathcal{U}_1 := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^3 : \ x \in \mathbb{K} \right\}, \ \mathcal{U}_2 := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^3 : \ y \in \mathbb{K} \right\}, \ \mathcal{U}_3 := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ y \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^3 : \ z \in \mathbb{K} \right\}.$$

Zřejmě platí

$$\mathbb{K}^3 = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3 \,,$$

poněvadž libovolný vektor $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^3$ můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{U}_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{U}_2} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{U}_3} \,.$$

Avšak

$$\mathbb{K}^3 \neq \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \mathcal{U}_3 \,,$$

poněvadž například vektor $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ může být napsán jako součet vektorů z $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ a $\mathcal{U}_3$ více způsoby:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\in \mathcal{U}_1} + \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{\in \mathcal{U}_2} + \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}^{\in \mathcal{U}_3}, \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{U}_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{U}_2} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{U}_3} \,. \end{cases}$$

Poněvadž rozklad není jednoznačný, nemůže se jednat o direktní součet. ♢

V předchozím příkladě jsme ukázali, že nějaký vektorový prostor není direktním součtem jistých podprostorů tím, že jsme ukázali, že nulový vektor 0 nemá jednoznačný rozklad do odpovídajících vektorů. Definice 1.20 vyžaduje, aby každý vektor měl jednoznačný rozklad. Mějme nyní podprostory, jejichž součet se rovná celému vektorovému prostoru. Následující tvrzení ukazuje, že ve skutečnosti stačí prozkoumat, zda pouze nulový vektor 0 má jednoznačný rozklad, abychom rozhodli, zda se jedná o direktní součet.

Věta 1.25. *Nechť $\mathcal{U}_1$ a $\mathcal{U}_2$ jsou podprostory vektorového prostoru $\mathcal{V}$. Platí tato ekvivalence:*

$$\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \text{(i)} & \mathcal{V} = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 \,; \\ \text{(ii)} & \forall u_1 \in \mathcal{U}_1, \ u_2 \in \mathcal{U}_2, \qquad 0 = u_1 + u_2 \ \Longrightarrow \ u_1 = u_2 = 0 \,. \end{cases}$$

Důkaz. Dokážeme ekvivalenci jako platnost dvou implikací.

$\boxed{\Rightarrow}$ Nechť $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$. Pak (i) $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$, což plyne přímo z toho, jak jsou součet a direktní součet podprostorů definovány. Vlastnost (ii) plyne z toho, že máme rozklad

$$\underbrace{0}_{\in\mathcal{V}} = \underbrace{0}_{\in\mathcal{U}_1} + \underbrace{0}_{\in\mathcal{U}_2}$$

a ten musí být jednoznačný z definice direktního součtu.

$\boxed{\Leftarrow}$ Nyní předpokládejme, že platí (i) a (ii). Nechť $v \in \mathcal{V}$. Z (i) plyne, že existují $u_1 \in \mathcal{U}_1$ a $u_2 \in \mathcal{U}_2$ takové, že můžeme psát

$$v = u_1 + u_2\,. \tag{1.6}$$

Máme za úkol dokázat, že tento rozklad je jednoznačný. Jak obvyklé v těchto případech, budeme postupovat sporem. Předpokládejme tedy, že existují ještě jiné vektory $u_1' \in \mathcal{U}_1$ a $u_2' \in \mathcal{U}_2$ takové, že $u_1' \neq u_1$ nebo $u_2' \neq u_2$, přičemž máme alternativní rozklad

$$v = u_1' + u_2'\,. \tag{1.7}$$

Odečtením (1.6) a (1.7) dostaneme

$$\underbrace{0}_{\in\mathcal{V}} = \underbrace{u_1 - u_1'}_{\in\mathcal{U}_1} + \underbrace{u_2 - u_2'}_{\in\mathcal{U}_2}.$$

Užitím vlastnosti (ii) dostaneme $u_1 - u_1' = 0$ a $u_2 - u_2' = 0$, tedy $u_1 = u_1'$ a $u_2 = u_2'$, což je spor s předpokladem výše, že $u_1' \neq u_1$ nebo $u_2' \neq u_2$. □

Na závěr si představíme ještě jedno velice užitečné kritérium.

Věta 1.26. *Nechť $\mathcal{U}_1$ a $\mathcal{U}_2$ jsou podprostory vektorového prostoru $\mathcal{V}$. Platí tato ekvivalence:*

$$\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \text{(i)} & \mathcal{V} = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2\,; \\ \text{(ii)} & \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \{0\}\,. \end{cases}$$

Důkaz. Opět dokážeme ekvivalenci jako platnost dvou implikací.

$\boxed{\Rightarrow}$ Jako v důkazu Věty 1.25 je zřejmé, že direktní součet implikuje součet, tedy (i). Zároveň, pokud $u \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, pak

$$\underbrace{0}_{\in\mathcal{V}} = \underbrace{u}_{\in\mathcal{U}_1} + \underbrace{(-u)}_{\in\mathcal{U}_2}.$$

Díky jednoznačnému rozkladu nulového vektoru musí platit $u = 0$. Z libovolnosti vektoru u dostáváme vlastnost (ii).

$\boxed{\Leftarrow}$ Nyní předpokládejme, že platí (i) a (ii). Užitím Věty 1.25 stačí ukázat, že nulový vektor má jednoznačný rozklad. Pišme tedy

$$\underbrace{0}_{\in\mathcal{V}} = \underbrace{u_1}_{\in\mathcal{U}_1} + \underbrace{u_2}_{\in\mathcal{U}_2}. \tag{1.8}$$

Z této rovnice plyne, že $u_1 = -u_2 \in \mathcal{U}_2$. Tedy $u_1 \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$. Z vlastnosti (ii) však dostáváme $u_1 = 0$. Z tohoto výsledku a rovnice (1.8) pak dostáváme rovněž $u_2 = 0$. □

Už jsme se zmínili, že součet podprostorů je operace analogická sjednocení množin. Obdobně (viz předchozí Větu 1.26) *direktní* součet podprostorů je operace analogická *disjunktnímu* sjednocení množin. Schematicky:

$$\text{direktní součet podprostorů} \qquad \longleftrightarrow \qquad \text{disjunktní sjednocení množin.}$$

Žádné dva podprostory vektorového prostoru nemohou být úplně disjunktní, poněvadž oba musí obsahovat nulový vektor. Tedy čistá disjunktnost je v případě podprostorů zaměněna za požadavek, aby jejich průnik byl nulový prostor.

1.7 Cvičení

1. Ukažte, že platí
$$\forall v \in \mathcal{V}, \qquad -(-v) = v\,.$$

2. Ukažte, že platí
$$\forall \alpha \in \mathbb{K},\ v \in \mathcal{V}, \qquad \alpha v = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\alpha = 0\ \vee\ v = 0)\,.$$

3. Odvoďte, jak vypadá nulový a opačný vektor na souřadnicovém prostoru $\mathbb{K}^n$ a na prostoru polynomů $\mathcal{P}_m$, t.j. dokažte (1.1) a (1.2) a (1.3).

4. Pro jaké hodnoty $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je množina
$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 :\ x_2 = \alpha x_1 + \beta \right\}$$
podprostorem v $\mathbb{R}^2$? Interpretujte geometricky.

   [Tehdy a jen tehdy, pokud $\beta = 0$. *Hint:* Použijte Větu 1.12.]

5. Pro jaké hodnoty $\alpha \in \mathbb{K}$ je množina
$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^4 :\ x_3 = 5x_4 + \alpha \right\}$$
podprostorem v $\mathbb{K}^4$?

   [Tehdy a jen tehdy, pokud $\alpha = 0$.]

6. Ukažte, že množina
$$\{p \in \mathcal{P} :\ p(3) = 0\}$$
je podprostorem v $\mathcal{P}$.

7. Které z následujících množin (ne)jsou vektorové prostory nad $\mathbb{R}$, a proč (ne)?
   (a) $\{\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 = 3\}$;
   (b) $\{\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : -3x_1 + 2x_2 = 0\}$;
   (c) $\{\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : 4x_1x_2 = 0\}$;
   (d) $\{\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : 2|x_1| + 3|x_2| = 0\}$.
   (e) $\{\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : |x_1|^2 + |x_2|^2 \leq 0\}$.
   (f) $\{\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : |x_1|^2 + |x_2|^2 \leq 4\}$.
   (g) $\{\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : |x_1|^2 + |x_2|^2 \geq 0\}$.
   (h) $\{\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq 4\}$.
   (i) $\{\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{Z}\}$.

   Interpretujte geometricky.

   [(b), (e), (g) jsou podprostory; ostatní nejsou.]

8. Nechť $m \in \mathbb{N}^*$. Je množina (sjednocení nulového polynomu a všech polynomů stupně právě m)
$$\{0\} \cup \{p : \mathbb{K} \to \mathbb{K} : \ p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_m x^m, \ \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}, \ \alpha_m \neq 0\}$$
podprostorem v $\mathcal{P}_m$?

[Ne. (Není uzavřená vůči součtu.)]

9. Které z následujících podmnožin prostoru $\mathbb{K}^3$ jsou podprostory prostoru $\mathbb{K}^3$?
$$\begin{aligned}
&(a) \quad \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^3 : \ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \right\};\\
&(b) \quad \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^3 : \ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \right\};\\
&(c) \quad \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^3 : \ x_1 x_2 x_3 = 0 \right\};\\
&(d) \quad \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^3 : \ x_1 = 5x_3 \right\}.
\end{aligned}$$
Interpretujte geometricky pro $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

[(a), (d) jsou podprostory; (b), (c) nejsou.]

10. Je $\mathbb{R}^2$ podprostorem $\mathbb{C}$?

[Ne. (Není to ani podmnožina.)]

11. Platí následující tvrzení?
$$\begin{aligned}
&(a) \quad \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 = 0 \right\} \subset\subset \mathbb{R}^2;\\
&(b) \quad \{ z \in \mathbb{C} : \ z \in \mathbb{R} \} \subset\subset \mathbb{C}.
\end{aligned}$$
Interpretujte geometricky.

[(a) platí; (b) neplatí. Obrázky však vypadají stejně.]

12. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?
$$\begin{aligned}
&(a) \quad \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : \ a^3 = b^3 \right\} \subset\subset \mathbb{R}^3;\\
&(b) \quad \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^3 : \ a^3 = b^3 \right\} \subset\subset \mathbb{C}^3.
\end{aligned}$$
Jaká je geometrická interpretace množiny v (a)?

[(a) platí ($a^3 = b^3 \Rightarrow a = b$ pro reálná čísla); (b) neplatí (máme například $(e^{i2\pi/3})^3 = 1^3$), čehož lze využít pro neplatnost uzavřenosti vůči součtu.]

13. Dejte příklad neprázdné množiny $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, jež je uzavřená vzhledem ke sčítání (t.j. $\forall u, v \in \mathcal{U}, u + v \in \mathcal{U}$) a vzatí opačného vektoru (t.j. $\forall u \in \mathcal{U}, -u \in \mathcal{U}$), avšak $\mathcal{U}$ není podprostorem v $\mathbb{R}^2$.

[Například $\mathcal{U} := \mathbb{Z}^2$ nebo $\mathcal{U} := \{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) : \ x_1 \in \{-1, 0, 1\}\}$.]

14. Dejte příklad neprázdné množiny $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, jež je uzavřená vzhledem k násobení čísly, avšak $\mathcal{U}$ není podprostorem v $\mathbb{R}^2$.

[Například $\mathcal{U} := \mathbb{R} \times \{0\}$ nebo $\mathcal{U} := \{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) : \ x_1 x_2 \geq 0$.]

15. Ukažte, že průnik podprostorů ve $\mathcal{V}$ je podprostor ve $\mathcal{V}$, tedy:
$$\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n \subset\subset \mathcal{V} \qquad \Longrightarrow \qquad \bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{U}_k \subset\subset \mathcal{V}\,.$$

16. Ukažte, že sjednocení dvou podprostorů ve $\mathcal{V}$ je podprostor ve $\mathcal{V}$ tehdy a jen tehdy, pokud jeden z podprostorů je podmnožinou toho druhého. Jinými slovy, mějme podprostory $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset\subset \mathcal{V}$, potom platí ekvivalence
$$\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \subset\subset \mathcal{V} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2 \ \vee \ \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_1)\,.$$

17. Nechť $\mathcal{U} \subset\subset \mathcal{V}$. Co je $\mathcal{U} + \mathcal{U}$?

   [$\mathcal{U} + \mathcal{U} = \mathcal{U}$.]

18. Je operace sčítání podprostorů komutativní? Je asociativní? Jinými slovy, platí následující tvrzení?
$$\forall \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3 \subset\subset \mathcal{V}, \qquad \begin{array}{ll} \text{(a)} & \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_1\,; \\ \text{(b)} & (\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2) + \mathcal{U}_3 = \mathcal{U}_1 + (\mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3)\,. \end{array}$$

   [Platí.]

19. Má operace sčítání podprostorů nulový prvek? Tedy platí
$$\exists \mathcal{N} \subset\subset \mathcal{V}, \quad \forall \mathcal{U} \subset\subset \mathcal{V}, \qquad \mathcal{N} + \mathcal{U} = \mathcal{U}\,?$$

   [Ano, a to nulový podprostor $\mathcal{N} := \{0\}$.]

20. Které podprostory obsahují opačné prvky vůči sčítání? Tedy pro které podprostory $\mathcal{U}$ platí
$$\exists -\mathcal{U} \subset\subset \mathcal{V}, \qquad \mathcal{U} + (-\mathcal{U}) = \mathcal{N}\,?$$

   [Pouze nulové podprostory $\mathcal{U} = \mathcal{N} = \{0\}$. *Hint:* Nezbytně $-\mathcal{U} = \mathcal{U}$ a použijte Cvičení 17.]

21. Dokažte, nebo dejte protipříklad:
$$\forall \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{W} \subset\subset \mathcal{V}, \qquad \mathcal{U}_1 + \mathcal{W} = \mathcal{U}_2 + \mathcal{W} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2\,.$$

   [Protipříklad:
   $\mathcal{U}_1 := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{R} \right\}$, $\mathcal{U}_2 := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ x \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{R} \right\}$, $\mathcal{W} := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : \ y \in \mathbb{R} \right\}$,
   což dává $\mathcal{U}_1 + \mathcal{W} = \mathcal{U}_2 + \mathcal{W} = \mathbb{R}^2$.]

22. Uvažujme podprostor
$$\mathcal{U} := \{p \in \mathcal{P} : \ p(x) := \alpha x^2 + \beta x^5, \ \alpha, \beta \in \mathbb{K}\} \subset\subset \mathcal{P}\,.$$
   Najděte podprostor $\mathcal{W}$ v $\mathcal{P}$ takový, že máme rozklad
$$\mathcal{P} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}\,.$$

   [$\mathcal{W} := \mathcal{P} \setminus \mathcal{U}$.]

23. Dokažte, nebo dejte protipříklad:
$$\forall \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{W} \subset\subset \mathcal{V}, \qquad \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{W} = \mathcal{U}_2 \oplus \mathcal{W} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2\,.$$

   [Tvrzení platí. *Hint:* Využijte Věty 1.26.]

2 Vektory

Nyní, co jsme popsali prostory, kterými se budeme zabývat, se zaměříme na jejich prvky a vztahy mezi nimi. Budeme implicitně předpokládat, že číslo m značící počet vektorů je striktně kladné celé číslo, tedy:

$$\boxed{m \in \mathbb{N}^*.}$$

2.1 Soubor *versus* množina

Nechť $v_1, \dots, v_m \in \mathcal{V}$. Ze všeho nejdříve si musíme uvědomit důležitý rozdíl mezi množinou vektorů $\{v_1, \dots, v_m\} \subset \mathcal{V}$ a *souborem* (uspořádanou m-ticí) vektorů $(v_1, \dots, v_m) \in \mathcal{V}^m$. Kromě formálního pozorování, že se jedná o různé objekty, rozdíl spočívá ve dvou věcech. V souboru je pořadí vektorů důležité a vektory se mohou opakovat. Naopak pro množiny je pořadí prvků a jejich opakování irelevantní. Obecně tedy mějme na paměti schematickou nerovnost

$$\{v_1, \dots, v_m\} \neq (v_1, \dots, v_m)\,.$$

Množinu $\{v_1, \dots, v_m\}$ jste zvyklí nazývat množinou o m prvcích. Množině, jež neobsahuje žádný prvek, se říká prázdná množina a značí se $\{\}$ nebo $\varnothing$. Obdobně je zvykem uspořádanou m-tici vektorů $(v_1, \dots, v_m)$ nazývat souborem vektorů délky m. Rovněž bude užitečné si označit soubor délky nula symbolem $()$ a nazývat ho intuitivně prázdným souborem.

2.2 Lineární obal

Ze všeho nejdříve dejme jméno vektoru utvořenému ze souboru daných vektorů.

Definice 2.1. *Lineární kombinace* souboru vektorů $(v_1, \dots, v_m) \in \mathcal{V}^m$ je vektor tvaru

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m\,,$$

kde $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$.

Čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ vystupující v Definici 2.1 nazýváme *koeficienty* lineární kombinace. Jsou-li všechna tato čísla rovna nule (tedy $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$), pak tuto lineární kombinaci nazýváme *triviální*. V opačném případě (t.j. když existuje $i \in \{1, \dots, m\}$ takové, že $\alpha_i \neq 0$) budeme říkat, že lineární kombinace je *netriviální*. Triviální lineární kombinace libovolných vektorů je zřejmě rovna nulovému vektoru.

Jak už bývá v matematice zvykem, přiřadíme název i množině všech lineárních kombinací daných vektorů.

Definice 2.2. *Lineární obal* souboru vektorů $(v_1, \dots, v_m) \in \mathcal{V}^m$ je množina

$$\operatorname{span}(v_1, \dots, v_m) := \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m :\ \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}\}\,.$$

Pro konzistenci rovněž definujeme, že obal prázdného souboru vektorů je nulový prostor, tedy $\operatorname{span}() := \{0\}$.

Vektory $v_1, \dots, v_m$ vystupující v Definici 2.2 nazýváme *generátory* lineárního obalu. Říkáme, že množina $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_m)$ je *generována* vektory $v_1, \dots, v_m$ či že ji tyto vektory *generují*.

Místo $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_m)$ je někdy zvykem psát $\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_m\}$, což je konzistentní, protože lineární obal se nezmění, vynecháme-li jakýkoli vektor ze souboru $(v_1, \dots, v_m)$, jenž se opakuje, a rovněž pořadí je pro definici lineárního obalu irelevantní.

Student si snadno dokáže, že lineární obal je podprostor:

Věta 2.3. $\forall v_1, \dots, v_m \in \mathcal{V}, \qquad \operatorname{span}(v_1, \dots, v_m) \subset\subset \mathcal{V}.$

Lze snadno nahlédnout, že lineární obal $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_m)$ je ve skutečnosti nejmenší ze všech podprostorů ve $\mathcal{V}$ obsahujících vektory $v_1, \dots, v_m$, a to v tomto smyslu:

$$\forall \mathcal{U} \subset\subset \mathcal{V}, \qquad \{v_1, \dots, v_m\} \subset \mathcal{U} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{span}(v_1, \dots, v_m) \subset \mathcal{U}\,.$$

2.3 Prostory konečné a nekonečné dimenze

Definice 2.4. Vektorový prostor $\mathcal{V}$ je *konečně dimenzionální*, pokud je generován konečným počtem svých prvků, tedy

$$\exists v_1, \dots, v_m \in \mathcal{V}, \qquad \operatorname{span}(v_1, \dots, v_m) = \mathcal{V}\,.$$

V opačném případě řekneme, že $\mathcal{V}$ je *nekonečně dimenzionální*.

Příklad 2.5. Nulový prostor $\{0\}$ je konečně dimenzionální. Platí $\operatorname{span}(0) = \{0\}$. $\diamondsuit$

Příklad 2.6. Prostor $\mathbb{K}^m$ je konečně dimenzionální, poněvadž například vektory

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_m := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

ho generují. $\diamondsuit$

Příklad 2.7. Prostor polynomů $\mathcal{P}_m$ stupně nejvýše m je konečně dimenzionální, poněvadž monomy

$$p_0(x) := 1, \quad p_1(x) := x, \quad p_2(x) := x^2, \quad \dots, \quad p_m(x) := x^m,$$

ho generují. $\diamondsuit$

Příklad 2.8. Prostor všech polynomů $\mathcal{P}$ je nekonečně dimenzionální. $\diamondsuit$

Příklad 2.9. Lebesgueův prostor $L^2(\mathbb{R}^3)$ je nekonečně dimenzionální. $\diamondsuit$

V této přednášce se budeme zabývat výhradně konečně dimenzionálními vektorovými prostory. Nekonečně dimenzionálními vektorovými prostory se zabývá odvětví matematiky, jež se nazývá *funkcionální analýza*, neboť jejich typickými představiteli jsou prostory funkcí, viz poslední dva příklady výše.

2.4 Lineární nezávislost

Nechť $v_1, \dots, v_m \in \mathcal{V}$. Z definice součtu množin (Definice 1.17) a definice lineárního obalu vektorů (Definice 2.2) okamžitě dostáváme rovnost

$$\operatorname{span}(v_1, \dots, v_m) = \operatorname{span}(v_1) + \cdots + \operatorname{span}(v_m)\,, \tag{2.1}$$

tedy lineární obal vektorů $v_1, \dots, v_m$ je součet lineárních obalů jednotlivých vektorů. Pokud $v \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_m)$, pak podle Definice 2.2 existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ taková, že

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m\,. \tag{2.2}$$

Položme si otázku, zda volba čísel je jednoznačná. Jinými slovy, zda se v (2.1) jedná o *direktní* součet podprostorů generovaných jednotlivými vektory. Podle Věty 1.25 k tomu dojde tehdy a jen tehdy, pokud platí implikace

$$\underbrace{\alpha_1 v_1}_{\in \operatorname{span}\{v_1\}} + \cdots + \underbrace{\alpha_m v_m}_{\in \operatorname{span}\{v_m\}} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1 v_1 = \cdots = \alpha_m v_m = 0\,.$$

Pokud bychom navíc předpokládali, že všechny vektory $v_1, \dots, v_m$ jsou nenulové, pak z poslední rovnosti dostáváme, že všechny koeficienty α jsou nulové, tedy

$$\alpha_1 v_1 = \cdots = \alpha_m v_m = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0\,.$$

Tato situace je tak důležitá, že jí dáme jméno.

Definice 2.10. Řekneme, že vektory $v_1, \dots, v_m \in \mathcal{V}$ jsou *lineárně nezávislé*, pokud platí

$$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}, \qquad \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0\,.$$

V opačném případě řekneme, že vektory $v_1, \dots, v_m$ jsou *lineárně závislé.*

Obdobně je zvykem definovat lineární nezávislost/závislost souboru vektorů. Pro konzistenci níže definujme, že prázdný soubor vektorů je lineárně nezávislý.

Negací implikace v Definici 2.10 se snadno přesvědčíme, že vektory $v_1, \dots, v_m$ jsou lineárně závislé tehdy a jen tehdy, když

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}, \quad |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_m| \neq 0, \qquad \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0\,.$$

Nerovností $|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_m| \neq 0$ vyjadřujeme podmínku, aby alespoň jedno z čísel $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ bylo nenulové.

Příklad 2.11. Vektory $e_1, \dots, e_m$ z Příkladu 2.6 jsou lineárně nezávislé v $\mathbb{K}^m$. $\diamondsuit$

Příklad 2.12. Monomy $p_0, \dots, p_m$ z Příkladu 2.7 jsou lineárně nezávislé v $\mathcal{P}_m$. $\diamondsuit$

Příklad 2.13. Libovolná dvě čísla (či více) z vektorového prostoru $\mathbb{K}$ jsou lineárně závislá. $\diamondsuit$

Příklad 2.14. Polynomy

$$q_1(x) := 1 - x\,, \qquad q_2(x) := x(1-x)\,, \qquad q_3(x) := 1 - x^2\,,$$

jsou lineárně závislé v $\mathcal{P}_m$ s $m \in [2, \infty]$, neboť $q_1 + q_2 - q_3 = 0$. $\diamondsuit$

Student nechť si dokáže tři následující, elementární tvrzení. První tvrzení interpretuje Definici 2.10 v případě pouze jednoho vektoru.

Tvrzení 2.15. *Platí tato ekvivalence:*

$$\forall v \in \mathcal{V}, \qquad v \text{ je lineárně závislý} \iff v = 0\,.$$

Druhé tvrzení nám říká, vektory jsou vždy lineárně závislé, pokud alespoň jeden z nich se rovná nule. (Opačná implikace samozřejmé neplatí.)

Tvrzení 2.16. *Nechť $v_1, \dots, v_m \in \mathcal{V}$. Platí tato implikace:*

$$\exists j \in \{1, \dots, m\},\ v_j = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_1, \dots, v_m \text{ jsou lineárně závislé}\,.$$

Třetí tvrzení ukazuje, co se děje při přidávání či odebrávání vektorů, ale vždy jen pro lineární závislost v prvním případě a lineární nezávislost v druhém případě.

Tvrzení 2.17. *Nechť $v_1, \dots, v_{m+1} \in \mathcal{V}$. Platí tyto implikace:*

(i) $(v_1, \dots, v_m)$ *je lineárně závislý* $\Longrightarrow$ $(v_1, \dots, v_{m+1})$ *je lineárně závislý.*

(ii) $(v_1, \dots, v_m)$ *je lineárně nezávislý* $\Longrightarrow$ $(v_1, \dots, v_{m-1})$ *je lineárně nezávislý.*

Druhá implikace je konzistentní i s krajním případem $m = 2$, poněvadž jsme prázdný soubor vektorů definovali jako lineárně nezávislý.

Následující věta je fundamentálním výsledkem v teorii lineární závislosti vektorů.

Věta 2.18. *Nechť* $v_1, \dots, v_m \in \mathcal{V}$ *jsou nenulové. Platí tato ekvivalence:*

$$v_1, \dots, v_m \text{ jsou lineárně závislé} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists j \in \{2, \dots, m\}, \quad v_j \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_{j-1})\,.$$

Důkaz. Jako obvykle, dokážeme ekvivalenci jako platnost dvou implikací.

$\boxed{\Rightarrow}$ Předpokládejme, že $v_1, \dots, v_m$ jsou lineárně závislé a nenulové. Nechť $j \in \{2, \dots, m\}$ je první index, pro který vektory $v_1, \dots, v_j$ jsou lineárně závislé (v nejhorším $j = m$). Pak existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_j \in \mathbb{K}$, ne všechny rovny nule, takové, že

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_j v_j = 0\,. \tag{2.3}$$

Ať už jsou čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_j$ jakákoli, nemůžeme mít $\alpha_j = 0$, poněvadž jinak bychom měli lineární závislost pro vektory $v_1, \dots, v_{j-1}$, což je ve sporu s tím, jak jsme index j definovali (připomeňme rovněž, že v_j je nenulový). Rovnici (2.3) tedy můžeme přepsat takto

$$v_j = \frac{-\alpha_1}{\alpha_j}\, v_1 + \dots + \frac{-\alpha_{j-1}}{\alpha_j}\, v_{j-1}$$

což je tvrzení, které jsme chtěli dokázat.

$\boxed{\Leftarrow}$ Z předpokladu plyne, že existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1} \in \mathbb{K}$ taková, že

$$v_j = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{j-1} v_{j-1}\,.$$

Tedy

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{j-1} v_{j-1} - v_j = 0\,,$$

z čehož plyne, že vektory $v_1, \dots, v_j$ jsou lineárně závislé. Přidáním vektorů $v_{j+1}, \dots, v_m$ lineární závislost nezměníme, jak víme z Tvrzení 2.17(i). $\square$

2.5 Steinitzova věta

V předchozích dvou kapitolkách jsme se připravili na důkaz jedné ze základních vět lineární algebry, tzv. *Steinitzovy věty*.

Věta 2.19 (Steinitzova). *Nechť* $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{V}$ *a* $u_1, \dots, u_m \in \mathcal{V}$, $n, m \in \mathbb{N}^*$. *Potom platí tato implikace:*

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)} & u_1, \dots, u_m \quad \textit{jsou lineárně nezávislé;} \\ \text{(ii)} & \forall j \in \{1, \dots, m\}, \qquad u_j \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_n). \end{array}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad m \leq n.$$

Steinitzova věta se dá formulovat i takto: V množině všech lineárních kombinací daných n vektorů existuje nejvýše n lineárně nezávislých vektorů (t.j. každých k vektorů, $k > n$, je lineárně závislých).

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí podle n.

$\boxed{n=1}$ Nechť $n=1$ a nechť u_1, u_2 jsou *dva* ($m=2>1=n$) vektory takové, že $u_1=\alpha_1 v_1$ a $u_2=\alpha_2 v_1$, kde $\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{K}$. Dokážeme, že pak u_1,u_2 jsou lineárně závislé, což je ve sporu s předpokladem. Je-li $\alpha_1=0$, pak $u_1=0$, což implikuje, že u_1,u_2 jsou lineárně závislé (viz Tvrzení 2.16). Je-li $\alpha_1\neq 0$, pak $v_1=\alpha_1^{-1}u_1$, a tedy $u_2=\alpha_2\alpha_1^{-1}u_1$, což znamená, že u_1,u_2 jsou opět lineárně závislé.

$\boxed{n\geq 1}$ Učiňme indukční předpoklad, že tvrzení věty platí pro $n\geq 1$.

$\boxed{n+1}$ Dokažme, že tvrzení věty pak platí pro $n+1$. Nechť $u_1,\dots,u_m$ jsou lineárně nezávislé a

$$\forall j \in \{1,\dots,m\}, \qquad u_j = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_{jk} v_k \,, \tag{2.4}$$

kde $\alpha_{jk}\in\mathbb{K}$, $j=1,\dots,m$, $k=1,\dots,n+1$. Potom $u_m\neq 0$, a tedy alespoň jedno z čísel $\alpha_{m1},\dots,\alpha_{mn+1}$ je různé od nuly (protože jinak by $u_m=0$ díky (2.4) s $j=m$). Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že je to například číslo α_{mn+1}. Definujme

$$\tilde{u}_j := u_j - \frac{\alpha_{jn+1}}{\alpha_{mn+1}} u_m \,, \qquad j=1,\dots,m-1\,. \tag{2.5}$$

Potom, užitím (2.4),

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_j &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} v_k + \alpha_{jn+1} v_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_{jn+1}}{\alpha_{mn+1}} \alpha_{mk} v_k - \frac{\alpha_{jn+1}}{\alpha_{mn+1}} \alpha_{mn+1} v_{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_{jk} - \frac{\alpha_{jn+1}}{\alpha_{mn+1}} \alpha_{mk} \right) v_k \,,
\end{aligned}$$

kde druhá rovnost plyne povšimnutím si, že druhý a poslední člen na pravé straně prvního řádku se navzájem vyruší. Tedy $m-1$ vektorů $\tilde{u}_1,\dots,\tilde{u}_{m-1}$ se dá vyjádřit jako lineární kombinace n vektorů $v_1,\dots,v_n$.

Dokažme, že $\tilde{u}_1,\dots,\tilde{u}_{m-1}$ jsou lineárně nezávislé. Kdyby existovala čísla $\beta_1,\dots,\beta_{m-1}\in\mathbb{K}$ taková, že ne všechna jsou rovna nule a zároveň

$$\sum_{j=1}^{m-1} \beta_j \tilde{u}_j = 0\,,$$

dostali bychom, užitím (2.5),

$$\sum_{j=1}^{m-1} \beta_j u_j - \left(\sum_{j=1}^{m-1} \beta_j \frac{\alpha_{jn+1}}{\alpha_{mn+1}} \right) u_m = 0\,,$$

což by znamenalo, že $u_1,\dots,u_m$ jsou lineárně závislé, což je spor. Tedy jsme právě dokázali, že $\tilde{u}_1,\dots,\tilde{u}_{m-1}$ jsou skutečně lineárně nezávislé.

Podle indukčního předpokladu (aplikovaného na $m-1$ vektorů $\tilde{u}_1,\dots,\tilde{u}_{m-1}$ a n vektorů $v_1,\dots,v_n$) tedy máme $m-1\leq n$. Poslední nerovnost lze přepsat jako $m\leq n+1$, což bylo naším cílem ukázat. □

Použijme Steinitzovu větu pro důkaz (na první pohled velice intuitivního) tvrzení, že každý podprostor konečně dimenzionálního vektorového prostoru je konečně dimenzionální.

Tvrzení 2.20. *Platí tato implikace:*

$$\forall \mathcal{U} \subset\subset \mathcal{V}, \qquad \mathcal{V} \textit{ je konečně dimenzionální} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{U} \textit{ je konečně dimenzionální.}$$

Důkaz. Nechť $\mathcal{V}$ je konečně dimenzionální vektorový prostor, což znamená, že existují vektory $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{V}$ takové, že $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_n) = \mathcal{V}$. Nechť $\mathcal{U} \subset\subset \mathcal{V}$ je podprostor, což speciálně znamená, že každý vektor v $\mathcal{U}$ je zároveň vektorem ve $\mathcal{V}$. Potřebujeme ukázat, že $\mathcal{U}$ je konečně dimenzionální. Použijeme následující vícekrokový algoritmus.

Krok 1

- Pokud $\mathcal{U} = \{0\}$, pak $\mathcal{U}$ je zřejmě konečně dimenzionální a důkaz je u konce.
- Pokud $\mathcal{U} \neq \{0\}$, pak zvolíme nenulový vektor $u_1 \in \mathcal{U}$.

Krok $j \geq 2$

- Pokud $\mathcal{U} = \operatorname{span}(u_1, \dots, u_{j-1})$, pak $\mathcal{U}$ je konečně dimenzionální a důkaz je u konce.
- Pokud $\mathcal{U} \neq \operatorname{span}(u_1, \dots, u_{j-1})$, pak zvolíme vektor $u_j \in \mathcal{U}$ takový, že

$$u_j \notin \operatorname{span}(u_1, \dots, u_{j-1}) \, .$$

  Všimněte si, že takovýto vektor je nezbytně nenulový.

V každém kroku, dokud se algoritmus nezastaví, jsme zkonstruovali soubor nenulových vektorů takových, že žádný vektor v tomto souboru neleží v lineárním obalu předchozích vektorů. Z Věty 2.18 plyne, že $u_1, \dots, u_j$ jsou lineárně nezávislé. Z Věty 2.19 pak plyne, že počet vektorů v takovémto souboru nemůže být větší než počet vektorů generujících prostor $\mathcal{V}$, tedy $j \leq n$. Z toho plyne, že algoritmus se musí nakonec zastavit, tudíž $\mathcal{U}$ je konečně dimenzionální. □

2.6 Báze

V dalším výkladu se pro jednoduchost omezíme na konečně dimenzionální vektorové prostory, tedy:

$\mathcal{V}$ = *konečně dimenzionální* vektorový prostor nad $\mathbb{K}$.

Mějme m vektorů $v_1, \dots, v_m$, jež generují vektorový prostor $\mathcal{V}$, tedy $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_m) = \mathcal{V}$. Student se snadno přesvědčí o tom, že lineární obal se nezmění, pokud z něho vyhodíme vektor, jenž je kombinací ostatních vektorů. Mezi generátory daného prostoru můžeme tedy hledat "minimální" generátory, tedy takové, že vynecháme-li mezi nimi jediný prvek, zbylé vektory už nebudou generátory. Tato úvaha nás přirozeně přivádí k důležitému pojmu báze.

Definice 2.21. Soubor vektorů $(v_1, \dots, v_m) \in \mathcal{V}^m$ nazveme *bází* prostoru $\mathcal{V}$, jestliže

(i) $v_1, \dots, v_m$ jsou lineárně nezávislé;

(ii) $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_m) = \mathcal{V}$.

Příležitostně budeme rovněž říkat, že vektory $v_1, \dots, v_m$ *tvoří bázi* prostoru $\mathcal{V}$.

Příklad 2.22. Vektory $e_1, \dots, e_m$ z Příkladu 2.6 tvoří bázi v $\mathbb{K}^m$, které říkáme *kanonická* (či *standardní*) báze. ♢

Příklad 2.23. Monomy $p_0, \dots, p_m$ z Příkladu (2.7) tvoří bázi v $\mathcal{P}_m$. ♢

Příklad 2.24. 0 není báze nulového prostoru $\{0\}$, neboť 0 je lineárně závislý vektor (viz Tvrzení 2.15). Někdy je však zvykem uvažovat prázdný soubor () coby bázi $\{0\}$. ♢

Z bodu (ii) Definice 2.21 plyne

$$\forall v \in \mathcal{V},\ \exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}, \qquad v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m \,.$$

Důležitost báze spočívá v tom, že tento rozklad je *jednoznačný*.

Tvrzení 2.25. *Nechť* $(v_1, \dots, v_m) \in \mathcal{V}$. *Platí tato ekvivalence:*

$$(v_1, \dots, v_m) \text{ je báze ve } \mathcal{V} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall v \in \mathcal{V},\ \exists! \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}, \qquad v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$$

Čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ se nazývají *souřadnicemi* vektoru v v bázi $v_1, \dots, v_m$.

Důkaz. Jako obvykle dokážeme ekvivalenci jakou platnost dvou implikací.

$\boxed{\Rightarrow}$ Nechť $v_1, \dots, v_m$ tvoří bázi ve $\mathcal{V}$ a nechť $v \in \mathcal{V}$ je libovolný vektor. Z bodu (ii) Definice 2.21 dostáváme existenci čísel $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ takových, že

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m \,.$$

Abychom dokázali, že tento rozklad je jednoznačný, předpokládejme, že existují ještě jiná čísla $\alpha_1', \dots, \alpha_m' \in \mathbb{K}$ taková, že

$$v = \alpha_1' v_1 + \cdots + \alpha_m' v_m \,.$$

Odečtením těchto dvou rovnic dostaneme

$$0 = (\alpha_1 - \alpha_1') v_1 + \cdots + (\alpha_m - \alpha_m') v_m \,.$$

Z této rovnosti a lineární nezávislosti vektorů $v_1, \dots, v_m$ (bod (i) Definice 2.21) však dostáváme $\alpha_1 - \alpha_1' = \cdots = \alpha_m - \alpha_m' = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Nyní předpokládejme, že libovolný vektor $v \in \mathcal{V}$ lze jednoznačně napsat jako lineární kombinaci vektorů $v_1, \dots, v_m$. Je zřejmé, že z toho plyne, že $v \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_m)$. Z libovolnosti v dostáváme platnost bodu (ii) Definice 2.21. Abychom ukázali, že $v_1, \dots, v_m$ jsou lineárně nezávislé, předpokládejme

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0 \,,$$

kde $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$. Avšak z jednoznačnosti rozkladu aplikovaného na nulový vektor ($v = 0$) dostáváme $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$. Tedy $v_1, \dots, v_m$ jsou lineárně nezávislé a dostáváme bod (i) Definice 2.21. □

Vektory generující prostor $\mathcal{V}$ nemusí tvořit bázi, poněvadž nejsou lineárně nezávislé. Následující tvrzení nám říká, že vyjmutím některých z těchto vektorů docílíme lineární nezávislosti zatímco zbývající budou stále generátory prostoru $\mathcal{V}$. Důkaz nám dokonce poskytuje konstrukční algoritmus, jak postupovat.

Tvrzení 2.26 (Zúžení vektorů na bázi). *Nechť* $v_1, \ldots, v_m \in \mathcal{V}$ *splňují* $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m) = \mathcal{V}$. *Potom existují indexy* $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_p \leq m$ *takové, že vybrané vektory* $v_{k_1}, \ldots, v_{k_p}$ *tvoří bázi ve* $\mathcal{V}$.

Důkaz. K důkazu použijeme následující vícekrokový algoritmus. Začneme s volbou souboru vektorů $B := (v_1, \ldots, v_m)$.

Krok 1

- Pokud $v_1 = 0$, vyjmeme v_1 z B.
- Pokud $v_1 \neq 0$, ponecháme soubor B netknutý.

Krok $j \geq 2$

- Pokud $v_j \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_{j-1})$, vyjmeme v_j z B.
- Pokud $v_j \notin \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_{j-1})$, ponecháme soubor B netknutý.

Zastavme algoritmus po m-tém kroku, čímž získáme (potenciálně změněný) soubor B, jehož prvky si můžeme označit $(v_{k_1}, \ldots, v_{k_p})$. Stále platí $\operatorname{span}(v_{k_1}, \ldots, v_{k_p}) = \mathcal{V}$, jelikož jsme vyjmuli pouze prvky, jež už byly v lineárním obalu předešlých prvků. Algoritmus zaručuje, že žádný z vektorů $v_{k_1}, \ldots, v_{k_p}$ neleží v lineárním obalu těch předešlých. Tedy vektory $v_{k_1}, \ldots, v_{k_p}$ jsou lineárně nezávislé díky Větě 2.18. □

Důsledkem tohoto tvrzení je následující, důležitá věta. Připomínáme, že jsme se omezili na konečně dimenzionální vektorové prostory, nicméně tvrzení (se zobecněnou definicí báze a modifikovaným důkazem) platí v plné obecnosti.

Věta 2.27. *V každém vektorovém prostoru existuje báze.*

Důkaz. Podle definice konečně dimenzionálního prostoru, ve vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ existují vektory $v_1, \ldots, v_m$, jež ho generují, tedy $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m) = \mathcal{V}$. Tvrzení 2.26 nám říká, že z těchto vektorů lze vybrat bázi. □

Všimněte si, že pojmy jsme dodefinovali tak šikovně, že nulový prostor $\{0\}$ není protipříkladem předchozí věty. Skutečně, prázdný soubor () je báze nulového prostoru $\{0\}$, protože výše jsme definovali, že prázdný soubor je lineárně nezávislý a jeho obal je právě nulový prostor.

Další výsledek je v jistém smyslu duální k Tvrzení 2.26.

Tvrzení 2.28 (Rozšíření vektorů na bázi)**.** *Nechť $v_1, \dots, v_m \in \mathcal{V}$ jsou lineárně nezávislé. Pokud $v_1, \dots, v_m$ netvoří bázi ve $\mathcal{V}$, potom existují vektory $v_{m+1}, \dots, v_{m+p} \in \mathcal{V}$ takové, že rozšířené vektory $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_{m+p}$ tvoří bázi ve $\mathcal{V}$.*

Důkaz. K důkazu opět použijeme vícekrokový algoritmus. Nechť $w_1, \dots, w_n \in \mathcal{V}$ jsou libovolné vektory splňující $\operatorname{span}(w_1, \dots, w_n) = \mathcal{V}$.

$\boxed{\text{Krok } 1}$

- Pokud $w_1 \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_m)$, definujeme $B := (v_1, \dots, v_m)$.
- Pokud $w_1 \notin \operatorname{span}(v_1, \dots, v_m)$, definujeme $B := (v_1, \dots, v_m, w_1)$.

$\boxed{\text{Krok } j \geq 2}$

- Pokud $w_j \in \operatorname{span} B$, ponecháme definici B beze změny.
- Pokud $w_j \notin \operatorname{span} B$, rozšíříme množinu B dodáním prvku w_j (tedy "$B := (B, w_j)$").

Po každém kroku je množina B tvořena lineárně nezávislými vektory, a to díky Větě 2.18. Po kroku n jsme si jisti, že všechny vektory $w_1, \dots, w_n$ leží v $\operatorname{span} B$. Tedy pro množinu vektorů B, kterou získáme po kroku n, platí $\operatorname{span} B = \mathcal{V}$ a její prvky tudíž tvoří bázi ve $\mathcal{V}$. □

Všimněte si, že Tvrzení 2.28 lze použít k alternativnímu důkazu Věty 2.27, začneme-li rozšiřovat prázdný soubor () (jež je podle definice lineárně nezávislý).

2.7 Dimenze

Mluvíme o konečně dimenzionálních prostorech, aniž bychom zatím pojem dimenze definovali. Jak tento pojem zavést? Jsme sváděni k tomu, že dimenze prostoru bude dána počtem prvků báze (viz m prvků kanonické báze $e_1, \dots, e_m$ prostoru $\mathbb{K}^m$). Avšak ve vektorovém prostoru může existovat více bází a zatím nám nic nezaručuje, že všechny obsahují stejný počet prvků, takže takovýto pojem dimenze by nemusel být dobře definovaný. Následující věta tento problém naštěstí řeší.

Věta 2.29. *Libovolné dvě báze vektorového prostoru mají stejný počet prvků.*

Důkaz. Právě kvůli této větě jsme si dokázali Steinitzovu větu (Věta 2.19). Nechť $(v_1, \dots, v_m)$ a $(w_1, \dots, w_n)$ jsou dvě báze prostoru $\mathcal{V}$. Poněvadž vektory $v_1, \dots, v_m$ jsou lineárně nezávislé a $\operatorname{span}(w_1, \dots, w_n) = \mathcal{V}$, máme $m \leq n$. Naopak, poněvadž vektory $w_1, \dots, w_n$ jsou lineárně nezávislé a $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_m) = \mathcal{V}$, máme $n \leq m$. Tudíž $m = n$. □

S předchozí větou má následující, intuitivní definice dobrý smysl.

Definice 2.30. *Dimenze* vektorového prostoru $\mathcal{V}$ je počet prvků báze, jenž označujeme symbolem $\dim \mathcal{V}$.

Všimněte si, že dimenze je celé nezáporné číslo $n \in \mathbb{N}$. Pokud $\dim \mathcal{V} = n$, budeme říkat, že $\mathcal{V}$ *má dimenzi* n nebo že $\mathcal{V}$ *je* n*-dimenzionální*.

Příklad 2.31. Protože bází nulového prostoru $\{0\}$ je prázdná množina, máme $\dim\{0\} = 0$. $\diamondsuit$

Příklad 2.32. $\dim \mathbb{K}^m = m$.

Speciálně máme $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ a $\dim \mathbb{C} = 1$. Toto je na první pohled matoucí, poněvadž $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{C}$ coby množiny je zvykem identifikovat. K osvětlení tohoto schizmatu pomůže připomenout, že $\mathbb{R}^2$ chápeme jako reálný vektorový prostor a $\mathbb{C}$ chápeme jako komplexní vektorový prostor. Kdybychom $\mathbb{C}$ chápali jako reálný vektorový prostor (viz Příklad 1.7), měli bychom $\dim \mathbb{C} = 2$. Tedy je vždy důležité specifikovat, nad kterým číselným tělesem pracujeme. $\diamondsuit$

Příklad 2.33. $\dim \mathcal{P}_m = m + 1$. $\diamondsuit$

Abychom ověřili, že nějaké vektory tvoří bázi ve vektorovém prostoru $\mathcal{V}$, musíme podle Definice 2.21 ověřit dvě věci: vektory jsou lineárně nezávislé a generují prostor $\mathcal{V}$. Následující tvrzení říká, že v případě, že máme ten správný počet vektorů, stačí ověřit pouze jednu z těchto vlastností. To je užitečné v praktických výpočtech.

Tvrzení 2.34. *Nechť* $\mathcal{V}$ *je* n*-dimenzionální vektorový prostor. Platí tyto ekvivalence:*

$$\begin{aligned} v_1, \dots, v_n \text{ tvoří bázi ve } \mathcal{V} \quad &\iff \quad v_1, \dots, v_n \text{ jsou lineárně nezávislé} \\ &\iff \quad \operatorname{span}(v_1, \dots, v_n) = \mathcal{V}. \end{aligned}$$

Důkaz. Pokud $v_1, \dots, v_n$ tvoří bázi ve $\mathcal{V}$, jsou lineárně nezávislé a generují $\mathcal{V}$. Zbývá tedy dokázat pouze obrácené implikace.

Pokud vektory $v_1, \dots, v_n$ jsou lineárně nezávislé a netvoří bázi, můžeme je rozšířit na bázi přidáním p vektorů, díky Tvrzení 2.28. Avšak každá báze má n prvků, tedy toto rozšíření musí být triviální (ve smyslu $p = 0$, tedy nic není přidáno), tedy už vektory $v_1, \dots, v_n$ tvoří bázi.

Pokud vektory $v_1, \dots, v_n$ generují $\mathcal{V}$, potom z nich můžeme vybrat vektory $v_{k_1}, \dots, v_{k_p}$, jež tvoří bázi ve $\mathcal{V}$, díky Tvrzení 2.26. Avšak každá báze má n prvků, tedy toto vybrání musí být triviální (ve smyslu $k_j = j$ pro všechna $j = 1, \dots, n$, tedy nic není odebráno), tedy už vektory $v_1, \dots, v_n$ tvoří bázi. $\square$

2.8 Dimenze a podprostory

Každý podprostor konečně dimenzionálního vektorového prostoru je konečně dimenzionální (Tvrzení 2.20), tudíž má dimenzi. Následující výsledek dává očekávanou nerovnost.

Tvrzení 2.35. $\mathcal{U} \subset\subset \mathcal{V} \quad \Longrightarrow \quad \dim \mathcal{U} \leq \dim \mathcal{V}$.

Důkaz. Jakákoli báze prostoru $\mathcal{U}$ je dána lineárně nezávislými vektory ve $\mathcal{V}$, a tak je lze doplnit na bázi ve $\mathcal{V}$ díky Tvrzení 2.28. Tudíž počet vektorů báze $\mathcal{U}$ je menší nebo rovno počtu vektorů báze $\mathcal{V}$. □

Na závěr se budeme zabývat vztahem mezi dimenzí a součtem podprostorů.

Věta 2.36. *Nechť $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset\subset \mathcal{V}$. Pak platí tyto identity:*

(i) $\dim(\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2) = \dim \mathcal{U}_1 + \dim \mathcal{U}_2 - \dim(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)\,.$

(ii) $\dim(\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2) = \dim \mathcal{U}_1 + \dim \mathcal{U}_2\,.$

Důkaz. Druhé tvrzení je přímým důsledkem prvního a Věty 1.26. Zbývá tedy dokázat první tvrzení.

Nechť $(u_1, \dots, u_m)$ je báze $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ (přesvědčte se o tom, že průnik podprostorů je podprostor); tedy $\dim(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) = m$. Poněvadž $(u_1, \dots, u_m)$ je báze $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, jedná se o soubor lineárně nezávislých vektorů v $\mathcal{U}_1$, a můžeme je tudíž rozšířit o nějaké vektory $v_1, \dots, v_j$ na bázi $\mathcal{U}_1$ (Tvrzení 2.28). Tedy $(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_j)$ je báze podprostoru $\mathcal{U}_1$ a máme $\dim \mathcal{U}_1 = m+j$. Stejným způsobem rozšíříme vektory $u_1, \dots, u_m$ na bázi $(u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_k)$ podprostoru $\mathcal{U}_2$; tedy $\dim \mathcal{U}_2 = m + k$.

Ukážeme, že $(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_j, w_1, \dots, w_k)$ je báze součtu $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$. Tento výsledek bude znamenat konec důkazu, poněvadž pak

$$
\begin{aligned}
\dim(\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2) &= m + j + k \\
&= (m + j) + (m + k) - m \\
&= \dim \mathcal{U}_1 + \dim \mathcal{U}_2 - \dim(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)\,.
\end{aligned}
$$

Je zřejmé, že $\operatorname{span}(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_j, w_1, \dots, w_k) \supset \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_1$, poněvadž tento lineární obal obsahuje každý z podprostorů $\mathcal{U}_1$ a $\mathcal{U}_2$ zvlášť. Opačná inkluze rovněž platí, jak se snadno přesvědčíme z definice lineárního obalu a součtu podprostorů. Zbývá tedy ukázat, že vektory $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_j, w_1, \dots, w_k$ jsou lineárně nezávislé.

Za tímto účelem, předpokládejme rovnost

$$
\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha u_m + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_j v_j + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_k w_k = 0\,, \tag{2.6}
$$

kde $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_j, \gamma_1, \dots, \gamma_k \in \mathbb{K}$; chceme ukázat, že všechna tato čísla jsou pak rovna nule. Přepišme rovnost tímto způsobem

$$
\gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_k w_k = -\alpha_1 u_1 - \cdots - \alpha u_m - \beta_1 v_1 - \cdots - \beta_j v_j \in \mathcal{U}_1\,,
$$

což ukazuje, že $\gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_k w_k \in \mathcal{U}_1$. Ve skutečnosti $\gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_k w_k \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, poněvadž všechny vektory $w_1, \dots, w_k$ leží v $\mathcal{U}_2$. Jelikož $u_1, \dots, u_m$ je báze $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, můžeme psát

$$
\gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_k w_k = \delta_1 u_1 + \cdots + \delta_m u_m\,,
$$

kde $\delta_1, \dots, \delta_m \in \mathbb{K}$. Avšak $u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_k$ jsou lineárně nezávislé, tudíž všechna čísla γ (a δ) jsou rovna nule. Rovnost (2.6) se tedy zjednoduší na

$$
\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha u_m + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_j v_j = 0\,,
$$

odkud okamžitě plyne, že všechna čísla α a β jsou rovna nule, protože $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_j$ jsou lineárně nezávislé. Tedy jsem dokázali, že všechna čísla α, β a γ jsou rovna nule coby důsledek předpokladu (2.6), což bylo naším cílem ukázat. $\square$

Poznámka 2.37. Tvrzení (i) Věty 2.36 lze intuitivně chápat jako vektorovou analogii množinového tvrzení:

$$|\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2| = |\mathcal{U}_1| + |\mathcal{U}_2| - |\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2| \,,$$

kde $|\mathcal{U}|$ značí kardinalitu (t.j. počet prvků) množiny $\mathcal{U}$. Avšak tato analogie (viz (1.5)) má své limity. Skutečně, uvažujme nyní (pravdivé) množinové tvrzení pro tři množiny:

$$|\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \mathcal{U}_3| = |\mathcal{U}_1| + |\mathcal{U}_2| + |\mathcal{U}_3| - |\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2| - |\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_3| - |\mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3| + |\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3| \,.$$

Pak analogické vektorové tvrzení, t.j. po formální záměně kardinalita $\to$ dimenze, obecně neplatí! (Pro protipříklad viz Cvičení 2.9.18.)

Z předchozí věty vidíme, že dimenze a direktní součet "jsou kamarádi". Představme užitečné kritérium pro direktní součet podprostorů.

Tvrzení 2.38. *Nechť* $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_m \subset\subset \mathcal{V}$. *Pak platí tato ekvivalence:*

$$\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_m \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \text{(i)} & \mathcal{V} = \mathcal{U}_1 + \cdots + \mathcal{U}_m \,; \\ \text{(ii)} & \dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{U}_1 + \cdots + \dim \mathcal{U}_m \,. \end{cases}$$

Důkaz. Implikace $\boxed{\Rightarrow}$ je triviální (užitím toho, že direktní součet podprostorů je automaticky součet podprostorů, a Věty 2.36(ii)). Zbývá tedy dokázat implikaci $\boxed{\Leftarrow}$.

Zvolme bázi pro každý z podprostorů $\mathcal{U}_j$, $j = 1, \dots, m$. Dáme-li tyto báze dohromady, zjistíme, že výsledný soubor obsahuje $\dim \mathcal{V}$ vektorů (díky vlastnosti (ii)), jež generují prostor $\mathcal{V}$ (díky vlastnosti (i)). Užitím Tvrzení 2.34 vidíme, že tento výsledný soubor vektorů tvoří bázi prostoru $\mathcal{V}$. Speciálně víme, že vektory v něm obsažené jsou lineárně nezávislé.

Nyní předpokládejme, že $u_1 \in \mathcal{U}_1, \dots, u_m \in \mathcal{U}_m$ jsou takové, že

$$0 = u_1 + \cdots + u_m \,.$$

Vyjádřením každého z vektorů u_j jako lineární kombinaci vektorů báze $\mathcal{U}_j$ zvolené výše, dostaneme rozklad nulového vektoru do vektorů báze. Tedy všechna čísla vystupující v tomto rozkladu musí být rovna nule, v důsledku čehož $u_j = 0$ pro všechna $j = 1, \dots, m$. Užitím Věty 1.25 dostáváme požadovaný výsledek $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_m$. $\square$

Následující věta říká, že každý podprostor vektorového prostoru má doplněk. (Analogické tvrzení platí i v nekonečně dimenzionálních prostorech.)

Věta 2.39. *Nechť* $\mathcal{U} \subset\subset \mathcal{V}$, *kde* $\dim \mathcal{V} =: m + n$ *a* $\dim \mathcal{U} =: m$. *Potom*

$$\exists \mathcal{W} \subset\subset \mathcal{V}, \qquad \dim \mathcal{W} = n \quad \wedge \quad \mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W} \,.$$

Důkaz. Nechť $(u_1, \dots, u_m)$ je báze podprostoru $\mathcal{U}$. Poněvadž se speciálně jedná o lineárně nezávislé vektory, můžeme je podle Tvrzení 2.28 rozšířit o nějaké vektory $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{V}$ na bázi $\mathcal{V}$. Tedy $(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n)$ je báze $\mathcal{V}$. Definujme $\mathcal{W} := \operatorname{span}(v_1, \dots, v_n)$. Zjevně platí $\mathcal{W} \subset\subset \mathcal{V}$ a $\dim \mathcal{W} = n$.

Zbývá ukázat, že $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$. K tomu použijeme Větu 1.26, podle které je potřeba ukázat, že

$$\mathcal{V} = \mathcal{U} + \mathcal{W} \qquad \text{a} \qquad \mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{0\} \,.$$

K důkazu prvního tvrzení si vezměme libovolný vektor $v \in \mathcal{V}$. Poněvadž platí rovnost $\operatorname{span}(u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n) = \mathcal{V}$, existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ taková, že

$$v = \underbrace{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m}_{u \in \mathcal{U}} + \underbrace{\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n}_{w \in \mathcal{W}} \,,$$

z čehož vidíme platnost $\mathcal{V} = \mathcal{U} + \mathcal{W}$.

K důkazu tvrzení $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{0\}$ si vezměme libovolný vektor $v \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$. Pak existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ taková, že

$$v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \,.$$

Z toho dostáváme rovnost

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m - \beta_1 v_1 - \dots - \beta_n v_n = 0 \,.$$

Poněvadž vektory $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$ jsou lineárně nezávislé, z poslední rovnosti plyne, že všechna čísla α a β jsou nezbytně nulová. Pak však $v = 0$, což bylo naším cílem ukázat. $\square$

2.9 Cvičení

1. Dokažte tvrzení z příkladů 2.22 a 2.23.
2. Nalezněte bázi a dimenzi podprostorů z Cvičení 1.7.4–7 a 9.
3. Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{R}^2$ a v něm vektory
$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Rozhodněte, zda vektor v_1 je lineární kombinací vektoru v_2.
   (b) Rozhodněte, zda vektor v_1 je lineární kombinací vektorů v_2 a v_3.

   Interpretujte geometricky.

   [(a) Ne. (b) Ano. ($v_1 = v_2 - v_3$)]
4. Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{K}^3$ a v něm vektory
$$v_1 := \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
   Rozhodněte, zda vektor v_1 je lineární kombinací vektorů v_2 a v_3.

   [Ano. ($v_1 = 3v_2 + 2v_3$)]
5. Nalezněte hodnoty parametru $t \in \mathbb{R}$ takové, aby vektory
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ t \end{pmatrix},$$
   nebyly lineárně nezávislé v $\mathbb{R}^3$.

   [$t = 2$]
6. Ukažte, že platí tato implikace:
$$\operatorname{span}(v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, v_m) = \mathcal{V} \implies \operatorname{span}(v_1 - v_2, v_2 - v_3, \dots, v_{m-1} - v_m, v_m) = \mathcal{V}.$$
7. Ukažte, že platí tato implikace:
$$v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, v_m \quad \text{jsou lineárně nezávislé} \implies v_1 - v_2, v_2 - v_3, \dots, v_{m-1} - v_m, v_m \quad \text{jsou lineárně nezávislé}.$$
8. Nechť $v_1, \dots, v_m \in \mathcal{V}$ jsou lineárně nezávislé a $w \in \mathcal{V}$. Ukažte, že platí tato implikace:
$$v_1 + w, \dots, v_m + w \quad \text{jsou lineárně závislé} \qquad \implies \qquad w = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_m).$$
9. Dokažte, nebo dejte protipříklad:
$$v_1, \dots, v_m \quad \text{jsou lineárně nezávislé} \implies 5v_1 - 4v_2, v_2, \dots, v_m \quad \text{jsou lineárně nezávislé}.$$

   [Tvrzení platí.]

10. Dokažte, nebo dejte protipříklad:

$$v_1, \dots, v_m \quad \text{jsou lineárně nezávislé} \\ \implies \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \quad \lambda v_1, \lambda v_2, \dots, \lambda v_m \quad \text{jsou lineárně nezávislé}\,.$$

[Tvrzení platí.]

11. Ukažte, že vektory

$$v_1 := \left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right), \qquad v_2 := \left(\begin{smallmatrix}3\\5\end{smallmatrix}\right),$$

tvoří bázi v prostoru $\mathbb{K}^2$.

12. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{K}^2$ uvažujme vektory

$$v_1 := \left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right), \qquad v_2 := \left(\begin{smallmatrix}3\\6\end{smallmatrix}\right), \qquad v_3 := \left(\begin{smallmatrix}4\\7\end{smallmatrix}\right), \qquad v_4 := \left(\begin{smallmatrix}5\\9\end{smallmatrix}\right).$$

(a) Ukažte, že $\operatorname{span}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathbb{K}^2$.

(b) Použijte algoritmus důkazu Tvrzení 2.26 pro zúžení vektorů v_1, v_2, v_3, v_4 na bázi.

[v_1, v_3]

13. Uvažujme podprostor v $\mathbb{R}^5$ definovaný předpisem

$$\mathcal{U} := \left\{ \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 : \ x_1 = 3x_2 \ \wedge \ x_3 = 7x_4 \right\}.$$

Najděte v $\mathcal{U}$ bázi.

[$\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\7\\1\end{pmatrix}$]

14. Nechť $\dim \mathcal{V} = m$. Ukažte, že existují jednodimenzionální podprostory $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_m \subset\subset \mathcal{V}$ splňující

$$\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_m\,.$$

[$\mathcal{U}_j = \operatorname{span}(u_j)$, $j = 1, \dots, m$, kde $u_1, \dots, u_m$ je báze ve $\mathcal{V}$.]

15. Dokažte následující implikaci:

$$(\mathcal{U} \subset\subset \mathcal{V} \quad \wedge \quad \dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{V}) \qquad \implies \qquad \mathcal{U} = \mathcal{V}.$$

[Plyne z Věty 2.39 ($\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \{0\} = \mathcal{U}$).]

16. Nechť $\mathcal{U}, \mathcal{W} \subset\subset \mathbb{R}^8$. Dokažte následující implikaci

$$\big(\dim \mathcal{U} = 3 \ \wedge \ \dim \mathcal{W} = 5 \ \wedge \ \mathcal{U} + \mathcal{W} = \mathbb{R}^8\big) \qquad \implies \qquad \mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{0\}\,.$$

[Plyne z Věty 2.36.]

17. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{C}^4$ uvažujme vektory

$$v_1 := \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \qquad v_2 := \begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad v_3 := \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad v_4 := \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \qquad v_5 := \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Nalezněte bázi podprostoru $\operatorname{span}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$.

18. Ukažte, že analogie Věty 2.36.(i) pro více podprostorů jak dva neplatí. Přesněji, najděte protipříklad pro následující tvrzení (viz Poznámka 2.37):

$$\begin{aligned}&\dim(\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \mathcal{U}_3)\\ &= \dim \mathcal{U}_1 + \dim \mathcal{U}_2 + \dim \mathcal{U}_3\\ &\quad - \dim(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) - \dim(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_3) - \dim(\mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3)\\ &\quad + \dim(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3)\,.\end{aligned}$$

[Například souřadnicové osy $\mathcal{U}_1 := \operatorname{span}\{e_1\}$, $\mathcal{U}_2 := \operatorname{span}\{e_2\}$, $\mathcal{U}_3 := \operatorname{span}\{e_3\}$ v $\mathbb{R}^3$.]

3 Lineární zobrazení

Doposud jsme se soustředili na vektorové prostory a jejich prvky. Na nich v podstatě není nic moc vzrušujícího. Zajímavá část lineární algebry začíná až s objekty, kterými se budeme zabývat právě nyní: lineárními zobrazeními (či transformacemi či operátory).

Připomeňme naše sjednocující značení $\mathbb{K}$ pro číselné těleso $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Připomeňme rovněž, že $\mathcal{V}$ značí libovolný konečně dimenzionální vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. V této kapitolce se budeme často setkávat ještě s jiným prostorem, který budeme obvykle značit $\mathcal{W}$, tedy:

$$\boxed{\mathcal{W} = \text{konečně dimenzionální vektorový prostor nad } \mathbb{K}.}$$

(V příkladech se setkáme i s prostory, jež nejsou nezbytně konečně dimenzionální.)

3.1 Definice a příklady

Definice 3.1. *Lineární zobrazení* z $\mathcal{V}$ do $\mathcal{W}$ je zobrazení $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ splňující tyto vlastnosti:

(1) $\forall u, v \in \mathcal{V}, \qquad T(u + v) = T(u) + T(v);$ (aditivita)

(2) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad v \in \mathcal{V}, \qquad T(\alpha v) = \alpha T(v).$ (homogenita)

Všimněte si, že v této definici používáme standardní funkcionální značení $T(v)$ pro funkční hodnotu zobrazení T v bodě v. Nadále budeme používat i zjednodušující značení Tv.

Lineární zobrazení se též alternativně nazývá *lineární transformace* nebo *lineární operátor*.

Množinu všech lineárních zobrazení z vektorového prostoru $\mathcal{V}$ do $\mathcal{W}$ budeme značit

$$\mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) .$$

Pokud $\mathcal{W} = \mathcal{V}$, budeme zkracovat $\mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V}) =: \mathscr{L}(\mathcal{V})$.

Podívejme se nyní na některé příklady lineárních zobrazení. Ověřte si, že všechny ty funkce definované níže jsou skutečně lineární zobrazení.

Příklad 3.2 (Nula)**.** K těm všem významům, které jsme přiřadili značení 0 (číslo nula, nulový vektor) nyní dodáme ještě další. Bude se jednat o *nulové zobrazení*, jež přiřadí libovolnému vektoru z prostoru $\mathcal{V}$ nulový vektor z prostoru $\mathcal{W}$:

$$0 : \mathcal{V} \to \mathcal{W} : \{v \mapsto 0\} .$$

Z kontextu by mělo být vždy zřejmé, o jaký z mnoha významů symbolu 0 se jedná. ♢

Příklad 3.3 (Identita)**.** *Identické zobrazení* vektorového prostoru $\mathcal{V}$ na $\mathcal{V}$ je lineární zobrazení I, jež přiřadí libovolnému vektoru ten samý vektor:

$$I : \mathcal{V} \to \mathcal{V} : \{v \mapsto v\} .$$

Všimněte si, že identické zobrazení definujeme pouze jako zobrazení z vektorového prostoru do toho samého prostoru. ♢

Příklad 3.4 (Derivace)**.** Na prostoru všech reálných polynomů definujme zobrazení

$$D : \mathcal{P} \to \mathcal{P} : \{p \mapsto p'\} .$$

Tvrzení, že se skutečně jedná o lineární zobrazení, je vlastně jen použití dobře známých výsledků z analýzy, že derivace součtu diferencovatelných funkcí (což polynomy jsou) je součet derivací a derivace diferencovatelné funkce přenásobené číslem je derivace funkce krát to číslo. ♢

Příklad 3.5 (Integrace)**.** Rovněž přeintegrování polynomu na prostoru všech reálných polynomů definuje lineární zobrazení:

$$T : \mathcal{P} \to \mathcal{P} : \left\{ p(x) \mapsto \int_0^x p(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R} \right\} .$$

Tvrzení, že takovéto zobrazení je skutečně lineární, je opět jen použití dobře známých výsledků z analýzy, že (Riemannův) integrál součtu dvou spojitých funkcí (což polynomy jsou) je součet integrálů a integrál spojité funkce přenásobené číslem je integrál funkce krát to číslo. ♢

Příklad 3.6 (Násobení polynomem)**.** Jako speciální případ uvažujme přenásobení kvadratickým monomem $p_2(x) := x^2$ (viz Příklad 2.7 pro značení monomů):

$$M_{p_2} : \mathcal{P} \to \mathcal{P} : \{p \mapsto p_2 p\} , \qquad \text{kde} \qquad (p_2 p)(x) := p_2(x)p(x) .$$

Dobře si rozmyslete, že zde se skutečně jedná o lineární zobrazení, i když kvadratická funkce $p_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \{x \mapsto x^2\}$ lineární samozřejmě není. ♢

Příklad 3.7 (Eukleidovské transformace)**.** Jako v úvodu, uvažujme transformaci mezi prostory $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^m$ (v případě $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se jedná o eukleidovské prostory) difinovanou předpisem

$$T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m : \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} =: \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}}_{y} \right\}, \tag{3.1}$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, jsou daná čísla. Lze snadno ověřit, že se jedná o lineární zobrazení. V případě eukleidovského prostoru ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) lze takovýmto způsobem například zapsat rotaci.

Pozor! Posunutí v eukleidovském prostoru *není* lineární zobrazení (kromě triviálního případu identity). To plyne z toho, že (obecněji) zobrazení přiřazující libovolnému vektoru fixní vektor:

$$B : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m : \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \right\}, \tag{3.2}$$

kde $\beta_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, m$, jsou daná čísla (nezávislá na souřadnicích vektoru v), *není* lineární (kromě triviálního případu $\beta_1 = \cdots = \beta_m = 0$). ♢

Příklad 3.8 (Zobrazení definované pomocí báze)**.** Nechť $(v_1, \dots, v_n)$ je báze vektorového prostoru $\mathcal{V}$ a nechť $(w_1, \dots, w_n)$ je libovolný soubor vektorů z prostoru $\mathcal{W}$. Potom zobrazení definované takovýmto způsobem

$$T : \mathcal{V} \to \mathcal{W} : \left\{ \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \ \mapsto \ \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n \right\} ,$$

kde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ jsou libovolná daná čísla, je lineární. Poněvadž $(v_1, \dots, v_n)$ je báze, libovolný vektor v z prostoru $\mathcal{V}$ lze zapsat ve tvaru $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, a tudíž T je dobře definované (na celém prostoru $\mathcal{V}$). Všimněte si, že čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ z rozkladu $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ (souřadnice vektoru v v bázi $(v_1, \dots, v_n)$) závisejí na volbě vektoru v. ♢

3.2 Operace se zobrazeními

Nyní definujeme dvě základní operace na množině lineárních zobrazení $\mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$.

Součet dvou zobrazení $S, T \in \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ definujeme (jak bývá zvykem) přes součet funkčních hodnot:

$$S + T : \mathcal{V} \to \mathcal{W} : \{v \mapsto Sv + Tv\} .$$

Měli byste si ověřit, že skutečně $S + T \in \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$.

Obdobně, *přenásobení* zobrazení $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ *číslem* $\alpha \in \mathbb{K}$ definujeme (jako obvykle) předpisem

$$\alpha T : \mathcal{V} \to \mathcal{W} : \{v \mapsto \alpha(Tv)\} .$$

Opět byste si měli ověřit, že $\alpha T \in \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$.

S takto definovanými operacemi (a s nulovým zobrazením definovaným v Příkladu 3.2) se lze lehce přesvědčit o pravdivosti následujícího tvrzení.

Tvrzení 3.9. *$\mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$.*

Obecně nemá smysl násobit prvky vektorového prostoru mezi sebou. Avšak pro jisté páry lineárních zobrazení smysluplné násobení existuje. K prostorům $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ uvažujme ještě nějaký třetí vektorový prostor $\mathcal{U}$ nad $\mathbb{K}$. Nechť $T \in \mathscr{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ a $S \in \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Pak definujeme *složené* zobrazení

$$ST : \mathcal{U} \to \mathcal{W} : \{v \mapsto S(Tv)\} .$$

(Někdy bývá zvykem psát $S \circ T$, avšak pro lineární zobrazení se kroužek obvykle vynechává.) Měli byste si ověřit, že skutečně $ST \in \mathscr{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$. Budeme též říkat, že složené zobrazení ST je *součin* zobrazení S a T.

Složené zobrazení splňuje většinu vlastností součinu.

Tvrzení 3.10. *Pro skládání lineárních zobrazení platí tyto vztahy:*

(i) $\boxed{(T_1 T_2) T_3 = T_1 (T_2 T_3),}$ *(asociativita)*
kde $T_1 \in \mathscr{L}(\mathcal{V}_3, \mathcal{V}_4)$, $T_2 \in \mathscr{L}(\mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3)$, $T_3 \in \mathscr{L}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ a $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3, \mathcal{V}_4$ jsou vektorové prostory.

(ii) $\boxed{TI = IT = T,}$ *(identita)*
kde $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, první I značí identitu na $\mathcal{V}$ a druhé I značí identitu na $\mathcal{W}$.

(iii) $\boxed{(S_1 + S_2) T = S_1 T + S_2 T}$ a $\boxed{S(T_1 + T_2) = ST_1 + ST_2,}$ *(distributivita)*
kde $T, T_1, T_2 \in \mathscr{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ a $S, S_1, S_2 \in \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$.

Avšak skládání zobrazení není komutativní! Před uvedením příkladů si definujme ještě jednu operaci na vektorovém prostoru lineárních zobrazení. *Komutátor* zobrazení $S, T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$ definujeme předpisem:

$$[S,T] : \mathcal{V} \to \mathcal{V} : \{v \mapsto (ST)v - (TS)v\}\,.$$

Přesvědčte se, že $[S,T] \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$.

Příklad 3.11 (Nilpotentní zobrazení)**.** Nejjednodušší příklad nekomutujících zobrazení lze uvést na $\mathbb{K}^2$:

$$T : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2 : \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$
$$S : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2 : \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Skutečně $TSx = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, zatímco $STx = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$. Zobrazení z tohoto příkladu se nazývají *nilpotentní* (t.j. mající nulovou sílu), poněvadž $S^2 := SS = 0$ a $T^2 := TT = 0$. Další příklady nekomutujících zobrazení lze zkonstruovat uvažováním Cvičení 3.7.5. ♢

Příklad 3.12 (Kvantový princip neurčitosti)**.** Nechť D je operátor derivace z Příkladu 3.4 a M_{p_1} operátor násobení lineární funkcí $p_1(x) = x$ (viz Příklad 3.6 pro analogický operátor násobení kvadratickou funkcí). Pak

$$\big((M_{p_1}D)p\big)(x) = xp'(x)\,, \qquad \text{avšak} \qquad \big((DM_{p_1})p\big)(x) = xp'(x) + p(x)\,,$$

kde $p \in \mathcal{P}$ a $x \in \mathbb{R}$ jsou libovolné. Tedy

$$([M_{p_1}, D]p)(x) = -1\,,$$

což není rovno nule coby rovnost na prostoru polynomů $\mathcal{P}$.

To, že tento komutátor je nenulový, je jádrem kvantové mechaniky. Zde operátor M_{p_1} reprezentuje polohu elektronu na přímce, zatímco $-iD$ reprezentuje hybnost elektronu. Důsledkem nenulovosti komutátoru je například Heisenbergův princip neurčitosti, který říká, že nelze s libovolnou přesností měřit současně polohu i hybnost kvantové částice. ♢

3.3 Jádro a injektivita

Podívejme se na důležitou podmnožinu výchozího prostoru lineárního zobrazení.

Definice 3.13. *Jádro* lineárního zobrazení $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ je podmnožina výchozího prostoru definovaná předpisem

$$\ker T := \{v \in \mathcal{V} : \; Tv = 0\}\,.$$

Používáme značení “ker”, jež pochází z anglického “kernel”. Jiní autoři používají “$\mathsf{N}(\cdot)$” z anglického “null space”.

Začněme s několika základními příklady.

Příklad 3.14. Pro nulové zobrazení $0 : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ z Příkladu 3.2 zřejmě máme

$$\ker 0 = \mathcal{V}\,.$$

$\diamondsuit$

Příklad 3.15. Pro identické zobrazení $I : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ z Příkladu 3.2 zřejmě máme

$$\ker I = \{0\} .$$

$\diamondsuit$

Příklad 3.16. Nechť D je operátor derivace na prostoru všech reálných polynomů $\mathcal{P}$ z Příkladu 3.4. Poněvadž jediné funkce, pro něž je derivace identicky rovna nule, jsou konstantní funkce, máme

$$\ker D = \{p \in \mathcal{P} : \ \exists \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) = \alpha\} . \qquad \text{(konstantní polynomy)}$$

$\diamondsuit$

Příklad 3.17. Nechť M_{p_2} operátor násobení kvadratickou funkcí na prostoru všech reálných polynomů $\mathcal{P}$ z Příkladu 3.6. Poněvadž jediný polynom p, pro nějž platí $x^2 p(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, je nulový polynom, máme

$$\ker M_{p_2} = \{0\} .$$

$\diamondsuit$

Následující tvrzení nám říká, že jádro zobrazení je podprostor výchozího prostoru. Speciálně to znamená, že nulový vektor je v jádru libovolného lineárního zobrazení.

Tvrzení 3.18. *Nechť $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Potom platí*

$$\ker T \subset\subset \mathcal{V} .$$

Důkaz. Použijeme Větu 1.12.

$\boxed{\textit{ad} \text{ (i)}}$ Díky aditivní vlastnosti lineárního zobrazení platí

$$T(0) = T(0+0) = T(0) + T(0) ,$$

z čehož plyne $T(0) = 0$. Tedy $0 \in \ker T$ (jádro obsahuje počátek).

$\boxed{\textit{ad} \text{ (ii)}}$ Pro libovolné vektory $u, v \in \ker T$ platí

$$T(u+v) = Tu + Tv = 0 + 0 = 0 ,$$

a tedy $u + v \in \ker T$ (jádro je uzavřené vůči sčítání).

$\boxed{\textit{ad} \text{ (iii)}}$ Pro libovolný vektor $u \in \ker T$ a číslo $\alpha \in \mathbb{K}$ platí

$$T(\alpha u) = \alpha T u = \alpha 0 = 0 ,$$

a tedy $\alpha u \in \ker T$ (jádro je uzavřené vůči násobení číslem). $\square$

Připomeňme, že (libovolné, ne nezbytně lineární) zobrazení se nazývá injektivní, pokud přiřazuje různým vzorům různé obrazy. Tento pojem přijmeme i pro lineární zobrazení.

Definice 3.19. Lineární zobrazení $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ je *injektivní*, pokud

$$\forall u, v \in \mathcal{V}, \qquad Tu = Tv \quad \Longrightarrow \quad u = v\,.$$

Alternativní terminologie je *prosté* zobrazení nebo *injekce* (v angličtině též *one-to-one*).

Příklad 3.20. Přímo z definice je zřejmé, že identické zobrazení z Příkladu 3.3 je injektivní, zatímco nulové zobrazení z Příkladu 3.2 injektivní není. $\diamondsuit$

U složitějších příkladů může být ověřování podle definice pracnější. Proto je následující tvrzení pozoruhodné: Říká nám, že k ověření injektivity lineárního zobrazení se stačí podívat na jádro zobrazení (zda nula je jediný vektor, jenž je mapován na nulu).

Tvrzení 3.21. *Nechť $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Potom platí tato ekvivalence*

$$T \text{ je injektivní} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ker T = \{0\}\,.$$

Důkaz. Jako obvykle dokážeme ekvivalenci jako platnost dvou implikací.

$\boxed{\Rightarrow}$ Předpokládejme, že T je injektivní. Z Tvrzení 3.18 už víme, že $\{0\} \subset \ker T$. Abychom dokázali opačnou inkluzi, vezměme libovolný vektor $v \in \ker T$. Pak platí

$$T(v) = 0 = T(0)\,.$$

Jelikož T je injektivní, tyto rovnosti implikují $v = 0$. Tedy $\ker T = \{0\}$, což jsme chtěli dokázat.

$\boxed{\Leftarrow}$ Nyní předpokládejme $\ker T = \{0\}$. Chceme dokázat, že T je injektivní. Za tímto účelem vezměme dva vektory $u, v \in \mathcal{V}$ a položme $Tu = Tv$. Pak

$$0 = Tu - Tv = T(u - v)\,.$$

Tedy $u - v \in \ker T$. Poněvadž $\ker T = \{0\}$, máme $u - v = 0$, z čehož plyne $u = v$. Tedy T je injektivní, což jsme chtěli dokázat. $\square$

Příklad 3.22. Užitím Tvrzení 3.21 a Příkladů 3.16 a 3.17 okamžitě vidíme, že operátor násobení M_{p_2} je injektivní, zatímco operátor derivace D injektivní není. $\diamondsuit$

Příklad 3.23. Všimněte si dobře, že platnost Tvrzení 3.21 je velice závislé na tom, že uvažujeme *lineární* zobrazení. Například lineární zobrazení (jež si můžeme geometricky znázornit jako přímku v rovině)

$$T_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \{x \mapsto \alpha x\}\,, \qquad \alpha \in \mathbb{R}\,,$$

je skutečně injektivní tehdy a jen tehdy, pokud $\ker T_\alpha = \{0\}$, čemuž odpovídají všechna $\alpha \neq 0$ (naopak pro $\alpha = 0$ máme $\ker T_0 = \mathbb{R}$, jelikož $T_0 = 0$ je nulové zobrazení). Avšak nelineární zobrazení (kvadratická funkce, již si můžeme znázornit jako parabolu)

$$f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \{x \mapsto \alpha x^2\}, \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

není injektivní pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, i když (pokud rozšíříme Definici 3.13 i na obecné funkce) $\ker f_\alpha = \{0\}$ (pro $\alpha = 0$ máme $\ker f_0 = \mathbb{R}$, jelikož $f_0 = 0$ je opět nulové zobrazení). ♢

3.4 Obor hodnot a surjektivita

Nyní se podívejme se na důležitou podmnožinu cílového prostoru lineárního zobrazení.

Definice 3.24. *Obor hodnot* lineárního zobrazení $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ je podmnožina cílového prostoru definovaná předpisem

$$\operatorname{ran} T := \{Tv \in \mathcal{W} : \ v \in \mathcal{V}\}.$$

Používáme značení "ran", jež pochází z anglického "range". Jiní autoři používají "$\mathsf{R}(\cdot)$" nebo též ("im" z anglického "image").

Opět začněme s několika základními příklady.

Příklad 3.25. Pro nulové zobrazení $0 : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ z Příkladu 3.2 zřejmě máme

$$\operatorname{ran} 0 = \{0\}.$$

♢

Příklad 3.26. Pro identické zobrazení $I : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ z Příkladu 3.2 zřejmě máme

$$\operatorname{ran} I = \mathcal{V}.$$

♢

Příklad 3.27. Nechť D je operátor derivace na prostoru všech reálných polynomů $\mathcal{P}$ z Příkladu 3.4. Potom zřejmě máme

$$\operatorname{ran} D = \mathcal{P},$$

poněvadž pro každý polynom $q \in \mathcal{P}$ existuje polynom $p \in \mathcal{P}$ takový, že $p' = q$. ♢

Příklad 3.28. Nechť M_{p_2} operátor násobení kvadratickou funkcí na prostoru všech reálných polynomů $\mathcal{P}$ z Příkladu 3.6. Potom zřejmě máme

$$\operatorname{ran} M_{p_2} = \left\{x \mapsto \alpha_0 x^2 + \alpha_1 x^3 + \cdots : \ \alpha_0, \alpha_2, \dots \in \mathbb{K}\right\} \neq \mathcal{P},$$

protože obor hodnot M_{p_2} postrádá konstantní polynomy a polynomy prvního stupně. ♢

Pro studenta už nebude překvapením následující tvrzení, které říká, že obor hodnot zobrazení je podprostor cílového prostoru. Speciálně to tedy opět znamená, že nulový vektor je v oboru hodnot libovolného lineárního zobrazení.

Tvrzení 3.29. *Nechť* $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. *Potom platí*

$$\operatorname{ran} T \subset\subset \mathcal{W}\,.$$

Důkaz. Použijeme Větu 1.12.

$\boxed{ad\ \text{(i)}}$ Z Tvrzení 3.18 plyne $T(0) = 0$, tedy $0 \in \operatorname{ran} T$ (obor hodnot obsahuje počátek).

$\boxed{ad\ \text{(ii)}}$ Vlastnost $w_1, w_2 \in \operatorname{ran} T$ znamená, že existují vektory $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ takové, že $Tv_1 = w_1$ a $Tv_2 = w_2$. Tedy

$$T(v_1 + v_2) = Tv_1 + Tv_2 = w_1 + w_2\,,$$

což znamená, že $w_1 + w_2 \in \operatorname{ran} T$ (obor hodnot je uzavřený vůči sčítání).

$\boxed{ad\ \text{(iii)}}$ Vlastnost $w \in \operatorname{ran} T$ znamená, že existuje vektor $v \in \mathcal{V}$ takový, že $Tv = w$. Pro libovolné číslo $\alpha \in \mathbb{K}$ můžeme psát

$$T(\alpha v) = \alpha T v = \alpha w\,,$$

a tedy $\alpha w \in \operatorname{ran} T$ (obor hodnot je uzavřený vůči násobení číslem). □

Připomeňme, že (libovolné) zobrazení se nazývá surjektivní, pokud zobrazuje *na* celou cílovou množinu. Každý prvek cílové množiny má tedy alespoň jeden vzor. Tento pojem přijmeme i pro lineární zobrazení.

Definice 3.30. Lineární zobrazení $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ je *surjektivní*, pokud

$$\operatorname{ran} T = \mathcal{W}\,.$$

Alternativní terminologie je zobrazení *na* nebo *surjekce* (v angličtině též *onto*).

Příklad 3.31. Z Příkladů 3.27 a 3.28 okamžitě vidíme, že operátor derivace D na prostoru všech reálných polynomů $\mathcal{P}$ je surjektivní, zatímco operátor násobení kvadratickým monomem M_{p_2} na stejném prostoru surjektivní není. ♢

Příklad 3.32. Je důležité si uvědomit, že surjektivita závisí na volbě cílového prostoru. V předchozím příkladu jsme si řekli, že $D \in \mathscr{L}(\mathcal{P}, \mathcal{P})$ je surjektivní. Avšak $D \in \mathscr{L}(\mathcal{P}_m, \mathcal{P}_m)$ s $m \in \mathbb{N}^*$ surjektivní není, jelikož derivováním se nám vytratí polynom x^m z oboru hodnot. To zachráníme volbou nového cílového prostoru: operátor $D \in \mathscr{L}(\mathcal{P}_m, \mathcal{P}_{m-1})$ je surjektivní, jelikož zderivováním polynomu nejvýše řádu m dostaneme právě polynom nejvýše řádu $m - 1$. ♢

Následující tvrzení dává odpověď na otázku, jak vypadají všechna řešení operátorové rovnice $Tv = w$. Zde je předpoklad, že $w \in \operatorname{ran} T$ naprosto kruciální, jinak je samořejmě hledaná množina řešení prázdná.

Tvrzení 3.33. *Nechť* $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ *a* $w \in \operatorname{ran} T$. *Potom*

$$\{v \in \mathcal{V} : \; Tv = w\} = \{u\} + \ker T \,,$$

kde $Tu = w$.

Důkaz. Platí následující ekvivalence:

$$Tv = w \iff Tv = Tu \iff T(v-u) = 0 \iff v - u \in \ker T \iff v \in \{u\} + \ker T \,,$$

kde poslední ekvivalence využívá definici součtu množin (Definice 1.17). □

Vektor u z Tvrzení 3.33 se nazývá *partikulární řešení* rovnice $Tv = w$. Jak ostatně samo tvrzení napovídá, takovýchto partikulárních řešení může existovat mnoho. Prakticky se postupuje tak, že se najdou všechna řešení homogenní rovnice $Tv = 0$ (ta určují jádro zobrazení T) a uhádne jedno (libovolné) partikulární řešení.

Příklad 3.34. Užijme Tvrzení 3.33 pro řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \,, \\ x + y - z &= 3 \,, \end{aligned}$$

kde $x, y, z \in \mathbb{R}$. Tuto soustavu lze přepsat operátorově $Tv = w$ s tímto značením

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y + z \\ x + y - z \end{pmatrix} \right\}, \qquad v := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad w := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Snadno nalezneme

$$\ker T = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a rovněž i partikulární řešení rovnice $Tu = w$, například

$$u_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{nebo} \qquad u_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Užitím prvního partikulárního řešení tudíž máme

$$\{v \in \mathbb{R}^3 : \; Tv = w\} = \{u_1\} + \ker T = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Všechna řešení počáteční soustavy lze tedy psát ve tvaru

$$x = 2 \,, \qquad y = 1 + t \,, \qquad z = t \,,$$

kde $t \in \mathbb{R}$ je volný parametr. ♢

3.5 Dimenze prostorů a bijektivita

Následující věta se někdy považuje za fundamentální výsledek v teorii lineárních zobrazeních. Pro její platnost je důležité, že předpokládáme, že naše vektorové prostory jsou konečně dimenzionální.

Věta 3.35 (Fundamentální). *Nechť $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Potom platí*

$$\dim \mathcal{V} = \dim \ker T + \dim \operatorname{ran} T\,.$$

Důkaz. Nechť $(u_1, \ldots, u_m)$ je báze $\ker T$; tedy $\dim \ker T = m$. Poněvadž vektory $u_1, \ldots, u_m$ jsou lineárně nezávislé, můžeme je rozšířit o vektory $w_1, \ldots, w_n \in \mathcal{V}$ na bázi prostoru $\mathcal{V}$ (Tvrzení 2.28); tedy $(u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n)$ je báze prostoru $\mathcal{V}$ a $\dim \mathcal{V} = m + n$. K dokončení důkazu potřebujeme pouze ukázat, že $\dim \operatorname{ran} T = n$. Toho docílíme tak, že ukážeme, že vektory $Tw_1, \ldots, Tw_n$ tvoří bázi $\operatorname{ran} T$.

$\boxed{\bullet\ \operatorname{span}(Tw_1, \ldots, Tw_n) = \operatorname{ran} T}$ Nechť $v \in \mathcal{V}$. Poněvadž $u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n$ generují $\mathcal{V}$, můžeme psát

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n\,,$$

kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$. Pustíme-li T na obě strany této rovnice, dostaneme

$$Tv = \beta_1 Tw_1 + \cdots + \beta_n Tw_n\,,$$

protože členy obsahující $u_1, \ldots, u_m \in \ker T$ vymizí. Poslední rovnost ukazuje, že vektory $Tw_1, \ldots, Tw_n$ generují $\operatorname{ran} T$.

$\boxed{\bullet\ \text{lineární nezávislost } Tw_1, \ldots, Tw_n}$ Zbývá ukázat, že tyto vektory jsou lineárně nezávislé. Za tímto účelem předpokládejme rovnost

$$\gamma_1 Tw_1 + \cdots + \gamma_n Tw_n = 0\,,$$

kde $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{K}$. Pak ovšem

$$T(\gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_n w_n) = 0\,,$$

a tudíž

$$\gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_n w_n \in \ker T\,.$$

Poněvadž $u_1, \ldots, u_m$ generují $\ker T$, můžeme psát

$$\gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_n w_n = \delta_1 u_1 + \cdots + \delta_m u_m$$

s nějakými čísly $\delta_1, \ldots, \delta_m \in \mathbb{K}$. Z této rovnice plyne, že všechna čísla γ a δ jsou rovna nule, protože $u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n$ jsou lineárně nezávislé. Tedy $Tw_1, \ldots, Tw_n$ jsou lineárně nezávislé, což zbývalo ukázat pro důkaz, že tyto vektory tvoří bázi $\operatorname{ran} T$. $\square$

Někdy se zavádí tato označení:

$$\begin{aligned} \operatorname{rank} T &:= \dim \operatorname{ran} T\,, \\ \operatorname{null} T &:= \dim \ker T\,, \end{aligned} \tag{3.3}$$

a $\operatorname{rank} T$ se nazývá *hodnost* zobrazení T. Pak lze Větu 3.35 formulovat jako

$$\dim \mathcal{V} = \operatorname{rank} T + \operatorname{null} T\,.$$

Z tohoto důvodu se Větě 3.35 v angličtině někdy říká "rank-null theorem".

Věta 3.35 má dva důležité důsledky. První nám říká, že žádné lineární zobrazení z vektorového prostoru do "menšího" vektorového prostoru nemůže být injektivní, přičemž "menší" je měřeno dimenzí.

Důsledek 3.36. $\forall T \in \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$,

$$\dim \mathcal{V} > \dim \mathcal{W} \qquad \Longrightarrow \qquad T \textit{ není injektivní}.$$

Důkaz. Máme

$$\begin{aligned}\dim \ker T &= \dim \mathcal{V} - \dim \operatorname{ran} T \\ &\geq \dim \mathcal{V} - \dim \mathcal{W} \\ &> 0\,,\end{aligned}$$

kde rovnost platí díky Větě 3.35. Jelikož $\dim \ker T > 0$, jádro zobrazení T musí obsahovat jiné vektory kromě 0, a tedy T nemůže být injektivní díky Tvrzení 3.21. □

Druhý důsledek je v jistém smyslu duální k tomu předchozímu. Říká nám, že žádné lineární zobrazení z vektorového prostoru do "většího" vektorového prostoru nemůže být surjektivní, přičemž "větší" je opět měřeno dimenzí.

Důsledek 3.37. $\forall T \in \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$,

$$\dim \mathcal{V} < \dim \mathcal{W} \qquad \Longrightarrow \qquad T \textit{ není surjektivní}.$$

Důkaz. Máme

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{ran} T &= \dim \mathcal{V} - \dim \ker T \\ &\leq \dim \mathcal{V} \\ &< \dim \mathcal{W}\,,\end{aligned}$$

kde rovnost platí díky Větě 3.35. Jelikož $\dim \operatorname{ran} T < \dim \mathcal{W}$, obor hodnot T se nemůže rovnat prostoru $\mathcal{W}$, a tedy T nemůže být surjektivní. □

Důsledky 3.36 a 3.37 nám tedy poskytují nutné podmínky proto, aby lineární zobrazení bylo injektivní nebo surjektivní. Připomeňme ještě jeden pojem z teorie zobrazeních (ne nezbytně lineárních).

Definice 3.38. Lineární zobrazení $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ je *bijektivní*, pokud

$$T \text{ je injektivní a surjektivní.}$$

Následující tvrzení je skutečně zcela přímým důsledkem této definice a Důsledků 3.36 a 3.37.

Důsledek 3.39. $\forall T \in \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$,

$$T \text{ je bijektivní} \qquad \Longrightarrow \qquad \dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}\,.$$

Důsledky výše mají důležitou aplikaci při řešení operátorových rovnic.

Příklad 3.40 (Soustavy lineárních algebraických rovnic)**.** Nechť $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ s $n, m \in \mathbb{N}^*$ je lineární zobrazení definované v Příkladu 3.7 pro libovolná čísla $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Operátorová rovnice $Tx = 0$ je ekvivalentní soustavě *homogenních* rovnic (homogenní zde znamená, že pravé strany jsou rovny nule)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0\,, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Představujeme si, že čísla a jsou zadaná a hledáme proměnné $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ splňující tuto soustavu. Máme tedy m rovnic o n neznámých. Triviální volba $x_1 = \cdots = x_n = 0$ samozřejmě soustavu (3.4) řeší; klíčovou otázkou je, zda existují jiná, tzv. *netriviální* řešení. Jinými slovy se ptáme po tom, zda $\ker T$ je striktně větší než $\{0\}$. Podle Tvrzení 3.21 k tomu dojde právě tehdy, když T není injektivní. Díky Důsledku 3.36 víme, že T není injektivní, pokud $n > m$. Závěr: Soustava homogenních rovnic, v níž je více neznámých než rovnic, musí mít netriviální řešení:

$$\boxed{\text{počet neznámých} > \text{počet rovnic} \quad \Longrightarrow \quad \exists \text{ netriviální řešení homogenní soustavy rovnic.}}$$

Podívejme se nyní na obecnější operátorovou rovnici $Tx = y$, kde $y \in \mathbb{K}^m$ je vektor o složkách $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{K}$. Ta je ekvivalentní soustavě rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1\,, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= y_m\,, \end{aligned} \tag{3.5}$$

kde opět uvažujeme, že čísla a jsou zadaná. Ptáme se, zda existuje alespoň jedno řešení $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ splňující tuto soustavu, a to při libovolné volbě konstant $y_1, \dots, y_m$. Jinými slovy, chceme vědět, zda $\operatorname{ran} T = \mathbb{K}^m$. Díky Důsledku 3.37 víme, že T není surjektivní, pokud $n < m$. Závěr: Soustava nehomogenních rovnic, v níž je více rovnic než neznámých, nemá řešení pro určitou volbu konstant $y_1, \dots, y_m$:

$$\boxed{\text{počet neznámých} < \text{počet rovnic} \quad \Longrightarrow \quad \exists y, \text{ pro něž nehomogenní soustava rovnic není řešitelná.}}$$

Takovéto výsledky o řešení soustav lineárních algebraických rovnic se obvykle dokazují pomocí Gaussovy eliminační metody. Abstraktní přístup, který zde přejímáme, má tu výhodu, že vede k mnohem elegantnějším důkazům a lze ho použít i na jiné problémy. $\diamondsuit$

3.6 Invertibilita

Definice 3.41. Lineární zobrazení $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ je *invertibilní*, pokud existuje lineární zobrazení $S : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ takové, že

$$ST = I \qquad \text{a} \qquad TS = I\,.$$

(V první rovnosti značí I identický operátor na $\mathcal{V}$ a v druhé rovnosti značí I identický operátor na $\mathcal{W}$.) Zobrazení S vystupující v této definici budeme nazývat *inverzním* zobrazením (či jednoduše *inverzí*) zobrazení T. Invertibilní zobrazení se též nazývá *regulární* a zobrazení, jež není invertibilní, ze nazývá *singulární*.

Tvrzení 3.42. *Pokud je $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ invertibilní, pak má právě jednu inverzi.*

Důkaz. Nechť S a S' jsou dvě inverze zobrazení T. Pak

$$S = SI = S(TS') = (ST)S' = IS' = S' ,$$

tedy nezbytně $S = S'$. □

Poněvadž je inverze invertibilního zobrazení T určena jednoznačně, můžeme si ho označit jednotným symbolem T^{-1}.

Následující tvrzení charakterizuje invertibilní zobrazení.

Věta 3.43. *Nechť $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Potom platí tato ekvivalence:*

$$T \text{ je invertibilní} \qquad \Longleftrightarrow \qquad T \text{ je bijektivní.}$$

Důkaz. Jako obvykle dokážeme ekvivalenci jako platnost dvou implikací.

$\boxed{\Rightarrow}$ Připomeňme, že bijektivita znamená, že T je injektivní a surjektivní. Abychom ukázali, že T je injektivní, vezměme dva libovolné vektory $u, v \in \mathcal{V}$ a položme $Tu = Tv$. Potom

$$u = T^{-1}(Tu) = T^{-1}(Tv) = v ,$$

z čehož plyne, že $u = v$, a tedy T je injektivní.

Abychom ukázali, že T je surjektivní, vezměme libovolný vektor $w \in \mathcal{W}$. Potom

$$w = T(T^{-1}w) ,$$

z čehož plyne, že w je v obrazu hodnot zobrazení T (jeho vzor je $T^{-1}w$). Tedy $\operatorname{ran} T = \mathcal{W}$, a T je surjektivní.

$\boxed{\Leftarrow}$ Pro všechny vektory $w \in \mathcal{W}$ definujme $Sw \in \mathcal{V}$ coby jednoznačně určený prvek prostoru $\mathcal{V}$ splňující

$$T(Sw) = w .$$

(Existence a jednoznačnost takovéhoto prvky plynou z bijektivity.) Z definice rovnou plyne, že $TS = I$, kde I je identita na $\mathcal{W}$.

Abychom ukázali, že $ST = I$, kde I je identita na $\mathcal{V}$, vezměme libovolný vektor $v \in \mathcal{V}$ a pišme

$$T(STv) = (TS)(Tv) = I(Tv) = Tv .$$

Z této rovnosti plyne, že $STv = Tv$ (poněvadž T je injektivní), a tedy skutečně $ST = I$, kde I je identita na $\mathcal{V}$.

Zbývá ukázat, že S je lineární. Nechť $w_1, w_2 \in \mathcal{W}$. Potom

$$T(Sw_1 + Sw_2) = T(Sw_1) + T(Sw_2) = w_1 + w_2 .$$

Tedy $Sw_1 + Sw_2 \in \mathcal{V}$ je jednoznačně určený prvek prostoru $\mathcal{V}$ takový, že je zobrazen zobrazením T na prvek $w_1 + w_2 \in \mathcal{W}$. Z definice S pak plyne, že $S(w_1 + w_2) = Sw_1 + Sw_2$, a tedy S splňuje aditivní vlastnost nutnou pro lineárnost zobrazení.

Důkaz homogenity je podobný. Nechť $w \in \mathcal{W}$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Potom

$$T(\alpha Sw) = \alpha T(Sw) = \alpha w .$$

Tedy $\alpha Sw \in \mathcal{V}$ je jednoznačně určený prvek prostoru $\mathcal{V}$ takový, že je zobrazen zobrazením T na prvek $\alpha w \in \mathcal{W}$. Z definice S pak plyne, že $S(\alpha w) = \alpha Sw$, což je homogenita lineárního zobrazení. □

Následující tvrzení ukazuje, že situace se nadále zjednodušuje pro lineární zobrazení z vektorového prostoru na ten samý prostor.

Věta 3.44. *Nechť $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$. Potom platí tyto ekvivalence:*

$$\underset{T \text{ je invertibilní}}{\text{(i)}} \iff \underset{T \text{ je injektivní}}{\text{(ii)}} \iff \underset{T \text{ je surjektivní.}}{\text{(iii)}}$$

Důkaz. Stačí ukázat sérii tří implikací (i) ⇒ (ii), (ii) ⇒ (iii) a (iii) ⇒ (i).

$\boxed{\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)}}$ Tato implikace plyne rovnou z předchozí Věty 3.43 (rovněž (i) ⇒ (iii)).

$\boxed{\text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)}}$ Podle Tvrzení 3.21 je injektivita T ekvivalentní vlastnosti $\ker T = \{0\}$. Z Věty 3.35 pak dostáváme

$$\dim \operatorname{ran} T = \dim \mathcal{V} - \dim \ker T = \dim \mathcal{V} .$$

Poněvadž $\operatorname{ran} T$ je zároveň podprostorem $\mathcal{V}$, tato rovnost dává $\operatorname{ran} T = \mathcal{V}$, a tedy T je surjektivní.

$\boxed{\text{(iii)} \Rightarrow \text{(i)}}$ Podle definice surjektivity máme $\operatorname{ran} T = \mathcal{V}$. Z Věty 3.35 dostáváme

$$\dim \ker T = \dim \mathcal{V} - \dim \operatorname{ran} T = 0 ,$$

z čehož plyne $\ker T = \{0\}$, a tedy T je injektivní (podle Tvrzení 3.21). Poněvadž T je bijektivní, invertibilita T plyne z Věty 3.43. □

Příklad 3.45. V předchozí větě je naprosto fundamentální, že uvažujeme konečně dimenzionální vektorové prostory. Například operátor násobení kvadratickým monomem M_{p_2} na prostoru všech polynomů $\mathcal{P}$ je injektivní, ale není surjektivní. Naopak operátor derivace na tom samém prostoru je surjektivní, ale není injektivní. ♢

Příklad 3.46 (Soustavy lineárních algebraických rovnic, počet rovnic=počet neznámých)**.** Podívejme se nyní na speciální případ soustav lineárních algebraických rovnic z Příkladu 3.40, kdy $m = n$, tedy počet rovnic (m) se rovná počtu neznámých (n). Uvažujme tedy operátorovou rovnici

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \,, \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= y_n \,,
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

a odpovídající homogenní rovnici (bez pravé strany)

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \,, \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= 0 \,.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Představujeme si, že čísla $a_{jk} \in \mathbb{K}$ a $y_j \in \mathbb{K}$ s $j, k = 1, \dots, n$ jsou zadaná a hledáme proměnné $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ splňující tyto soustavy. Z Věty 3.44 okamžitě dostáváme následující ekvivalenci:

$$\boxed{\forall y \text{ soustava (3.6) má řešení} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{homogenní soustava rovnic (3.7) má pouze triviální řešení.}}$$

Skutečně, injektivita a surjektivita jsou v případě stejného počtu rovnic a neznámých ekvivalentní vlastnosti. Rovněž vidíme, že v takovémto případě má soustava (3.6) řešení právě jedno.

Naopak, homogenní soustava rovnic (3.7) má netriviální řešení tehdy a jen tehdy, pokud rovnice (3.6) nemá řešení pro každé y (přesněji, existuje y, pro které (3.6) není řešitelná). $\diamondsuit$

3.7 Cvičení

1. Dejte příklad funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall v \in \mathbb{R}^2,\ \alpha \in \mathbb{R}, \qquad f(\alpha v) = \alpha f(v)\,,$$

avšak f není lineární. (Tedy homogenita nestačí pro lineárnost zobrazení.)

[Například $f(v) := \sqrt[3]{x_1^3 + x_2^3}$ pro $v = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$.]

2. Dejte příklad funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ takové, že

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^2, \qquad f(u+v) = f(u) + f(v)\,,$$

avšak f není lineární. (Tedy aditivita nestačí pro lineárnost zobrazení.)

[Například $f(u) := \operatorname{Re} u$.]

3. Které z následujících funkcí (ne)jsou lineární zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, a proč (ne)?

(a) $f\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)\right) := \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$;

(b) $f\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)\right) := \left(\begin{smallmatrix} -x_1+3x_2 \\ x_1+2x_2 \end{smallmatrix}\right)$;

(c) $f\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)\right) := \left(\begin{smallmatrix} -x_1+3x_2 \\ x_1+2x_2-1 \end{smallmatrix}\right)$;

(d) $f\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)\right) := 3\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$;

(e) $f\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)\right) := \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{smallmatrix}\right)$.

(f) $f\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)\right) := \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ -ix_2 \end{smallmatrix}\right)$.

Interpretujte geometricky.

(a), (b), (d), (e) jsou lineární, ostatní nejsou.]

4. Ukažte, že zobrazení definované předpisem

$$T_\varphi : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2 : \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi\, x_1 - \sin\varphi\, x_2 \\ \sin\varphi\, x_1 + \cos\varphi\, x_2 \end{pmatrix} \right\}$$

je injektivní pro každou hodnotu parametru $\varphi \in \mathbb{R}$. Interpretujte geometricky pro $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

[*Hint:* Spočtěte jádro a použijte Tvrzení 3.21.]

5. Nechť

$$T : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2 : \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} \right\},$$

$$S : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2 : \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \end{pmatrix} \right\},$$

kde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} \in \mathbb{K}$. Spočtěte komutátor $[S, T]$.

6. Ukažte, že platí následující implikace:

$$(T \in \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \text{ je injektivní } \wedge\ v_1, \dots, v_m \in \mathcal{V} \text{ jsou lineárně nezávislé ve } \mathcal{V}) \\ \implies \quad Tv_1, \dots, Tv_m \text{ jsou lineárně nezávislé ve } \mathcal{W}.$$

[*Hint:* Užijte Tvrzení 3.21.]

7. Ukažte, že platí následující implikace:

$$(T \in \mathscr{L}(\mathcal{V},\mathcal{W}) \text{ je surjektivní } \wedge \text{ span}(v_1,\dots,v_m) = \mathcal{V}) \\ \implies \text{span}(Tv_1,\dots,Tv_m) = \mathcal{W}.$$

8. Ukažte, že pokud existuje lineární zobrazení $T : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^2$ takové, že

$$\ker T = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4 : \ x_1 = 5x_2 \ \wedge \ x_3 = 7x_4 \right\},$$

potom T je surjektivní.

[*Hint:* Ukažte, že $\dim\ker T = 2$ a použijte Větu 3.35.]

9. Ukažte, že neexistuje lineární zobrazení $T : \mathbb{K}^5 \to \mathbb{K}^2$, jehož jádro je rovno

$$\ker T = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^5 : \ x_1 = 3x_2 \ \wedge \ x_3 = x_4 = x_5 \right\}.$$

[*Hint:* Ukažte, že $\dim\ker T = 2$ a použijte Větu 3.35.]

10. Nechť

$$T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2 : \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1+2x_2 \\ -x_1-2x_2+ix_3 \end{pmatrix} \right\}.$$

   (a) Dokažte, že T je lineární.
   (b) Najděte $\ker T$, bázi $\ker T$ a $\dim\ker T$.
   (c) Najděte $\operatorname{ran} T$, bázi $\operatorname{ran} T$ a $\dim\operatorname{ran} T$.
   (d) Rozhodněte, zda je T injektivní, surjektivní, bijektivní, invertibilní.

4 Metrika

V předchozích kapitolkách jsme úspěšně zobecnili pojmy, které dobře znáte z eukleidovských prostorů $\mathbb{R}^n$ (sčítání vektorů mezi sebou, jejich násobení čísly a transformace mezi vektory), na abstraktní vektorové prostory. Doposud jsme však ignorovali pojmy jako *délka* vektorů a *úhly* mezi nimi. Tyto pojmy se zavádějí pro vektorové prostory, v nichž existuje navíc jedna speciální operace: skalární součin. Pomocí této operace můžeme vektorový prostor obohatit na metrický prostor a definovat v něm metriku vhodnou pro tato měření.

4.1 Skalární součin

Definice 4.1. *Skalární součin* na $\mathcal{V}$ je funkce $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathbb{K} : \{(u,v)\mapsto\langle u,v\rangle\}$ splňující následující axiomy:

(1) $\forall v\in\mathcal{V}, \quad \langle v,v\rangle\geq 0;$ (pozitivita)

(2) $\forall v\in\mathcal{V}, \quad \langle v,v\rangle = 0 \iff v=0;$ (definitivita)

(3) $\forall u,v,w\in\mathcal{V}, \quad \langle u,v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle;$ (aditivita ve druhé složce)

(4) $\forall u,v\in\mathcal{V},\ \alpha\in\mathbb{K}, \quad \langle u,\alpha v\rangle = \alpha\langle u,v\rangle;$ (homogenita ve druhé složce)

(5) $\forall u,v\in\mathcal{V}, \quad \langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}.$ (symetrie)

Číslo $\langle u,v\rangle$ nazýváme *skalární součin* vektorů u a v. *Vektorový prostor se skalárním součinem* je vektorový prostor $\mathcal{V}$ uvažován společně s nějakým skalárním součinem na $\mathcal{V}$.

Jiní autoři namísto (4) předpokládají homogenitu v první složce, avšak naše konvence je výhodná pro formalismus kvantové mechaniky. Všimněte si, že (s naší definicí) pro každé dané $u\in\mathcal{V}$ nám předpis $v\mapsto\langle u,v\rangle$ definuje lineární zobrazení na $\mathcal{V}$. Díky symetriii je rovněž zobrazení $u\mapsto\langle u,v\rangle$ aditivní, avšak ne nezbytně homogenní (poněvadž je ve skutečnosti *antihomogenní*).

Připomeňme, že pruh nad komplexním číslem $a+bi$, kde $a,b\in\mathbb{R}$, značí komplexní sdružení, tedy $\overline{a+bi}=a-bi$ (formálně $i\mapsto -i$). V případě *reálného* vektorového prostoru můžeme komplexní sdružení v bodě (4) vypustit.

Příklad 4.2 (Eukleidovský skalární součin)**.** Důležitý příklad vektorového prostoru se skalárním součinem je souřadnicový prostor $\mathbb{K}^n$, kde obvyklá volba skalárního součinu je tzv. *eukleidovský* skalární součin definovaný předpisem

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\right\rangle := \overline{x_1}y_1+\cdots+\overline{x_n}y_n\,.$$

Kdykoli budeme mluvit o $\mathbb{K}^n$ coby vektorovém prostoru se skalárním součinem, budeme vždy implicitně předpokládat tuto kanonickou volbu skalárního součinu.

Na prostoru $\mathbb{K}^n$ existují i jiné volby skalárního součinu. Například, pokud všechna nějaká daná čísla $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{K}$ jsou striktně kladná, pak

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\right\rangle := \alpha_1\overline{x_1}y_1+\cdots+\alpha_n\overline{x_n}y_n$$

nám rovněž definuje skalární součin na $\mathbb{K}^n$. Eukleidovský skalární součin zřejmě odpovídá speciální volbě $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$. ♢

Příklad 4.3 (Lebesgueovský skalární součin)**.** Na prostoru polynomů $\mathcal{P}_m$ můžeme zavést skalární součin předpisem

$$\langle p, q\rangle := \int_0^1 \overline{p(x)}\, q(x)\, \mathrm{d}x\,. \tag{4.1}$$

♢

Po zbytek této kapitolky se dohodněme, že $\mathcal{V}$ bude značit libovolný vektorový prostor se skalárním součinem, tedy:

$$\boxed{\mathcal{V} := \text{vektorový prostor se skalárním součinem nad } \mathbb{K}.}$$

4.2 Norma

Definice 4.4. *Norma* vektoru $v \in \mathcal{V}$ je číslo

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}\,.$$

Všimněte si, že $\|v\|$ je kladné (reálné) číslo. Platí $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

Příklad 4.5 (Eukleidovská norma)**.** Pro souřadnicový prostor $\mathbb{K}^n$ (s eukleidovským skalárním součinem) máme

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}\,.$$

♢

Příklad 4.6 (Lebesgueovská norma)**.** Na prostoru polynomů $\mathcal{P}_m$ se skalárním součinem definovaným předpisem (4.1) máme

$$\|p\| = \sqrt{\int_0^1 |p(x)|^2\, \mathrm{d}x}\,.$$

♢

Tyto příklady naznačují, že obvykle bývá jednodušší pracovat s kvadrátem normy než s normou samotnou.

4.3 Ortogonalita

Definice 4.7. Vektory $u, v \in \mathcal{V}$ jsou *ortogonální*, pokud $\langle u, v\rangle = 0$.

Alternativně budeme říkat, že vektor u je ortogonální k vektoru v.

Kolmost vektorů je synonymum pro ortogonalitu, my se však budeme držet druhé terminologie, jež pochází ze složení řeckých slov *orthos* (pravý) a *gonia* (úhel).

Všimněte si, že kolmost vektorů je komutativní relace. Zřejmě platí, že nulový vektor 0 je ortogonální ke všem vektorům z daného vektorového prostoru (se skalárním součinem). Navíc platí, že 0 je jediný vektor, jenž je ortogonální sobě samému.

Následující věta pro speciální případ $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ je stará přes 2 500 let.

Věta 4.8 (Pythagorova)**.** $\forall u, v \in \mathcal{V}$,

$$\langle u, v\rangle = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \,. \tag{4.2}$$

Důkaz. Pro ortogonální vektory $u, v \in \mathcal{V}$ máme

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \underbrace{\langle u, v\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle v, u\rangle}_{=0} = \|u\|^2 + \|v\|^2 \,,$$

což je požadované tvrzení. □

Důkaz Pythagorovy věty ukazuje, že rovnost $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ platí tehdy a jen tehdy, pokud $\langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle = 2\,\mathrm{Re}\langle u, v\rangle = 0$. Je tedy zřejmé, že opačná implikace platí na *reálných* vektorových prostorech.

Uvažujme nyní dva libovolné vektory $u, v \in \mathcal{V}$ a položme si otázku, jak napsat vektor u jako součet skalárního násobku vektoru v a vektoru w ortogonálního k v. Pokud $v = 0$, požadovaný rozklad je zřejmý, předpokládejme tedy, že vektor v je nenulový. Z obrázku v $\mathbb{R}^2$ se přesvědčíte, že takovýto rozklad by měl být vždy možný. Pro libovolné číslo $\alpha \in \mathbb{K}$ tedy pišme

$$u = \alpha v + (u - \alpha v)$$

a snažme se zvolit α takovým způsobem, aby vektor $u - \alpha v =: w$ byl ortogonální k vektoru v. Jinými slovy požadujeme

$$0 = \langle v, u - \alpha v\rangle = \langle v, u\rangle - \alpha \|v\|^2 \,.$$

Z této rovnosti vyjádříme číslo α a zjistíme, že požadovaný rozklad má tvar

$$u = \underbrace{\frac{\langle v, u\rangle}{\|v\|^2} v}_{\text{skalární násobek } v} + \underbrace{\left(u - \frac{\langle v, u\rangle}{\|v\|^2} v\right)}_{\text{vektor ortogonální k } v} \,. \tag{4.3}$$

4.4 Nerovnosti

Následující věta představuje jednu z nejdůležitějších nerovností v matematice, s mnoha aplikacemi ve fyzice.

Věta 4.9 (Schwarzova nerovnost)**.** *$\forall u, v \in \mathcal{V}$,*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \|v\| \,. \tag{4.4}$$

Rovnost platí tehdy a jen tehdy, když jeden z vektorů u, v je skalárním násobkem druhého.

Důkaz. Pokud $v = 0$, pak se obě strany nerovnosti rovnají nule, tudíž tvrzení triviálně platí. Předpokládejme tedy $v \neq 0$.

Uvažujme ortogonální rozklad (viz (4.3))

$$u = \frac{\langle v, u\rangle}{\|v\|^2} v + w \,, \qquad \text{kde} \qquad w := u - \frac{\langle v, u\rangle}{\|v\|^2} v$$

je ortogonální k v. Podle Pythagorovy Věty 4.8 máme

$$\|u\|^2 = \left\| \frac{\langle v, u\rangle}{\|v\|^2} v \right\|^2 + \|w\|^2 = \frac{|\langle v, u\rangle|^2}{\|v\|^2} + \|w\|^2 \geq \frac{|\langle v, u\rangle|^2}{\|v\|^2} \,. \tag{4.5}$$

Požadovanou nerovnost (4.4) dostaneme vynásobením této nerovnosti číslem $\|v\|^2$ a odmocněním.

Zbývá se zamyslet nad případem, kdy nerovnost (4.4) přejde v rovnost. Podíváme-li se na náš důkaz výše, zjistíme, že (4.4) je rovnost tehdy a jen tehdy, pokud nerovnost v (4.5) je rovností. K tomu zřejmě dojde tehdy a jen tehdy, pokud $w = 0$. Avšak, podle definice w, $w = 0$ tehdy a jen tehdy, pokud u je násobkem v. Schwarzova nerovnost (4.4) je tedy rovností tehdy a jen tehdy, pokud u je násobkem v nebo v je násobkem u nebo obojí (terminologie v tvrzení věty je zvolena tak, aby zahrnovala i případy, kdy se u nebo v rovná nule). □

Následující věta se nazývá trojúhelníková nerovnost kvůli geometrické interpretaci v rovině, že délka jakékoli strany trojúhelníka je menší než součet délek zbývajících stran.

Věta 4.10 (Trojúhelníková nerovnost)**.** *$\forall u, v \in \mathcal{V}$,*

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \,. \tag{4.6}$$

Rovnost platí tehdy a jen tehdy, když jeden z vektorů u, v je kladným násobkem druhého.

Důkaz. Máme

$$\begin{aligned}
\|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v\rangle \\
&= \langle u, u\rangle + \langle v, v\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle \\
&= \langle u, u\rangle + \langle v, v\rangle + \langle u, v\rangle + \overline{\langle u, v\rangle} \\
&= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle u, v\rangle \\
&\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\,|\langle u, v\rangle| && (4.7) \\
&\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\,\|u\|\|v\| && (4.8) \\
&= (\|u\| + \|v\|)^2 \,,
\end{aligned}$$

kde jme použili standardní značení $\mathrm{Re}\, z := \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ pro reálnou část komplexního čísla z a první nerovnost plyne ze Schwarzovy nerovnosti (4.4). Odmocněním konečné nerovnosti dostaneme požadovanou nerovnost (4.6).

Zbývá se zamyslet nad případem, kdy nerovnost (4.6) přejde v rovnost. Z důkazu výše je zřejmé, že (4.6) je rovnost tehdy a jen tehdy, pokud máme rovnost v (4.7) a (4.8). Poněvadž

$$|\langle u, v\rangle|^2 = (\mathrm{Re}\langle u, v\rangle)^2 + (\mathrm{Im}\langle u, v\rangle)^2 ,$$

kde $\mathrm{Im}\, z := \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ značí imaginární část komplexního čísla z, dostáváme, že (4.6) je rovnost tehdy a jen tehdy, pokud

$$\langle u, v\rangle = \|u\| \|v\| . \tag{4.9}$$

Pokud jeden z vektorů u, v je kladným násobkem druhého, pak (4.9) zřejmě platí (ověřte si). Naopak, pokud platí (4.9), pak podmínka pro rovnost ve Schwarzově nerovnosti (Věta 4.9) implikuje, že jeden z vektorů u, v je skalárním násobkem druhého. Avšak podmínka (4.9) vyžaduje, aby se jednalo o *kladný* násobek. □

4.5 Ortonormální báze

Definice 4.11. Vektory $v_1, \dots, v_m \in \mathcal{V}$ jsou *ortonormální*, pokud

$$\forall j, k = 1, \dots, m, \qquad \langle v_j, v_k\rangle = \delta_{jk} .$$

Připomínáme, že Kroneckerův symbol δ_{jk} je definován tak, že $\delta_{jk} = 1$, pokud $j = k$, a $\delta_{jk} = 0$, pokud $j \neq k$. Vidíme tedy, že vektory $v_1, \dots, v_m$ jsou ortonormální tehdy a jen tehdy, pokud jsou vektory vzájemně ortogonální a každý vektor má normu rovnou 1 (říkáme, že je *normalizován na jedničku*).

Příklad 4.12. Vektory kanonické báze $e_1, \dots, e_m \in \mathbb{K}^m$ z Příkladu 2.6 jsou ortonormální (vhledem ke kanonické volbě eukleidovského skalárního součinu, viz Příklad 4.2). ♢

S ortonormálními vektory se velice dobře pracuje, jak ukazuje následující tvrzení.

Tvrzení 4.13. $\forall v_1, \dots, v_m \in \mathcal{V}$ *ortonormální,* $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$,

$$\|\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m\|^2 = |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_m|^2 .$$

Důkaz. Jelikož každý vektor má normu rovnou 1, tvrzení plyne opakovanou aplikací Pythagorovy Věty 4.8. □

Z tohoto tvrzení dostaneme snadný, avšak velice důležitý důsledek.

Důsledek 4.14. *$\forall v_1, \ldots, v_m \in \mathcal{V}$,*

$$v_1, \ldots, v_m \text{ jsou ortonormální} \qquad \Longrightarrow \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ jsou lineárně nezávislé}.$$

Důkaz. Nechť

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0\,,$$

kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$. Z Tvrzení 4.13 plyne, že

$$|\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_m|^2 = 0\,,$$

což znamená, že všechny α jsou rovny nule. □

Definice 4.15. Báze ve $\mathcal{V}$ je *ortonormální*, pokud její vektory jsou ortonormální.

Příklad 4.16. Kanonická báze $(e_1, \ldots, e_m) \in \mathbb{K}^m$ je ortonormální. ♢

Pro libovolnou bázi $(v_1, \ldots, v_m) \in \mathcal{V}^m$ a vektor $v \in \mathcal{V}$ existují čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ taková, že máme rozklad

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m\,.$$

Avšak najít tato čísla pro daný vektor v může být obecně těžké. Následující tvrzení nám ukazuje, že tento úkol je snadný, pokud se jedná o ortonormální bázi.

Věta 4.17. *Nechť $(v_1, \ldots, v_m) \in \mathcal{V}^m$ je ortonormální báze a $v \in \mathcal{V}$ libovolný vektor. Potom platí*

$$v = \langle v_1, v\rangle v_1 + \cdots + \langle v_m, v\rangle v_m\,, \tag{4.10}$$

$$\|v\|^2 = |\langle v_1, v\rangle|^2 + \cdots + |\langle v_m, v\rangle|^2\,. \tag{4.11}$$

Důkaz. Poněvadž $v_1, \ldots, v_m$ je báze, existují čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ taková, že máme rozklad

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m\,.$$

Pokud vezmeme skalární součin obou stran s vektorem v_j, $j = 1, \ldots, m$, dostaneme $\alpha_j = \langle v_j, v\rangle$, čímž dostáváme (4.10). Rovnost (4.11) plyne z právě dokázané rovnosti (4.10) a Tvrzení 4.13. □

Identita (4.11) se nazývá *Parsevalova rovnost.* Identitě (4.10) se někdy říká *rozklad jedničky*, poněvadž ji můžeme chápat jako operátorovou rovnost

$$I = v_1\langle v_1, \cdot\rangle + \cdots + v_m\langle v_m, \cdot\rangle\,,$$

kde na levé straně stojí identický operátor na $\mathcal{V}$ a tečku chápeme tak, se za ní dosadí libovolný vektor, na který identitu aplikujeme.

Nyní, co jsme se přesvědčili o užitečnosti ortonormální báze, jak ji najdeme? Například, existuje ortonormální báze na prostoru polynomů $\mathcal{P}_m$ se skalárním součinem definovaným v Příkladu 4.3? Následující tvrzení odpovídá na tyto otázky. Skutečně, poskytuje konstrukční algoritmus, jak z libovolných lineárně nezávislých vektorů vytvořit vektory ortonormální, zatímco lineární obal je zachován.

Věta 4.18 (Gram–Schmidtův ortogonalizační proces)**.** *Nechť $u_1, \dots, u_m \in \mathcal{V}$ jsou lineárně nezávislé. Potom existují ortonormální vektory $v_1, \dots, v_m \in \mathcal{V}$ takové, že platí*

$$\forall j \in \{1, \dots, m\}, \qquad \operatorname{span}(u_1, \dots, u_j) = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_j)\,. \tag{4.12}$$

Důkaz. Začněme konstrukci ortonormálních vektorů $v_1, \dots, v_m$ volbou

$$v_1 := \frac{u_1}{\|u_1\|}\,,$$

což splňuje (4.12) pro $j = 1$. Ostatní vektory $v_2, \dots, v_m$ zvolíme induktivně následujícím postupem. Nechť $j \geq 2$ a předpokládejme, že ortonormální vektory $v_1, \dots, v_{j-1}$ už byly zvoleny takovým způsobem, že splňují

$$\operatorname{span}(u_1, \dots, u_{j-1}) = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_{j-1})\,. \tag{4.13}$$

Definujme

$$v_j := \frac{u_j - \langle v_1, u_j\rangle v_1 - \cdots - \langle v_{j-1}, u_j\rangle v_{j-1}}{\|u_j - \langle v_1, u_j\rangle v_1 - \cdots - \langle v_{j-1}, u_j\rangle v_{j-1}\|}\,. \tag{4.14}$$

Všimněte si, že $u_j \notin \operatorname{span}(u_1, \dots, u_{j-1})$ (protože vektory $u_1, \dots, u_m$ jsou lineárně nezávislé), a tudíž $u_j \notin \operatorname{span}(v_1, \dots, v_{j-1})$. Z tohoto důvodu je vektor v_j v (4.14) dobře definován (nedělíme nulou). Zřejmě platí $\|v_j\| = 1$.

Pro libovolné $k \in \{1, \dots, j-1\}$ máme

$$\begin{aligned}
\langle v_k, v_j\rangle &= \left\langle v_k, \frac{u_j - \langle v_1, u_j\rangle v_1 - \cdots - \langle v_{j-1}, u_j\rangle v_{j-1}}{\|u_j - \langle v_1, u_j\rangle v_1 - \cdots - \langle v_{j-1}, u_j\rangle v_{j-1}\|} \right\rangle \\
&= \frac{\langle v_k, u_j\rangle - \langle v_k, u_j\rangle}{\|u_j - \langle v_1, u_j\rangle v_1 - \cdots - \langle v_{j-1}, u_j\rangle v_{j-1}\|} \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Tudíž takto zkonstruované vektory $v_1, \dots, v_j$ jsou ortonormální.

Z definice (4.14) vidíme, že $u_j \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_j)$. Zkombinováním této informace s (4.13) vidíme, že platí

$$\operatorname{span}(u_1, \dots, u_j) \subset \operatorname{span}(v_1, \dots, v_j)\,.$$

Obě sady vektorů jsou lineárně nezávislé (vektory u podle předpokladu, vektory v z ortonormality a Důsledku 4.14). Tedy oba podprostory výše musí mít dimenzi j, a tudíž si musí být rovny. $\square$

Jako důsledek zodpovíme otázku existence ortonormální báze. Zde je důležité, že uvažujeme pouze konečně dimenzionální vektorové prostory.

Důsledek 4.19. *V každém vektorovém prostoru se skalárním součinem existuje ortonormální báze.*

Důkaz. Zvolme libovolnou bázi ve $\mathcal{V}$. Aplikací Gram–Schmidtova ortogonalizačního procesu na prvky této báze dostaneme ortonormální vektory. Tyto vektory jsou lineárně nezávislé (viz Důsledek 4.14) a jejich lineární obal je roven $\mathcal{V}$ (viz (4.12)). Tudíž se jedná o ortonormální bázi ve $\mathcal{V}$. □

4.6 Ortogonální projekce

Definice 4.20. Pro libovolnou podmnožinu $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ definujeme *ortogonální doplněk* k $\mathcal{U}$ jako množinu

$$\mathcal{U}^\perp := \{v \in \mathcal{V} : \ \forall u \in \mathcal{U}, \quad \langle v, u\rangle = 0\}\,.$$

Množina $\mathcal{U}^\perp$ je tedy tvořena všemi těmi vektory z $\mathcal{V}$, jež jsou ortogonální ke každému vektoru z $\mathcal{U}$.

Příklad 4.21. $\mathcal{V}^\perp = \{0\}$ a $\{0\}^\perp = \mathcal{V}$. ◇

Bez ohledu na to, jestli $\mathcal{U}$ je podprostor $\mathcal{V}$, ortogonální doplněk $\mathcal{U}^\perp$ je vždy podprostorem $\mathcal{V}$.

Tvrzení 4.22. $\forall \mathcal{U} \subset \mathcal{V}, \qquad \mathcal{U}^\perp \subset\subset \mathcal{V}.$

Dále se zamyslete nad důkazem následujícího tvrzení.

Tvrzení 4.23. $\forall \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{V},$

$$\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{U}_2^\perp \subset \mathcal{U}_1^\perp\,.$$

Následující tvrzení ukazuje, že každý podprostor vektorového prostoru vede k přirozenému direktnímu rozkladu celého prostoru.

Věta 4.24. $\forall \mathcal{U} \subset\subset \mathcal{V},$

$$\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp\,.$$

Důkaz. Nechť $\mathcal{U}$ je podprostorem $\mathcal{V}$.

$\boxed{\mathcal{V} = \mathcal{U} + \mathcal{U}^\perp}$ Nejdříve ukážeme, že $\mathcal{V}$ je součtem podprostorů $\mathcal{U}$ a $\mathcal{U}^\perp$. Nechť $v \in \mathcal{V}$ je libovolný vektor. Nechť $u_1, \dots, u_m$ je ortonormální báze v $\mathcal{U}$. Pak zřejmě platí

$$v = \underbrace{\langle u_1, v\rangle u_1 + \cdots + \langle u_m, v\rangle u_m}_{u} + \underbrace{v - \langle u_1, v\rangle u_1 - \cdots - \langle u_m, v\rangle u_m}_{w} .$$

Zřejmě $u \in \mathcal{U}$. Z ortonormality $u_1, \dots, u_m$ dostáváme

$$\langle u_j, w\rangle = \langle u_j, v\rangle - \langle u_j, v\rangle = 0$$

pro všechna $j = 1, \dots, m$. Tedy vektor w je ortogonální ke každému vektoru z lineárního obalu $\operatorname{span}(u_1, \dots, u_m) = \mathcal{U}$. Jinými slovy $w \in \mathcal{U}^\perp$. Tímto jsme právě dokázali $\mathcal{V} = \mathcal{U} + \mathcal{U}^\perp$.

$\boxed{\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp = \{0\}}$ K důkazu, že se ve skutečnosti jedná o direktní součet, stačí ukázat, že průnik podprostorů $\mathcal{U}$ a $\mathcal{U}^\perp$ je pouze nulový vektor a použít Větu 1.26. Pokud $v \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp$, potom v (jenž leží v $\mathcal{U}$) je ortogonální ke každému vektoru z $\mathcal{U}$, tedy včetně sebe, což znamená $\langle v, v\rangle = 0$. Podle definice skalárního součinu z toho plyne $v = 0$. □

Důležitým důsledkem je následující tvrzení.

Důsledek 4.25. *$\forall \mathcal{U} \subset\subset \mathcal{V}$,*

$$(\mathcal{U}^\perp)^\perp = \mathcal{U} .$$

Důkaz. Dokážeme rovnost jako platnost dvou inkluzí.

$\boxed{(\mathcal{U}^\perp)^\perp \supset \mathcal{U}}$ Pokud $u \in \mathcal{U}$, pak $\langle v, u\rangle = 0$ pro každý vektor $v \in \mathcal{U}^\perp$ (podle definice $\mathcal{U}^\perp$). Poněvadž u je ortogonální ke každému vektoru z $\mathcal{U}^\perp$, máme $u \in (\mathcal{U}^\perp)^\perp$.

$\boxed{(\mathcal{U}^\perp)^\perp \subset \mathcal{U}}$ Nechť nyní $v \in (\mathcal{U}^\perp)^\perp$. Z Věty 4.24 plyne, že existují vektory $u \in \mathcal{U}$ a $w \in \mathcal{U}^\perp$ takové, že máme rozklad $v = u + w$. Z toho dostáváme $v - u = w \in \mathcal{U}^\perp$. Poněvadž $v \in (\mathcal{U}^\perp)^\perp$ (podle předpokladu) a $u \in (\mathcal{U}^\perp)^\perp$ (z už dokázané opačné inkluze), máme rovněž $v - u = w \in (\mathcal{U}^\perp)^\perp$. Tedy $v - u \in \mathcal{U}^\perp \cap (\mathcal{U}^\perp)^\perp$, z čehož plyne, že $v - u$ je ortogonální sám k sobě, tedy $v - u = 0$, a tedy $v = u \in \mathcal{U}$. □

Nyní využijeme ortogonálního rozkladu z Věty 4.24 k definici velice důležitého lineárního zobrazení.

Definice 4.26. Nechť $\mathcal{U} \subset\subset \mathcal{V}$. *Ortogonální projekce* $\mathcal{V}$ na $\mathcal{U}$ je zobrazení definované předpisem

$$P_{\mathcal{U}} : \mathcal{V} \to \mathcal{U} : \{v \mapsto u\} ,$$

kde u je vektor určený rozkladem

$$\forall v \in \mathcal{V}, \quad \exists!\, u \in \mathcal{U},\ w \in \mathcal{U}^\perp, \qquad v = u + w . \tag{4.15}$$

Rozklad (4.15) platí díky platnosti direktního součtu $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp$ dokázanému ve Větě 4.24.

Měli byste si dokázat, že $P_{\mathcal{U}} \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$ a že $P_{\mathcal{U}}$ splňuje následující vlastnosti.

Tvrzení 4.27. $\forall \mathcal{U} \subset\subset \mathcal{V}$,

(i) $\operatorname{ran} P_{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$;

(ii) $\ker P_{\mathcal{U}} = \mathcal{U}^{\perp}$;

(iii) $\forall v \in \mathcal{V}, \qquad v - P_{\mathcal{U}} v \in \mathcal{U}^{\perp}$;

(iv) $P_{\mathcal{U}}^2 = P_{\mathcal{U}}$;

(v) $\forall v \in \mathcal{V}, \qquad \|P_{\mathcal{U}} v\| \leq \|v\|$;

(vi) *Je-li $v_1, \dots, v_m$ ortonormální báze prostoru $\mathcal{U}$, pak platí*

$$\forall v \in \mathcal{V}, \qquad P_{\mathcal{U}} v = \langle v_1, v\rangle v_1 + \cdots + \langle v_m, v\rangle v_m \,.$$

V bodě (iv) používáme zápis $P_{\mathcal{U}}^2 := P_{\mathcal{U}} P_{\mathcal{U}}$.

4.7 Lineární funkcionály

Definice 4.28. *Lineární funkcionál* ϕ na $\mathcal{V}$ je lineární zobrazení $\phi : \mathcal{V} \to \mathbb{K}$.

Příklad 4.29. Nechť $v \in \mathcal{V}$ je pevně daný vektor. Potom zobrazení definované předpisem

$$u \mapsto \langle v, u\rangle$$

je lineární funkcionál na $\mathcal{V}$. $\diamondsuit$

Následující pozoruhodné tvrzení ukazuje, že každý lineární funkcionál je tohoto typu.

Věta 4.30 (Rieszova o reprezentaci)**.** *Nechť ϕ je lineární funkcionál na $\mathcal{V}$. Potom platí:*

$$\exists!\, v \in \mathcal{V}, \quad \forall u \in \mathcal{V}, \qquad \phi(u) = \langle v, u\rangle \,.$$

Důkaz. Důkaz si rozdělme do dvou kroků.

$\boxed{\text{Existence}}$ Dokažme si nejdříve, že existuje nějaký vektor $v \in \mathcal{V}$ takový, že platí $\phi(u) = \langle v, u\rangle$ pro všechny vektory $u \in \mathcal{V}$ (tedy požadované tvrzení, ovšem bez vykřičníku u existenčního kvantifikátoru). Nechť $v_1, \dots, v_m$ je nějaká ortonormální báze ve $\mathcal{V}$. Potom

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \phi\big(\langle v_1, u\rangle\, v_1 + \cdots + \langle v_m, u\rangle\, v_m\big) \\ &= \langle v_1, u\rangle\, \phi(v_1) + \cdots + \langle v_m, u\rangle\, \phi(v_m) \\ &= \Big\langle \overline{\phi(v_1)}\, v_1 + \cdots + \overline{\phi(v_m)}\, v_m, u \Big\rangle \end{aligned}$$

pro libovolný vektor $u \in \mathcal{V}$. Tedy požadované tvrzení dostaneme volbou

$$v := \overline{\phi(v_1)}\, v_1 + \cdots + \overline{\phi(v_m)}\, v_m \,.$$

$\boxed{\text{Jednoznačnost}}$ Nyní ukažme, že pouze jeden vektor $v \in \mathcal{V}$ splňuje požadovaný vztah $\phi(u) = \langle v, u \rangle$ pro všechny vektory $u \in \mathcal{V}$. Nechť existují dva vektory $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ splňující

$$\forall u \in \mathcal{V}, \qquad \phi(u) = \langle v_1, u \rangle = \langle v_2, u \rangle .$$

Potom

$$\forall u \in \mathcal{V}, \qquad 0 = \langle v_1, u \rangle - \langle v_2, u \rangle = \langle v_1 - v_2, u \rangle .$$

Pro speciální volbu $u := v_1 - v_2$ dostaneme $v_1 - v_2 = 0$, tedy $v_1 = v_2$, z čehož plyne požadovaná jednoznačnost. $\square$

4.8 Sdružené zobrazení

V dalším výkladu budeme kromě $\mathcal{V}$ potřebovat ještě jeden vektorový prostor se skalárním součinem:

$$\boxed{\mathcal{W} := \text{vektorový prostor se skalárním součinem nad } \mathbb{K}.}$$

Následující definice představuje další důležitou operaci na prostoru lineárních zobrazení.

Definice 4.31. Nechť $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. *Sdružené* zobrazení k T je zobrazení T^* definované předpisem

$$T^* : \mathcal{W} \to \mathcal{V} : \{ w \mapsto v : \ \forall u \in \mathcal{V}, \quad \langle w, Tu \rangle = \langle v, u \rangle \} .$$

Zde $\langle w, Tu \rangle$ značí skalární součin na $\mathcal{W}$, zatímco $\langle v, u \rangle$ značí skalární součin na $\mathcal{V}$. Existence a jednoznačnost takovéhoto vektoru v plyne z Věty 4.30 (aplikované na lineární funkcionál $\phi(u) := \langle w, Tu \rangle$). Obraz sdruženého zobrazení T^*w je tedy jednoznačně určený vektor ve $\mathcal{V}$ splňující vztah

$$\forall u \in \mathcal{V}, \ \forall w \in \mathcal{W}, \qquad \langle w, Tu \rangle = \langle T^*w, u \rangle .$$

Příklad 4.32. Uvažujme zobrazení (viz Příklad 3.7)

$$T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m : \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2} + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \right\},$$

kde $a_{jk} \in \mathbb{K}$, $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$, jsou daná čísla. Sdružené zobrazení k T^* (vůči eukleidovskému skalárnímu součinu) je dáno předpisem

$$T^* : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n : \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \overline{a_{11}}\xi_1 + \overline{a_{21}}\xi_2 + \cdots + \overline{a_{m1}}\xi_m \\ \overline{a_{12}}\xi_1 + \overline{a_{22}}\xi_2 + \cdots + \overline{a_{m2}}\xi_m \\ \vdots \\ \overline{a_{1n}}\xi_1 + \overline{a_{2n}}\xi_2 + \cdots + \overline{a_{mn}}\xi_m \end{pmatrix} \right\}.$$

$\diamondsuit$

Následující tvrzení ukazuje, že T^* je nejen zobrazení, ale dokonce lineární, a že operace *sdružení* $T \mapsto T^*$ splňuje množství zajímavých vlastností. Důkazy přenecháváme čtenáři.

Tvrzení 4.33.

(i) $\forall T \in \mathscr{L}(\mathcal{V},\mathcal{W}),\qquad T^* \in \mathscr{L}(\mathcal{W},\mathcal{V})$; *(lineárnost)*

(ii) $\forall S,T \in \mathscr{L}(\mathcal{V},\mathcal{W}),\qquad (S+T)^* = S^* + T^*$; *(aditivita)*

(iii) $\forall T \in \mathscr{L}(\mathcal{V},\mathcal{W}),\ \alpha \in \mathbb{K},\qquad (\alpha T)^* = \overline{\alpha}\, T^*$; *(konjugovaná homogenita)*

(iv) $\forall T \in \mathscr{L}(\mathcal{V},\mathcal{W}),\qquad (T^*)^* = T$; *(dvojité sdružení)*

(v) $I^* = I$; *(identita)*
kde I je identický operátor na $\mathcal{V}$

(vi) $\forall T \in \mathscr{L}(\mathcal{V},\mathcal{U}),\ S \in \mathscr{L}(\mathcal{U},\mathcal{W}),\qquad (ST)^* = T^*S^*$, *(součin)*
kde $\mathcal{U}$ značí nějaký další vektorový prostor se skalárním součinem.

Další tvrzení poskytuje důležité vztahy mezi jádrem a oborem hodnot zobrazení a jeho sdruženého zobrazení. Důkaz je jednoduchý, avšak právě kvůli důležitosti si tato tvrzení zformulujeme jako větu.

Věta 4.34. $\forall T \in \mathscr{L}(\mathcal{V},\mathcal{W})$,

(i) $\ker T^* = (\operatorname{ran} T)^\perp$;

(ii) $\operatorname{ran} T^* = (\ker T)^\perp$;

(iii) $\ker T = (\operatorname{ran} T^*)^\perp$;

(iv) $\operatorname{ran} T = (\ker T^*)^\perp$.

Důkaz. Nechť $w \in \mathcal{W}$. Potom platí ekvivalence

$$\begin{aligned} w \in \ker T^* &\iff T^* w = 0 \\ &\iff \forall v \in \mathcal{V},\quad \langle T^* w, v\rangle = 0 \\ &\iff \forall v \in \mathcal{V},\quad \langle w, Tv\rangle = 0 \\ &\iff w \in (\operatorname{ran} T)^\perp . \end{aligned}$$

Tímto jsme dokázali vlastnost (i). Pokud vezmeme ortogonální doplněk obou stran rovnosti (i) a použijeme Tvrzení 4.25, dostaneme (iv). Vlastnosti (ii) a (iii) jsou tvrzení (i) a (iv) s vyměněnými rolemi mezi T a T^*. $\square$

Důsledek 4.35. $\forall T \in \mathscr{L}(\mathcal{V},\mathcal{W})$,

(i) $\dim \operatorname{ran} T^* = \dim \operatorname{ran} T$;

(ii) $\dim \ker T^* = \dim \ker T + \dim \mathcal{W} - \dim \mathcal{V}$.

Důkaz. Z Věty 3.35 plynou identity

$$\dim \mathcal{V} = \dim \ker T + \dim \operatorname{ran} T\,, \tag{4.16}$$

$$\dim \mathcal{W} = \dim \ker T^* + \dim \operatorname{ran} T^*\,. \tag{4.17}$$

Z Věty 4.24 o ortogonálním rozkladu, máme $\mathcal{V} = \ker T \oplus (\ker T)^\perp$ a $\mathcal{W} = \ker T^* \oplus (\ker T^*)^\perp$, z čehož plynou identity

$$\dim \mathcal{V} = \dim \ker T + \dim(\ker T)^\perp\,, \tag{4.18}$$

$$\dim \mathcal{W} = \dim \ker T^* + \dim(\ker T^*)^\perp\,. \tag{4.19}$$

Srovnáním (4.16) s (4.18) dostaneme

$$\dim \operatorname{ran} T = \dim(\ker T)^\perp = \dim \operatorname{ran} T^*\,,$$

kde poslední rovnost plyne z Věty 4.34(ii). Tím jsme dokázali identitu (i). Užitím Věty 4.34(iv) v (4.19) odvodíme

$$\dim \mathcal{W} = \dim \ker T^* + \dim \operatorname{ran} T$$

a kombinací tohoto vztahu s (4.16) dostaneme identitu (ii). (Vztah (4.17) jsme tedy vůbec nepoužili, ale mohli bychom ho využít pro alternativní důkaz rovností (i) a (ii).) □

Příklad 4.36 (Soustavy lineárních algebraických rovnic, Fredholmovy věty)**.** Jako aplikaci těchto abstraktních výsledků uvažujme operátorové rovnice

$$Tx = y\,, \quad (4.20) \qquad\qquad T^*\xi = \eta\,, \quad (4.22)$$

$$Tx = 0\,, \quad (4.21) \qquad\qquad T^*\xi = 0\,, \quad (4.23)$$

kde T je zobrazení z $\mathbb{K}^n$ do $\mathbb{K}^m$ definované v Příkladu (4.32), $x, \eta \in \mathbb{K}^n$ a $y, \xi \in \mathbb{K}^m$. Tyto rovnice jsou tedy ekvivalentní soustavám lineárních algebraických rovnic

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2} + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{a_{11}}\xi_1 + \overline{a_{21}}\xi_2 + \cdots + \overline{a_{m1}}\xi_m = \eta_1 \\ \overline{a_{12}}\xi_1 + \overline{a_{22}}\xi_2 + \cdots + \overline{a_{m2}}\xi_m = \eta_2 \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ \overline{a_{1n}}\xi_1 + \overline{a_{2n}}\xi_2 + \cdots + \overline{a_{mn}}\xi_m = \eta_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2} + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{a_{11}}\xi_1 + \overline{a_{21}}\xi_2 + \cdots + \overline{a_{m1}}\xi_m = 0 \\ \overline{a_{12}}\xi_1 + \overline{a_{22}}\xi_2 + \cdots + \overline{a_{m2}}\xi_m = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ \overline{a_{1n}}\xi_1 + \overline{a_{2n}}\xi_2 + \cdots + \overline{a_{mn}}\xi_m = 0 \end{cases}$$

Zde předpokládáme, že čísla $a_{jk} \in \mathbb{K}$, $j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$, a vektory y a η jsou zadané, zatímco vektory x a ξ představují neznámé. Rovnice (4.20) a (4.21) tedy představují m rovnic o n neznámých, zatímco (4.22) a (4.23) představují n rovnic o m neznámých.

Z Příkladu 3.40 už víme, že pokud počet neznámých je větší než počet rovnic, potom existuje netriviální řešení homogenní soustavy rovnic (tedy $n > m$ pro (4.21) a $n < m$ pro (4.23)). Rovněž víme, že pokud počet neznámých je menší než počet rovnic, potom existuje pravá strana, pro níž není nehomogenní soustava rovnic řešitelná (tedy $n < m$ pro (4.20) a $n > m$ pro (4.22)).

Uvažujme nyní speciální případ $m = n$, kdy počet rovnic je stejný jako počet neznámých. Z Příkladu 3.46 už víme, že nehomogenní soustava (4.20) má řešení (a to právě jedno) pro libovolnou volbu pravé strany tehdy a jen tehdy, pokud homogenní soustava (4.21) má pouze triviální řešení. Stejný typ tvrzení samozřejmě platí i pro sdružené rovnice (4.22) a (4.23).

Podívejme se nyní, jaký je vztah mezi rovnicemi (4.20) a (4.21) na jedné straně a rovnicemi (4.22) a (4.23) na druhé straně. Poněvadž předpokládáme $m = n$, z Důsledku 4.35(ii) vidíme, že $\dim \ker T = \dim \ker T^*$. Tedy:

$$\boxed{\text{Podprostory řešení rovnic (4.21) a (4.23) mají stejnou dimenzi.}}$$

To, že x je řešením rovnice (4.20) s pravou stranou y je ekvivalentní tomu, že $y \in \operatorname{ran} T$. Toto je podle Věty 4.34(iv) ekvivalentní tomu, že $y \in (\ker T)^*$. Poslední vlastnost je pak ekvivalentní tomu, že $\langle \xi, y \rangle = 0$ pro všechny vektory $\xi \in \ker T^*$. Dostáváme tedy ekvivalenci:

$$\boxed{\text{Rovnice (4.20) s pravou stranou } y \text{ má řešení} \quad \Longleftrightarrow \quad y \text{ je ortogonální ke každému řešení rovnice (4.23).}}$$

Analogické tvrzení samozřejmě platí i pro pár (4.22) a (4.21).

Tato tvrzení o řešení soustav lineárních algebraických rovnic se nazývají Fredholmovy věty. My je dostáváme elegantně coby důsledek abstraktních tvrzení o lineárních zobrazeních. $\diamondsuit$

4.9 Cvičení

1. Nechť $x := \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y := \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$, $z := \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$ jsou vektory v $\mathbb{C}^3$. Spočtěte:

   (a) eukleidovké normy $\|x\|$, $\|y\|$, $\|z\|$, $\|y-z\|$;

   (b) eukleidovské skalární součiny $\langle x,y\rangle$, $\langle x,z\rangle$, $\langle y,z\rangle$, $\langle z,x\rangle$.

2. Nechť $x, y \in \mathbb{R}^2$ jsou nenulové. Ukažte, že platí vztah
$$\langle x,y\rangle = \|x\|\|y\|\cos\theta\,,$$
kde θ je úhel mezi vektory x a y (pokud si je představujeme jako šipky umístěné v počátku souřadného systému $\mathbb{R}^2$).

   [*Hint:* Nakreslete si trojúhelník tvořený vektory x, y a $x-y$ a užijte kosinovou větu.]

3. Nechť $u, v \in \mathcal{V}$. Dokažte následující ekvivalenci:
$$\langle u,v\rangle = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\alpha\in\mathbb{K}, \quad \|u\| \le \|u+\alpha v\|\,.$$

   [*Hint:* Rozviňte pravou stranu a pište $\alpha = \beta\langle v,u\rangle$, kde β je malé reálné číslo.]

4. Nechť vektory $u, v \in \mathcal{V}$ splňují rovnosti
$$\|u\| = 3\,, \qquad \|u+v\| = 4\,, \qquad \|u-v\| = 6\,.$$
Čemu je rovna norma $\|v\|$?

   [$\sqrt{17}$.]

5. Nechť $\mathcal{V}$ je reálný vektorový prostor. Ukažte, že pak platí vztah
$$\forall u,v\in\mathcal{V}, \qquad \langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right).$$

6. Nechť $\mathcal{V}$ je komplexní vektorový prostor. Ukažte, že pak platí vztah
$$\forall u,v\in\mathcal{V}, \qquad \langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u-iv\|^2 - i\|u+iv\|^2\right).$$

7. Ukažte, že vektory
$$\begin{pmatrix} \frac12 \\ \frac12 \\ \frac12 \\ \frac12 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac12 \\ \frac12 \\ -\frac12 \\ -\frac12 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac12 \\ -\frac12 \\ -\frac12 \\ \frac12 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac12 \\ \frac12 \\ -\frac12 \\ \frac12 \end{pmatrix},$$
tvoří ortonormální bázi v $\mathbb{R}^4$.

8. Pomocí Gram–Schmidtova ortogonalizačního procesu zkonstruujte z vektorů
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$
ortonormální bázi v $\mathbb{R}^3$.

9. Pomocí Gram–Schmidtova ortogonalizačního procesu zkonstruujte z vektorů

$$\begin{pmatrix} 2i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2i \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2i \\ 2i \\ 2i \end{pmatrix},$$

ortonormální bázi v $\mathbb{C}^3$.

10. Ukažte, že zobrazení

$$\phi : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K} : \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto 2x_1 - 5x_2 + x_3 \right\}$$

je lineární funkcionál na $\mathbb{K}^3$.

11. Uvažujme lineární zobrazení

$$T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2 : \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ix_2+3x_3 \\ 2x_1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Spočtěte k němu sdružené zobrazení T^*.

$\left[T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3 : \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2y_2 \\ -iy_1 \\ 3y_1 \end{pmatrix} \right\}.\right]$

12. Nechť $v \in \mathcal{V}$ je fixní vektor a uvažujme lineární zobrazení

$$T : \mathcal{V} \to \mathbb{K} : \{u \mapsto \langle v, u \rangle\}.$$

Spočtěte k němu sdružené zobrazení T^*.

$[T^* : \mathbb{K} \to \mathcal{V} : \{\alpha \mapsto \alpha v\}.]$

5 Matice

V této kapitolce konečně zavedeme pojem matice a ukážeme si souvislost matic s lineárními zobrazeními. Budeme implicitně předpokládat, že čísla m, n značící počet vektorů či velikost matic jsou striktně kladná celá čísla, tedy:

$$\boxed{m, n \in \mathbb{N}^*.}$$

5.1 Tabulková definice

Definice 5.1. *Maticí* typu $m \times n$ nazveme obdélníkovou tabulku o m řádcích a n sloupcích

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

kde $a_{jk} \in \mathbb{K}$, $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$.

Čísla a_{jk} vystupující v matici budeme nazývat *prvky* matice. n-tici čísel

$$a_j := \begin{pmatrix} a_{j1}, & \dots, & a_{jn} \end{pmatrix}$$

budeme nazývat j-tým *řádkem* matice a m-tici čísel

$$a^k := \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$$

budeme nazývat k-tým *sloupcem* matice. Všimněte si, že první index čísla a_{jk} značí číslo řádku a druhý index značí číslo sloupce.

Je-li $m = n$, mluvíme o čtvercové matici *stupně* n.

Jsou-li všechny prvky matice reálná čísla, mluvíme o *reálné* matici. Jinak mluvíme o *komplexní* matici.

Matice typu $m \times n$ má tedy m řádků a n sloupců. Na tyto sloupce se můžeme dívat jako na matice typu $m \times 1$ nebo také jako na prvky v $\mathbb{K}^m$ (sloupcové vektory). Podobně na řádky se můžeme dívat jako na matice typu $1 \times n$ nebo také jako na prvky v $\mathbb{K}^n$ (řádkové vektory).

Tabulku (5.1) budeme příležitostně zkracovat na $(a_{jk})_{j=1,\dots,m}^{k=1,\dots,n}$ či dokonce na (a_{jk}), pokud bude rozsah indexů jasný z kontextu.

5.2 Matice lineárního zobrazení

Nechť $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Nechť $(v_1, \dots, v_n)$ je báze prostoru $\mathcal{V}$ a $(w_1, \dots, w_m)$ je báze prostoru $\mathcal{W}$. Z vlastností báze plyne, že pro každý index $k = 1, \dots, n$ existují jednoznačně určená čísla $a_{1k}, \dots, a_{mk} \in \mathbb{K}$ taková, že máme rozklad

$$Tv_k = a_{1k}w_1 + \dots + a_{mk}w_m .$$

Čísla a_{jk} zcela určují lineární zobrazení T, protože lineární zobrazení je určeno svými hodnotami na prvcích báze (viz Příklad 3.8).

Definice 5.2. *Matice zobrazení* $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ vzhledem k bázím $(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{V}^n$ a $(w_1, \dots, w_m) \in \mathcal{W}^m$ je tabulka

$$\mathsf{M}\big(T, (v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_m)\big) := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

jejíž prvky jsou (jednoznačně) určeny rozklady

$$Tv_k = a_{1k}w_1 + \dots + a_{mk}w_m \,, \qquad k = 1, \dots, n \,.$$

Pokud volba bází je zřejmá z kontextu, budeme označení matice zobrazení T zkracovat na $\mathsf{M}(T)$. Pokud $\mathcal{V} = \mathcal{W}$ a ve $\mathcal{V}$ coby výchozím i cílovém prostoru zvolíme stejnou bázi $(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{V}^n$, zkracujeme $\mathsf{M}\big(T, (v_1, \dots, v_n), (v_1, \dots, v_n)\big) =: \mathsf{M}\big(T, (v_1, \dots, v_n)\big)$

Jako pomůcku pro zapamatování si, jak je matice $\mathsf{M}(T)$ zkonstruována z T, si můžete napsat vektory báze výchozího prostoru $v_1, \dots, v_n$ nahoru a vektory báze cílového prostoru $w_1, \dots, w_m$ doleva tabulky takovýmto způsobem:

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} v_1 & \dots & v_k & \dots & v_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & a_{1k} & & \\ & & \vdots & & \\ & & a_{mk} & & \end{pmatrix} \end{array}.$$

Zde zobrazujeme pouze k-tý sloupec matice, a ten se skládá právě z čísel, která potřebujeme, abychom mohli zapsat Tv_k coby lineární kombinaci vektorů $w_1, \dots, w_m$.

Příklad 5.3. Matice nulového zobrazení se skládá z prvků, jež jsou všechny rovny nule. Tedy

$$\mathsf{M}(0) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

◊

Příklad 5.4. Připomeňme si nyní zobrazení z Příkladu 3.7

$$T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m : \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} =: \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}}_{y} \right\},$$

kde $a_{jk} \in \mathbb{K}$, $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$. Připomeňme, že v případě souřadnicových prostorů $\mathbb{K}^n$ vždy (pokud neřekneme jinak) uvažujeme kanonickou bázi (viz Příklady 2.6 a 2.22). Za tohoto předpokladu se čtenář snadno přesvědčí o tom, že matice zobrazení T má přesně předpokládaný tvar

$$\mathsf{M}(T) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

◊

5.3 Operace s maticemi

Právě jsme viděli, že každému lineárnímu zobrazení odpovídá matice. Je matice součtu lineárních zobrazení rovna součtu matic jednotlivých zobrazení? Je matice lineárního zobrazení přenásobeného nějakým číslem rovna číslu krát matice samotného lineárního zobrazení? Tedy

$$\forall T, S \in \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W}), \qquad \mathsf{M}(T+S) \stackrel{?}{=} \mathsf{M}(T) + \mathsf{M}(S)\,, \tag{5.2}$$

$$\forall T \in \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W}), \quad \alpha \in \mathbb{K} \qquad \mathsf{M}(\alpha T) \stackrel{?}{=} \alpha \mathsf{M}(T)\,. \tag{5.3}$$

V této fázi nemají otázky dobrý smysl, poněvadž, přestože jsme definovali pojem součtu dvou lineárních zobrazení a přenásobení lineárního zobrazení číslem, součet matic a jejich násobení čísly jsme zatím nedefinovali. Naštěstí zřejmé definice dávají ty správné vlastnosti.

Jmenovitě, pro matice stejného typu $m \times n$ zavedeme jejich *součet* přes součet jejich prvků:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix},$$

tedy $(a_{jk}) + (b_{jk}) := (a_{jk} + b_{jk})$. *Přenásobení číslem* definujeme rovněž po složkách:

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix},$$

tedy $\alpha(a_{jk}) := (\alpha a_{jk})$. Čtenář si snadno ověří, že s takto definovanými operacemi skutečně platí rovnosti (5.2) a (5.3).

Poněvadž jsme zavedli operace součet a přenásobení číslem, neměli byste být překvapeni, že se tu co nevidět objeví vektorový prostor. Označme si symbolem $\mathbb{K}^{m\times n}$ *množinu všech matic* typu $m \times n$, jejichž prvky jsou čísla z tělesa $\mathbb{K}$. S operacemi sčítání a přenásobení číslem definovanými výše se skutečně jedná o vektorový prostor.

Tvrzení 5.5. $\mathbb{K}^{m\times n}$ *je vektorový prostor nad* $\mathbb{K}$.

Podívejme se nyní na matici složeného zobrazení. Za tímto účelem uvažujme tři vektorové prostory $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ a jejich báze $(u_1, \dots, u_p)$, $(v_1, \dots, v_n)$ a $(w_1, \dots, w_m)$. Nechť $S \in \mathscr{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ a $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Složené zobrazení TS je lineární zobrazení z $\mathcal{U}$ do $\mathcal{W}$. Máme tedy takovýto diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & \overset{\dim\mathcal{V}=n}{\mathcal{V}} \arrow[dr, "T"] & \\
\underset{\dim\mathcal{U}=p}{\mathcal{U}} \arrow[ur, "S"] \arrow[rr, "TS"'] & & \underset{\dim\mathcal{W}=m}{\mathcal{W}}
\end{tikzcd}$$

Jak můžeme spočítat matici složeného zobrazení $\mathsf{M}(TS)$ z jednotlivých matic $\mathsf{M}(T)$ a $\mathsf{M}(S)$? Nejhezčí řešení by bylo mít takovýto vztah

$$\mathsf{M}(TS) \stackrel{?}{=} \mathsf{M}(T)\,\mathsf{M}(S)\,. \tag{5.4}$$

Pravá strana rovnice však nedává žádný smysl, poněvadž jsme prozatím nedefinovali součin matic. Definujme nyní tuto operaci, a to právě tak, aby platil vztah (5.4).

Označme si složky jednotlivých matic zobrazení:

$$\mathsf{M}(T) =: \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathsf{M}(S) =: \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}, \quad \mathsf{M}(TS) =: \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}.$$

Potom máme, pro všechna $k = 1, \dots, p$,

$$TSu_k = T\left(\sum_{r=1}^n b_{rk} v_r\right) = \sum_{r=1}^n b_{rk} T v_r = \sum_{r=1}^n b_{rk} \sum_{j=1}^m a_{jr} w_j = \sum_{j=1}^m \Bigg(\underbrace{\sum_{r=1}^n a_{jr} b_{rk}}_{c_{jk}}\Bigg) w_j \,.$$

Z toho vidíme, že $\mathsf{M}(TS)$ je matice typu $m \times p$, jejíž prvek v j-tém řádku a k-tém sloupci je dán vztahem $\sum_{r=1}^n a_{jr} b_{rk}$.

Nyní je jasné, jak definovat *násobení matic*, aby platil vztah (5.4). Máme-li $m \times n$ matici $A = (a_{jk})$ a $n \times p$ matici $B = (b_{jk})$, potom $AB = (c_{jk})$ je matice typu $m \times p$ definovaná prvky

$$c_{jk} := \sum_{r=1}^n a_{jr} b_{rk} \qquad \text{(pro součin matic } C = AB\text{)}. \tag{5.5}$$

Všimněte si, že se sčítá přes indexy, jež spolu sousedí. Tedy prvek c_{jk} matice $C = AB$, jež sedí na průniku j-tého řádku a k-tého sloupce, dostaneme tak, že j-tý řádek matice A "pronásobíme" s k-tým sloupcem matice B, kde pronásobení můžeme chápat jako reálný eukleidovský skalární součin na $\mathbb{R}^n$ vektoru a_j (napsaném do sloupce) s vektorem b^k. Schematicky:

$$\begin{pmatrix} \quad c_{jk} := a_{j1} b_{1k} + \dots + a_{jn} b_{nk} \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{j1} & \dots & a_{jn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix}$$

Dobře si uvědomte, že součin matic definujeme pouze pro matice, kdy počet sloupců první (zleva) matice (A) je roven počtu řádků druhé matice (B), jinak by toto pronásobení nemělo smysl.

Možná jste se s touto definicí násobení matic už setkali v nějakém předchozím kurzu, ale nejspíš jste pro ní neviděli tuto motivaci.

Pozor! Násobení matic není komutativní (najděte si příklad, viz Cvičení 3.7.5). *Komutátor* čtvercových matic A a B můžeme zavést obdobně jako pro zobrazení: $[AB] := AB - BA$.

5.4 Matice vektoru

Definice 5.6. *Maticí vektoru* $v \in \mathcal{V}$ vzhledem k bázi $(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{V}^n$ je matice typu $n \times 1$

$$\mathsf{M}\big(v, (v_1, \dots, v_n)\big) := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

jejíž prvky jsou (jednoznačně) určeny rozkladem

$$v = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n \,.$$

Pokud volba báze je zřejmá z kontextu, budeme označení matice vektoru v opět zkracovat na $\mathsf{M}(v)$.

Následující tvrzení ukazuje, jak pojmy matice lineárního zobrazení, matice vektoru a násobení matic do sebe hezky zapadají.

Tvrzení 5.7. *Nechť je dána báze $(v_1, \dots, v_n)$ prostoru $\mathcal{V}$ a báze $(w_1, \dots, w_m)$ prostoru $\mathcal{W}$. Pro libovolné zobrazení $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ a vektor $v \in \mathcal{V}$ platí*

$$\mathsf{M}(Tv) = \mathsf{M}(T)\mathsf{M}(v) \,.$$

Důkaz. Máme

$$\mathsf{M}(T) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \text{kde} \qquad Tv_k =: \sum_{j=1}^{m} a_{jk} w_j$$

je rozklad do báze pro dané $k = 1, \dots, n$. Obdobně máme

$$\mathsf{M}(v) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad \text{kde} \qquad v =: \sum_{k=1}^{n} b_k v_k \,.$$

Z uvedených rozkladů do báze odvodíme

$$Tv = \sum_{k=1}^{n} b_k T v_k = \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{j=1}^{m} a_{jk} w_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_k \right) w_j \,,$$

z čehož (a definice matice vektoru) vidíme, že

$$\mathsf{M}(Tv) = \begin{pmatrix} a_{11} b_1 + \dots + a_{1n} b_n \\ \vdots \\ a_{m1} b_1 + \dots + a_{mn} b_n \end{pmatrix}.$$

Stejný výsledek však dostaneme, pokud pronásobíme matice $\mathsf{M}(T)$ a $\mathsf{M}(v)$ podle pravidla násobení matic. □

5.5 Izomorfismus

Definice 5.8. Dva vektorové prostory jsou *izomorfní*, pokud existuje invertibilní lineární zobrazení z jednoho prostoru na druhý.

Takovémuto zobrazení budeme říkat *izomorfismus*. Pokud $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ jsou dva *izomorfní* vektorové prostory, píšeme $\mathcal{V} \simeq \mathcal{W}$, což naznačuje, že tyto prostory mají stejné vlastnosti v tom smyslu, že izomorfní zobrazení poskytuje jednoznačné přiřazení mezi prvky jednotlivých prostorů.

Tomu odpovídá i samotná terminologie: Řecké slovo *isos* znamená "stejný" a řecké slovo *morf* znamená "tvar".

Lze se jednoduše přesvědčit o tom, že pokud dva vektorové prostory jsou izomorfní a jeden z nich je konečně dimenzionální, nezbytně i ten druhý musí být konečně dimenzionální. Následující tvrzení ukazuje, že platí mnohem víc.

Věta 5.9. *Platí tato ekvivalence:*

$$\mathcal{V} \simeq \mathcal{W} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W} \,.$$

Důkaz. Opět dokážeme ekvivalenci jako platnost dvou implikací.

$\boxed{\Rightarrow}$ Izomorfnost prostorů podle definice znamená, že existuje invertibilní lineární zobrazení $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$. Poněvadž T je invertibilní, je bijektivní (Věta 3.43), a tudíž $\ker T = \{0\}$ a $\operatorname{ran} T = \mathcal{W}$. Tedy $\dim \ker T = 0$ a $\dim \operatorname{ran} T = \dim \mathcal{W}$. Z Věty 3.35 pak plyne

$$\dim \mathcal{V} = \dim \ker T + \dim \operatorname{ran} T = \dim \mathcal{W} \,,$$

což jsme chtěli ukázat.

$\boxed{\Leftarrow}$ Nechť $(v_1, \ldots, v_n)$ je báze prostoru $\mathcal{V}$ a $(w_1, \ldots, w_n)$ je báze prostoru $\mathcal{W}$. Nechť dále $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ je lineární zobrazení definované předpisem

$$T(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) := a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n \,,$$

kde $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ jsou libovolná čísla. Potom T je surjektivní (jelikož $w_1, \ldots, w_n$ generují $\mathcal{W}$) a injektivní (jelikož $w_1, \ldots, w_n$ jsou lineárně nezávislé). Tedy T je bijektivní, a tudíž invertibilní (Věta 3.43). Zobrazení T je hledaný izomorfismus mezi prostory $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$. $\square$

Důsledkem předchozí věty je naprosto pozoruhodné tvrzení: Každý konečně dimenzionální vektorový prostor $\mathcal{V}$ je izomorfní souřadnicovému prostoru $\mathbb{K}^n$ s $n := \dim \mathcal{V}$. To umožňuje převést řešení jistých úloh v abstraktním prostoru $\mathcal{V}$ na řešení odpovídajících úloh v souřadnicovém prostoru $\mathbb{K}^n$. To může být v mnoha ohledech jednodušší, protože můžeme využít speciálních vlastností prostoru $\mathbb{K}^n$, jenž obecný vektorový prostor nemá (například existenci skalárního součinu).

Proč se tedy vůbec zabývat abstraktními vektorovými prostory? Důvod je ten, že i zkoumání v prostoru $\mathbb{K}^n$ vede k prostorům, jež nejsou rovny $\mathbb{K}^n$ (například jádro či obor hodnot lineárních zobrazení, prostor matic či polynomů); přestože každý z těchto prostorů je sice izomorfní nějakému $\mathbb{K}^m$, tento postřeh zkoumání nijak nezjednoduší.

Zafixujme nějakou bázi $(v_1, \ldots, v_n)$ prostoru $\mathcal{V}$ a bázi $(w_1, \ldots, w_m)$ prostoru $\mathcal{W}$. Definujme zobrazení

$$\mathsf{M} : \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \to \mathbb{K}^{m \times n} : \{T \mapsto \mathsf{M}(T)\} \,. \tag{5.6}$$

Definice součtu matic a přenásobení číslem zaručují, že takto definované zobrazení je lineární. Následující tvrzení ukazuje, že zobrazení M definuje izomorfismus mezi prostorem lineárních zobrazení $\mathscr{L}(\mathcal{V},\mathcal{W})$ a prostorem matic $\mathbb{K}^{m\times n}$.

Tvrzení 5.10. *Zobrazení* M *je izomorfismus.*

Důkaz. Lineárnost jsme už okomentovali, tudíž stačí dokázat, že M je invertibilní. Podle Věty 3.43 stačí ukázat, že M je bijektivní.

Začněme s injektivitou. Pokud $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V},\mathcal{W})$ a $\mathsf{M}(T) = 0$, potom $Tv_k = 0$ pro všechna $k = 1,\dots,n$. Poněvadž $(v_1,\dots,v_n)$ je báze, dostáváme $T = 0$, a tedy M je injektivní.

Abychom ukázali, že M je surjektivní, vezměme matici

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times n}$$

a zobrazení $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V},\mathcal{W})$ splňující

$$Tv_k = \sum_{j=1}^{m} a_{jk} w_j\,, \qquad k = 1,\dots,n\,.$$

Je jasné, že $\mathsf{M}(T) = A$, a tudíž $\mathsf{M} = \mathbb{K}^{m\times n}$, což jsme chtěli ukázat. ☐

Izomorfismus 5.6 je velice silná a užitečná vlastnost. Speciálně nám ukazuje, že pojmy jako jádro, hodnost, obor hodnot, injektivita, surjektivita a invertibilita, jež jsme zavedli pro abstraktní zobrazení $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$, lze zavést i pro matici $\mathsf{M}(T)$, a tedy pro jakoukoli matici z $\mathbb{K}^{m\times n}$ pokud ji chápeme jako zobrazení z $\mathbb{K}^n$ do $\mathbb{K}^m$, viz níže. Je vhodné držet v paměti následující diagram:

$$\begin{tikzcd} \overset{\in\mathcal{V}}{v} \arrow[r, mapsto, "T"] \arrow[d, mapsto, "\mathsf{M}"'] & \overset{\in\mathcal{W}}{w} \arrow[d, mapsto, "\mathsf{M}"] \\ \underset{\in\mathbb{K}^n}{\mathsf{M}(v,(v_1,\dots,v_n))} \arrow[r, mapsto, "\mathsf{M}(T,(v_1,\dots,v_n),(w_1,\dots,w_m))"'] & \underset{\in\mathbb{K}^m}{\mathsf{M}(w,(w_1,\dots,w_m))} \end{tikzcd} \tag{5.7}$$

kde $(v_1,\dots,v_n)$ je báze ve $\mathcal{V}$ a $(w_1,\dots,w_m)$ je báze ve $\mathcal{W}$.

Příklad 5.11. Jako aplikaci uvažujme abstraktní operátorovou rovnici

$$Tv = w\,, \tag{5.8}$$

kde $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V},\mathcal{W})$. Zvolíme-li v prostoru $\mathcal{V}$ bázi $(v_1,\dots,v_n)$ a v prostoru $\mathcal{W}$ bázi $(w_1,\dots,w_m)$, potom izomorfismus 5.6 zaručuje, že vektor $v \in \mathcal{V}$ je řešením (5.8) tehdy a jen tehdy, pokud souřadnicový vektor $\mathsf{M}(v) \in \mathbb{K}^n$ je řešením maticové rovnice

$$\mathsf{M}(T)\mathsf{M}(v) = \mathsf{M}(w)\,. \tag{5.9}$$

Stačí se tedy zabývat pouze rovnicí (5.9), jež je jednodušší než obecná rovnice (5.8). Jak už bylo zmíněno, můžeme například použít speciálních vlastností souřadnicového prostoru $\mathbb{K}^n$, které obecný vektorový prostor nemá (například existenci skalárního součinu). Připomeňme, že pokud složky vektoru v vzhledem k bázi $(v_1,\dots,v_n)$ označíme $x_1,\dots,x_n$, tedy $v = x_1v_1+\cdots+x_nv_n$, složky vektoru w vzhledem k bázi $(w_1,\dots,w_m)$ označíme $y_1,\dots,y_m$, tedy $w = y_1w_1+\cdots+y_my_m$, a prvky matice $\mathsf{M}(T)$ vzhledem k těmto bázím označíme a_{jk}, tedy $Tv_k = a_{1k}w_1+\cdots+a_{mk}w_m$ pro $k=1,\dots,n$, pak (5.9) znamená

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

jež je vám dobře známá soustava lineárních algebraických rovnic. ♢

Jaká je dimenze prostoru matic $\mathbb{K}^{m\times n}$? Zřejmá báze je dána maticemi, jejichž prvky jsou všechny rovny nule, kromě jednoho prvku, jenž je roven jedničce:

$$\begin{matrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.
\end{matrix}$$

Takovýchto matic je mn (m krát n), tedy:

Tvrzení 5.12. $\dim \mathbb{K}^{m\times n} = mn\,.$

Díky tomuto tvrzení a izomorfismu M, dostáváme z Věty 5.9 takovýto důsledek:

Důsledek 5.13. $\dim \mathscr{L}(\mathcal{V},\mathcal{W}) = (\dim \mathcal{V})(\dim \mathcal{W})\,.$

5.6 Hodnost matice

Připomeňme definici hodnosti lineárního zobrazení (3.3). Jak je přirozené definovat hodnost matice? Samozřejmě budeme chtít vyžadovat, aby hodnost zobrazení a hodnost matice tohoto zobrazení daly to samé číslo.

Mějme matici typu $m\times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{jk})_{j=1,\dots,m}^{k=1,\dots,n}\,.$$

Každá takováto matice A nám definuje lineární zobrazení

$$T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m : \{x \mapsto Ax\}\,.$$

Naopak matice lineárního zobrazení T_A vzhledem ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{K}^n$ je rovna A (viz Příklad 5.4). Zřejmě platí

$$\operatorname{ran} T_A = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \right\} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right),$$

kde druhá rovnost plyne z pozorování, že libovolný vektor z $\mathbb{K}^n$ můžeme napsat jako lineární kombinaci vektorů kanonické báze $(e_1, \dots, e_n)$. Následující definice je tedy ta přirozená.

Definice 5.14. *Hodnost* matice $A = (a_{jk})_{j=1,\dots,m}^{k=1,\dots,n}$ je číslo

$$\operatorname{rank} A := \dim \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right).$$

Hodnost matice je tedy maximální počet lineárně nezávislých sloupců matice A.

Konzistenci tohoto pojmu pro matice s dříve zavedeným pojmem hodnosti lineárního zobrazení osvětluje následující tvrzení.

Tvrzení 5.15. *Nechť $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Platí tato rovnost:*

$$\operatorname{rank} T = \operatorname{rank} \mathsf{M}(T).$$

Důkaz. Nechť $(v_1, \dots, v_n)$ je báze prostoru $\mathcal{V}$ a $(w_1, \dots, w_m)$ je báze prostoru $\mathcal{W}$. Funkce, jež přiřazuje vektoru $w \in \operatorname{span}(Tv_1, \dots, Tv_n)$ matici vektoru $\mathsf{M}(w)$, je zřejmě izomorfismus mezi lineárními obaly $\operatorname{span}(Tv_1, \dots, Tv_n)$ a $\operatorname{span}(\mathsf{M}(Tv_1), \dots, \mathsf{M}(Tv_n))$. Tedy

$$\operatorname{rank} T = \dim \operatorname{span}(Tv_1, \dots, Tv_n) = \dim \operatorname{span}\big(\mathsf{M}(Tv_1), \dots, \mathsf{M}(Tv_n)\big) = \operatorname{rank} \mathsf{M}(T),$$

kde první rovnost je důsledkem identity $\operatorname{ran} T = \operatorname{span}(Tv_1, \dots, Tv_n)$ a poslední rovnost plyne z Definice 5.14. □

Všimněte si dobře, že v předchozím tvrzení nevystupují žádné báze. Přestože tvar matice $\mathsf{M}(T)$ závisí na volbě bází v prostorech $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$, rovnost výše ukazuje, že hodnost matice na volbě bází nezávisí (protože $\operatorname{rank} T$ na volbě báze nezávisí).

K čemu je hodnost matice dobrá? Nachází uplatnění zvláště při řešení operátorových rovnic, jak demonstruje následující příklad.

Příklad 5.16 (Soustavy lineárních algebraických rovnic, Frobeniova věta)**.** Uvažujme soustavu lineárních algebraických rovnic (viz Příklady 3.40 a 3.46)

$$Ax = y \tag{5.10}$$

a odpovídající homogenní soustavu

$$Ax = 0\,, \tag{5.11}$$

kde používáme maticové zápisy

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Z Příkladu 3.40 už víme, že (5.11) má netriviální řešení, pokud $n > m$; a že existuje volba y, pro níž (5.10) není řešitelná, pokud $n < m$. Z Příkladu 3.46 pro $n = m$ víme, že nastávají dvě možnosti: (i) buď rovnice (5.10) má řešení pro každé y, a to právě jedno, a rovnice (5.11) má pouze triviální řešení; nebo (ii) rovnice (5.11) má netriviální řešení a rovnice (5.10) nemá řešení pro každé y.

V případě, kdy (5.11) má netriviální řešení, kolik takových řešení je? Odpověď je jednoduchá. Stačí si uvědomit, že množina všech řešení rovnice (5.11) je podprostor $\ker A \subset\subset \mathbb{K}^n$ a že máme (z Věty 3.35 a Tvrzení 5.15)

$$\dim \ker A = n - \operatorname{rank} A\,.$$

Tedy počet řešení homogenní rovnice (5.11) je roven počtu sloupců matice A minus hodnost matice A. Speciálně pokud $\operatorname{rank} A = n$, (5.11) má pouze triviální řešení.

Obdobně, pokud je y v (5.10) dáno, jak rozhodnout, zda je soustava řešitelná? Za tímto účelem definujme *rozšířenou matici* soustavy (5.10) takovýmto způsobem

$$(A, y) := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & y_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & y_m \end{pmatrix}.$$

Potom platí tzv. Frobeniova věta:

$$\boxed{\text{soustava (5.10) je řešitelná} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A, y).}$$

Důkaz. Soustavu (5.10) můžeme zapsat ve tvaru

$$\sum_{j=1}^{n} x_j a^j = y\,, \qquad \text{kde} \qquad a^j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

je j-tý sloupec matice A. Odtud je vidět, že soustava (5.10) má řešení tehdy a jen tehdy, když

$$y \in \operatorname{span}(a^1, \dots, a^n)\,. \tag{5.12}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Platí-li (5.12), pak $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A, y)$, poněvadž lineární obal se nezmění, vynecháme-li prvek, který je lineární kombinací ostatních.

$\boxed{\Leftarrow}$ Je-li naopak $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A, y)$, tedy

$$\dim \operatorname{span}(a^1, \dots, a^n) = \dim \operatorname{span}(a^1, \dots, a^n, y)\,,$$

pak nezbytně máme (5.12). Skutečně, kdyby to nebyla pravda, byly by vektory $a^{j_1}, \dots, a^{j_k}, y$ pro nějakou volbu $1 \le j_1 < \dots < j_k \le n$ lineárně nezávislé, kde $a^{j_1}, \dots, a^{j_k}, y$ je báze v $\operatorname{span}(a^1, \dots, a^n)$, a tedy by platilo

$$\dim \operatorname{span}(a^{j_1}, \dots, a^{j_k}, y) = \dim \operatorname{span}(a^1, \dots, a^n) + 1\,,$$

což nemůže být pravda. $\square$

$\diamondsuit$

5.7 Transpozice

Definujme si nyní matici, jež dostaneme z dané matice prohozením řádků a sloupců.

Definice 5.17. *Transponovaná* matice k matici $A = (a_{jk})_{j=1,\dots,m}^{k=1,\dots,n}$ je matice $A^T = (a_{kj}^T)_{k=1,\dots,n}^{j=1,\dots,m}$ definovaná vztahy

$$a_{kj}^T := a_{jk}$$

kde $j = 1, \dots, m$ a $k = 1, \dots, n$.

Všimněte si, že pokud je matice A typu $m \times n$, pak transponovaná matice A^T je typu $n \times m$. Schematicky:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kde schválně píšeme matice obdélníkového tvaru, aby bylo jasné, jak se mění při transpozici typ matice.

Následující tvrzení nám říká, jak se transpozice matice chová vůči základním operacím na maticích.

Tvrzení 5.18. *Platí tyto vztahy:*

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & \forall A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}, & (A+B)^T = A^T + B^T\,; \\ \text{(ii)} & \forall A \in \mathbb{K}^{m\times n},\ \alpha \in \mathbb{K}, & (\alpha A)^T = \alpha A^T\,; \\ \text{(iii)} & \forall A \in \mathbb{K}^{m\times n},\ B \in \mathbb{K}^{n\times p}, & (AB)^T = B^T A^T\,. \end{array}$$

Důkaz. Důkaz tvrzení (i) a (ii) přenecháváme čtenáři. Dokažme si pouze zajímavou vlastnost (iii). Pišme prvky matic, co nás zajímají, ve tvaru

$$A = (a_{jk})_{j=1,\dots,m}^{k=1,\dots,n}\,, \qquad B = (b_{jk})_{j=1,\dots,n}^{k=1,\dots,p}\,,$$
$$C := AB = (c_{jk})_{j=1,\dots,m}^{k=1,\dots,p}\,, \qquad D := B^T A^T = (d_{jk})_{j=1,\dots,p}^{k=1,\dots,m}\,.$$

Podle definice součinu matic (viz (5.5)) a Definice 5.17 máme

$$c_{kj}^T = c_{jk} = \sum_{r=1}^{n} a_{jr} b_{rk}\,, \qquad d_{kj} = \sum_{s=1}^{n} b_{ks}^T a_{sj}^T = \sum_{s=1}^{n} b_{sk} a_{js}\,.$$

Zřejmě platí $c_{kj}^T = d_{kj}$ pro všechna $k = 1, \dots, p$ a $j = 1, \dots, m$. $\square$

5.8 Sdružení

Definice 5.19. *Sdružená* matice k matici $A = (a_{jk})_{j=1,\dots,m}^{k=1,\dots,n}$ je matice $A^* = (a^*_{kj})_{k=1,\dots,n}^{j=1,\dots,m}$ definovaná vztahy

$$a^*_{kj} := \overline{a^T_{kj}}$$

kde $j = 1, \dots, m$ a $k = 1, \dots, n$.

Sdruženou matici A^* tedy dostaneme tak, že nejdříve zkonstruujeme transponovanou matici A^T a pak každý prvek matice A^T komplexně sdružíme (nebo samozřejmě můžeme postupovat v opačném pořadí). Připomeneme-li Definici 5.17 transponované matice, máme zřejmý vztah $a^*_{kj} := \overline{a_{jk}}$. Rozumíme-li symbolem $\overline{A}$ matici, jež dostaneme z matice A tak, že všechny její prvky komplexně sdružíme, máme snadno zapamatovatelný vztah

$$A^* = \overline{A}^T = \overline{A^T}\,.$$

Schematicky:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \dots & \overline{a_{m1}} \\ \overline{a_{12}} & \dots & \overline{a_{m2}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \dots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix}.$$

Následující tvrzení nám ukazuje, že definice sdružené matice je konzistentní s dříve zavedeným pojmem sdruženého zobrazení (viz Definice 4.31). Tedy matice sdruženého zobrazení je rovna sdružené matici původního zobrazení.

Tvrzení 5.20. *Nechť $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, kde $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ jsou vektorové prostory se skalárním součinem. Nechť $(v_1, \dots, v_n)$ je ortonormální báze ve $\mathcal{V}$ a $(w_1, \dots, w_m)$ je ortonormální báze ve $\mathcal{W}$. Pak platí vztah*

$$\mathsf{M}\big(T^*, (w_1, \dots, w_m), (v_1, \dots, v_n)\big) = \mathsf{M}\big(T, (v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_m)\big)^*\,.$$

Důkaz. Použijme zkratkovitá označení

$$\begin{aligned} \mathsf{M}(T) &:= \mathsf{M}\big(T, (v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_m)\big) =: (a_{jk})_{j=1,\dots,m}^{k=1,\dots,n}\,, \\ \mathsf{M}(T^*) &:= \mathsf{M}\big(T^*, (w_1, \dots, w_m), (v_1, \dots, v_n)\big) =: (b_{kj})_{k=1,\dots,n}^{j=1,\dots,m}\,. \end{aligned}$$

Připomeňme, že k-tý sloupec matice $\mathsf{M}(T)$ dostaneme tak, že Tv_k napíšeme jako lineární kombinaci vektorů $w_1, \dots, w_m$; koeficienty této lineární kombinace jsou pak přesně ta čísla, jež tvoří k-tý sloupec matice $\mathsf{M}(T)$. Poněvadž $(w_1, \dots, w_m)$ je ortonormální báze ve $\mathcal{W}$, víme, jak psát Tv_k jako lineární kombinaci vektorů $w_1, \dots, w_m$ (viz (4.10)):

$$Tv_k = \langle w_1, Tv_k \rangle w_1 + \dots + \langle w_m, Tv_k \rangle w_m\,.$$

Z toho dostáváme výraz pro prvek v j-tém řádku a k-tém sloupci matice $\mathsf{M}(T)$:

$$a_{jk} = \langle w_j, Tv_k \rangle\,.$$

Obdobným postupem (nebo stačí jen prohodit role T a $v_1, \dots, v_n$ na jedné straně s rolemi T^* a $w_1, \dots, w_m$ na druhé straně) dostaneme

$$b_{jk} = \langle v_j, T^* w_k \rangle = \langle T v_j, w_k \rangle = \overline{\langle w_k, T v_j \rangle}\,,$$

kde druhá rovnost plyne z definice sdruženého zobrazení a třetí rovnost plyne z vlastností skalárního součinu. Tedy platí

$$b_{jk} = \overline{a_{kj}} = \overline{a^T_{jk}} = a^*_{jk}\,,$$

což jsme chtěli dokázat. □

Pro platnost předešlého tvrzení je naprosto kruciální, že uvažujeme ortonormální báze. Na druhou stranu pojem sdruženého zobrazení je nezávislý na volbě báze. Z tohoto důvodu budeme upřednostňovat sdružená lineární zobrazení, namísto sdružených matic.

Důležitým důsledkem jsou následující tvrzení.

Věta 5.21. *$\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}$,*

(i) $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^*$*;*

(ii) $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T$*.*

Důkaz. Uvažujme zobrazení

$$T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m : \{x \mapsto Ax\}\,,$$
$$T_{A^*} : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n : \{\xi \mapsto A^*\xi\}\,.$$

Vzhledem ke kanonickým bázím prostorů $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^m$ dostáváme z Tvrzení 5.20 vztah

$$\mathsf{M}({T_A}^*) = \mathsf{M}(T_A)^* = A^* = \mathsf{M}(T_{A^*})\,.$$

Poněvadž zobrazení $\mathsf{M} : \mathscr{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n) \to \mathbb{K}^{n\times m}$ je izomorfismus, platí

$${T_A}^* = T_{A^*}\,.$$

Z toho následně dostáváme výsledek

$$\operatorname{rank} T_{A^*} = \operatorname{rank} {T_A}^* = \operatorname{rank} T_A\,,$$

kde druhá rovnost plyne z abstraktního Důsledku 4.35(i). K ověření platnosti tvrzení (i) si stačí uvědomit, že hodnost matice A jsme definovali právě jako hodnost (=dimenze oboru hodnot) odpovídajícího zobrazení T_A (viz Definice 5.14). Druhé tvrzení (ii) pak plyne okamžitě z rovnosti $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A}$, jež platí pro libovolnou matici A (ověřte si). □

Hodnost matice A je tedy rovna maximálnímu počtu lineárně nezávislých sloupců (podle Definice 5.14) a zároveň maximálnímu počtu lineárně nezávislých řádků (podle předešlé Věty 5.21(ii)).

Důsledek 5.22. $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}$,

$$\operatorname{rank} A \leq \min\{m, n\}\,.$$

5.9 Cvičení

1. Spočtěte součin matic
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   [$\left(\begin{smallmatrix} 10 & 7 & 4 & 1 \\ 26 & 19 & 12 & 5 \\ 42 & 31 & 20 & 9 \end{smallmatrix}\right)$.]

2. Rozhodněte, které z následujících maticových součinů má smysl, a v případě, že smysl má, součin spočítejte.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ 7 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & i \\ 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ e^i & 0 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ 7 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$,

   (c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \\ 7 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ e^i \end{pmatrix}$,

   (e) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 4 & i \end{pmatrix}$.

   [(a), (b), (d), (e) mají smysl, ostatní ne.]

3. Uvažujte matici
$$A_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$
   kde $\theta \in \mathbb{R}$. Ukažte, že platí vztah
$$\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, \qquad A_{\theta_2} A_{\theta_1} = A_{\theta_1+\theta_2}\,.$$
   Interpretujte geometricky (viz Cvičení 3.7.4).

4. Dokažte, že distributivní vlastnost platí pro součet a násobení matic. Jinými slovy, nechť A, B, C jsou matice takové, že výraz $A(B+C)$ má smysl. Dokažte, že potom $AB + AC$ má smysl a že platí
$$A(B+C) = AB + AC\,.$$

5. Dokažte, že násobení matic je asociativní. Jinými slovy, nechť A, B, C jsou matice takové, že výraz $(AB)C$ má smysl. Dokažte, že potom $A(BC)$ má smysl a že platí
$$(AB)C = A(BC)\,.$$

6. Dokažte, že násobení matic není komutativní.

   [*Hint:* Spočtěte komutátor matic $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ a $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, viz Příklad 3.11.]

7. Uvažujte lineární zobrazení
$$T : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2 : \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} \right\},$$
kde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{K}$ jsou daná čísla. Najděte matici zobrazení T vůči těmto bázím v $\mathbb{K}^2$ (výchozí i cílový prostor zobrazení):
   (a) $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ (kanonická báze);
   (b) $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$;
   (c) $\left(\begin{smallmatrix} i \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ i \end{smallmatrix}\right)$.

   [(a) $\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$; (b) $\left(\begin{smallmatrix} a_{11}-a_{21} & a_{11}+a_{12}-a_{21}-a_{22} \\ a_{21} & a_{21}+a_{22} \end{smallmatrix}\right)$; (c) $\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$.]

8. Uvažujte lineární zobrazení
$$T : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^3 : \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \end{pmatrix} \right\},$$
kde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32} \in \mathbb{K}$ jsou daná čísla. Najděte matici zobrazení T vůči těmto bázím:
   (a) $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ pro $\mathbb{K}^2$ a $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ pro $\mathbb{K}^3$ (kanonické báze);
   (b) $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ pro $\mathbb{K}^2$ a $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ pro $\mathbb{K}^3$.

   [(a) $\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$; (b) $\left(\begin{smallmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{12} \\ a_{21}+a_{22} & a_{22} \\ a_{31}+a_{32} & a_{32} \end{smallmatrix}\right)$.]

9. Uvažujte matici
$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$
a odpovídající zobrazení $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \{x \mapsto Ax\}$.
   (a) Spočtěte jádro, jeho dimenzi, obor hodnot a hodnost zobrazení T_A a hodnost matice A.

   [$\ker T_A = \operatorname{span}\left(\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$, $\dim\ker T_A = 1$, $\operatorname{ran} T_A = \operatorname{span}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)\right)$, $\operatorname{rank} T_A = \operatorname{rank} A = 2$.]

   (b) Najděte sdruženou matici A^* a definujte odpovídající zobrazení T_{A^*}. Spočtěte jádro, jeho dimenzi, obor hodnot a hodnost zobrazení T_{A^*} a hodnost matice A^*.

   [$\ker T_{A^*} = \operatorname{span}\left(\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$, $\dim\ker T_{A^*} = 1$, $\operatorname{ran} T_{A^*} = \operatorname{span}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)\right)$, $\operatorname{rank} T_{A^*} = \operatorname{rank} A^* = 2$.]

   (c) Rozhodněte, zda soustava $Ax = y$ je řešitelná pro
$$y := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right),$$
   a to (i) přímým výpočtem, (ii) užitím Frobeniovy věty a (iii) užitím Fredholmovy věty. Je-li řešitelná, najděte řešení.

   [Soustava není řešitelná; (ii) $\operatorname{rank}(A, y) = 3$; (iii) $y \notin (\ker T_{A^*})^\perp$.]

(d) Stejné zadání jako v předchozím bodě, avšak pro pravou stranu

$$y := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[Soustava je řešitelná; (ii) $\operatorname{rank}(A, y) = 2$; (iii) $y \in (\ker T_{A^*})^\perp$. Řešením jsou prvky množiny $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$.]

6 Determinanty

Tato kapitolka není logickým pokračováním předchozích, avšak bude užitečná pro praktické výpočty s vektory a maticemi (zkoumání lineární závislosti a nezávislosti vektorů, hodnosti matice, řešení soustavy lineárních algebraických rovnic). Hlubšímu porozumění determinantu coby invariantu lineárního zobrazení dosáhneme až na konci této kapitolky.

V této kapitolce budeme uvažovat pouze čtvercové matice typu $n \times n$, jež budeme genericky značit

$$\boxed{A := (a_{jk})_{j,k=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},}$$

kde $n \in \mathbb{N}^*$ a $a_{jk} \in \mathbb{K}$, $j, k = 1, \dots, n$.

Diagonálou čtvercové matice A budeme rozumět prvky matice, jež leží na šikmé čáře, jež jde z levého horního rohu do pravého dolního rohu, tedy m-tici čísel

$$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} .$$

6.1 Inverzní matice

Začněme představením ještě jedné operace na prostoru matic, která nám poslouží jako motivace pro zavedení pojmu determinantu.

Jak definovat *inverzní matici* ke čtvercové matici A? Přirozené je chápat matici A jako lineární zobrazení T_A na souřadnicovém prostoru definované předpisem

$$T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\}. \tag{6.1}$$

Připomeňme (viz Příklad 5.4), že matice tohoto zobrazení T_A vzhledem ke kanonické bázi $(e_1, \dots, e_n)$ prostoru $\mathbb{K}^n$ je rovna právě matici A, tedy $\mathsf{M}(T_A) = A$. Avšak pro lineární zobrazení jsme inverzní zobrazení definovali (viz Definice 3.41): je to lineární zobrazení T_A^{-1} splňující

$$T_A^{-1} T_A = I = T_A T_A^{-1} , \tag{6.2}$$

kde I je identické zobrazení na $\mathbb{K}^n$, t.j.

$$I : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\}.$$

Z tohoto předpisu vidíme, že matice identického zobrazení I vzhledem ke kanonické bázi $(e_1, \dots, e_n)$ splňuje

$$\mathsf{M}(I) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} =: I , \tag{6.3}$$

kde na pravé straně vystupuje matice, jež má na diagonále samé jedničky a všechny ostatní prvky jsou rovny nule. Jak ukazuje poslední (definiční) rovnost, tuto matici budeme schismaticky opět označovat symbolem I. Aplikací izomorfismu $\mathsf{M} : \mathscr{L}(\mathbb{K}^n) \to \mathbb{K}^{n\times n}$ na rovnosti v (6.4) a připomenutím, že maticové násobení je konzistentní se skládáním zobrazení (viz (5.4)), dostáváme maticové rovnosti

$$A^{-1}A = I = AA^{-1}\,, \tag{6.4}$$

kde $A^{-1} := \mathsf{M}(T_A^{-1})$ je pouhé značení. Toto vše vede k následující přirozené definici.

Definice 6.1. Matice $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ je *invertibilní*, pokud existuje matice $A^{-1} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ taková, že

$$A^{-1}A = I \qquad \text{a} \qquad AA^{-1} = I\,.$$

Matici A^{-1} říkáme *inverzní* matice k matici A.

Stejně jako v Tvrzení 3.42 lze snadno ukázat, že pokud matice A je invertibilní, pak má právě jednu inverzní matici A^{-1} (a tudíž jednotné značení A^{-1} v Definici 6.1 je smysluplné).

Z identity (5.4) plyne, že matice A je invertibilní tehdy a jen tehdy, pokud zobrazení T_A je invertibilní. Navíc máme vztah

$$\mathsf{M}(T_A^{-1}) = A^{-1} = \mathsf{M}(T_{A^{-1}})\,,$$

kde matice zobrazení bereme jako výše vhledem ke kanonické bázi $(e_1, \dots, e_n)$.

Je-li dána matice A, jak rozhodnout, zda je invertibilní? Pokud je invertibilní, jak k ní najít inverzní matici A^{-1}? Tato úloha vede k uvažování soustavy lineárních algebraických rovnic, již můžeme zapsat ve tvaru

$$Ax = y\,,$$

kde $y \in \mathbb{K}^n$ je n-tice daných čísel a $x \in \mathbb{K}^n$ je n-tice neznámých. Z abstraktní Věty 3.44 plyne, že tato soustava je řešitelná pro všechny vektory y tehdy a jen tehdy, pokud A je invertibilní. V takovémto případě je pak řešení dáno předpisem

$$x = A^{-1}y\,.$$

Umění rozhodnout, zda je daná matice invertibilní, a spočtení její inverze jsou tedy fundamentální dovednosti pro řešení soustav lineárních algebraických rovnic. Pojem determinantu tyto dovednosti elegantně mechanizuje. Podívejme se nyní, jak to funguje v dvojrozměrném případě.

6.2 Dvojdimenzionální Cramerovo pravidlo

Uvažujme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= y_1\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= y_2\,, \end{aligned} \tag{6.5}$$

kde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, y_1, y_2 \in \mathbb{K}$ jsou daná čísla a $x_1, x_2 \in \mathbb{K}$ jsou neznámé, které hledáme. Tento systém můžeme zapsat v maticovém tvaru jako

$$Ax = y\,, \qquad \text{kde} \qquad A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Vynásobíme-li první rovnici v (6.5) číslem a_{22}, druhou rovnici číslem a_{12} a vzniklé rovnice odečteme, dostaneme rovnost

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = a_{22}y_1 - a_{12}y_2 \,.$$

Je-li

$$\det A := a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0 \,, \tag{6.6}$$

pak

$$x_1 = \frac{a_{22}y_1 - a_{12}y_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \,. \tag{6.7}$$

Analogicky bychom dostali

$$x_2 = \frac{a_{11}y_2 - a_{21}y_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \,. \tag{6.8}$$

Označíme-li

$$A_1 := \begin{pmatrix} y_1 & a_{12} \\ y_2 & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad A_2 := \begin{pmatrix} a_{11} & y_1 \\ a_{21} & y_2 \end{pmatrix},$$

můžeme výsledky (6.7) a (6.8) elegantně zapsat ve tvaru

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \,, \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} \,. \tag{6.9}$$

Vzorcům (6.9) se říká *Cramerovo pravidlo* a $\det A$ se nazývá *determinant* matice A typu 2×2.

Jelikož řešení x splňuje $x = A^{-1}y$ (pokud je A invertibilní), z uvedených výsledků vidíme, že A je invertibilní tehdy a jen tehdy, pokud $\det A \neq 0$. Navíc platí užitečný (a snadno zapamatovatelný) vzorec pro inverzní matici

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \tag{6.10}$$

V následujícím si ukážeme, jak zavést pojem determinantu pro čtvercovou matici libovolného stupně. Později se přesvědčíme, že nenulovost determinantu je ekvivalentní invertibilitě, pro libovolně velkou matici.

6.3 Definice

Determinant si zadefinujeme indukcí podle stupně příslušné matice.

Definice 6.2. $\boxed{n = 1}$ Pro matici $A = (a_{11})$ stupně 1 definujeme $\det A := a_{11}$.

$\boxed{n \geq 2}$ Pro matici $A = (a_{jk})_{j,k=1,\ldots,n}$ stupně $n \geq 2$ definujeme

$$\det A := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \, a_{1k} \, \det A_{1k} \,, \tag{6.11}$$

kde A_{1k} je matice vytvořená z matice A vyškrtnutím 1. řádku a k-tého sloupce.

Matice A_{1k} (stupně $n-1$) se nazývá *dílčí matice*. Schematicky:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k-1} & a_{1k} & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2k-1} & a_{2k} & a_{2k+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk-1} & a_{nk} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{21} & \dots & a_{2k-1} & a_{2k+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk-1} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A_{1k}} .$$

Pro matici $A = (a_{11})$ stupně 1 definujeme dílčí matici vztahem $A_{11} := (1)$. Potom platnost vztahu (6.11) můžeme rozšířit i pro $n = 1$.

Obecná Definice 6.2 je konzistentní s definicí (6.6) pro $n = 2$. Pro $n = 3$ dostáváme

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11}) . \end{aligned}$$

Tento vzorec se dá zapamatovat podle tzv. *Sarrusova pravidla* (zde prezentovaného pomocí RGB zbarvení):

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \qquad - \qquad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

6.4 Prohazování řádků

Z definice determinantu pro matice stupně $n = 2$ (viz (6.6)) vidíme, že velikost determinantu se nezmění při záměně řádků v matici, avšak změní se znaménko. Toto je obecná vlastnost determinantů, jak ukazuje následující tvrzení.

Tvrzení 6.3. *Nechť A je matice stupně $n \geq 2$. Nechť $\tilde{A}$ je matice, kterou dostaneme z A, vyměníme-li mezi sebou j-tý a $(j+1)$-tý řádek $(1 \leq j \leq n-1)$. Potom platí*

$$\det \tilde{A} = -\det A .$$

Důkaz. Vzhledem k tomu, jak jsme obecný determinant zavedli (viz Definice 6.2), je přirozené tvrzení dokázat pomocí indukce. Pro $n = 2$ jsme už zmínili, že tvrzení platí. Nechť $n \geq 3$. Dokažme, že platí-li tvrzení pro $n-1$, pak platí pro n.

$\boxed{j > 1}$ Podle Definice 6.2 máme

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} \det A_{1k} , \tag{6.12}$$

$$\det \tilde{A} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} \det \tilde{A}_{1k} , \tag{6.13}$$

kde

$$A_{1k} = \begin{pmatrix} a_{21} & \dots & a_{2k-1} & a_{2k+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jk-1} & a_{jk+1} & \dots & a_{jn} \\ a_{j+11} & \dots & a_{j+1k-1} & a_{j+1k+1} & \dots & a_{j+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk-1} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{6.14}$$

$$\tilde{A}_{1k} = \begin{pmatrix} a_{21} & \dots & a_{2k-1} & a_{2k+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j+11} & \dots & a_{j+1k-1} & a_{j+1k+1} & \dots & a_{j+1n} \\ a_{j1} & \dots & a_{jk-1} & a_{jk+1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk-1} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{6.15}$$

Matice A_{1k} a $\tilde{A}_{1k}$ jsou tedy nižšího stupně $n-1$ a s prohozenými řádky $j-1$ a j, pro něž platí indukční předpoklad

$$\det \tilde{A}_{1k} = -\det A_{1k}\,.$$

Dosazením této rovnosti do (6.13) a užitím (6.12) dostaneme požadované tvrzení $\det \tilde{A} = -\det A$ pro matici A stupně n.

$\boxed{j=1}$ Podle Definice 6.2 máme

$$\det \tilde{A} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\, a_{2k}\, \det \hat{A}_{1k}\,, \tag{6.16}$$

kde

$$\hat{A}_{1k} := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k-1} & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & \dots & a_{3k-1} & a_{3k+1} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j+11} & \dots & a_{j+1k-1} & a_{j+1k+1} & \dots & a_{j+1n} \\ a_{j1} & \dots & a_{jk-1} & a_{jk+1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk-1} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{6.17}$$

Podíváme se na matici (6.14) a snadno ověříme vztah

$$\begin{aligned} \det A_{1k} &= a_{21} \det A_{1k}^{21} - a_{22} \det A_{1k}^{22} + \dots \\ &\quad + (-1)^k a_{2k-1} \det A_{1k}^{2k-1} + (-1)^{k+1-1} a_{2k+1} \det A_{1k}^{2k+1} + \dots \\ &\quad + (-1)^{n+1-1} a_{2n} \det A_{1k}^{2n} \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} a_{2j} \det A_{1k}^{2j} - \sum_{j=k+1}^{n} (-1)^{j+1} a_{2j} \det A_{1k}^{2j}\,, \end{aligned} \tag{6.18}$$

kde matici A_{1k}^{2j} dostaneme z matice A vyškrtnutím 1. a 2. řádku a j-tého a k-tého sloupce.

Na druhou stranu se podíváme na matici (6.17) a ověříme vztah

$$
\begin{aligned}
\det \hat{A}_{1k} &= a_{11} \det A_{1k}^{21} - a_{12} \det A_{1k}^{22} + \dots \\
&\quad + (-1)^k a_{1k-1} \det A_{1k}^{2k-1} + (-1)^{k+1-1} a_{1k+1} \det A_{1k}^{2k+1} + \dots \\
&\quad + (-1)^{n+1-1} a_{1n} \det A_{1k}^{2n} \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} a_{1j} \det A_{1k}^{2j} - \sum_{j=k+1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \det A_{1k}^{2j} .
\end{aligned} \tag{6.19}
$$

Dosazením vztahu (6.18) do (6.12) a vztahu (6.19) do (6.16) dostaneme

$$
\begin{aligned}
\det A &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} \left(\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} a_{2j} \det A_{1k}^{2j} - \sum_{j=k+1}^{n} (-1)^{j+1} a_{2j} \det A_{1k}^{2j} \right) \\
&=: \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \alpha_{jk} a_{1k} a_{2j} ,
\end{aligned} \tag{6.20}
$$

$$
\begin{aligned}
\det \tilde{A} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{2k} \left(\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} a_{1j} \det A_{1k}^{2j} - \sum_{j=k+1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \det A_{1k}^{2j} \right) \\
&=: \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \beta_{jk} a_{2k} a_{1j} .
\end{aligned} \tag{6.21}
$$

Užitím těchto definičních vztahů, pro koeficienty α_{jk} a β_{jk} platí

$$
\alpha_{jk} = \begin{cases} (-1)^{k+1} \det A_{1k}^{2j} & \Leftrightarrow j < k , \\ -(-1)^{k+1} \det A_{1k}^{2j} & \Leftrightarrow j > k , \end{cases} \qquad \beta_{jk} = \begin{cases} (-1)^{k+1} \det A_{1k}^{2j} & \Leftrightarrow j < k , \\ -(-1)^{k+1} \det A_{1k}^{2j} & \Leftrightarrow j > k . \end{cases}
$$

Poněvadž $A_{1k}^{2j} = A_{1j}^{2k}$ $(j \neq k)$, zřejmě platí (pro všechna $j, k = 1, \dots, n$, $j \neq k$)

$$
\beta_{kj} = -\alpha_{jk} .
$$

Užitím těchto vztahů v (6.20) a (6.21) dostáváme požadovanou rovnost

$$
\det \tilde{A} = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j\neq k}}^{n} \beta_{jk} a_{2k} a_{1j} = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j\neq k}}^{n} \beta_{kj} a_{2j} a_{1k} = - \sum_{\substack{j,k=1 \\ j\neq k}}^{n} \alpha_{jk} a_{2j} a_{1k} = - \det A .
$$

Zde druhá rovnost je pouhá záměna indexů, přes které se sčítá. □

Jako důsledek Tvrzení 6.3 dostáváme toto obecnější tvrzení:

Tvrzení 6.4. *Nechť A je matice stupně $n \geq 2$. Nechť $\tilde{A}$ je matice, kterou dostaneme z A, vyměníme-li mezi sebou j-tý a i-tý řádek $(1 \leq j \neq i \leq n)$. Potom platí*

$$
\det \tilde{A} = - \det A .
$$

Důkaz. Tuto výměnu můžeme realizovat postupnou záměnou dvou sousedících řádků, a to pomocí *lichého* počtu takovýchto záměn. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $i < j$. Pak vyměníme i-tý řádek s $(i+1)$-tým, pak s $(i+2)$-tým atd., až nakonec s $i+(j-i)$-tým; k tomu tedy potřebujeme celkem $j-i$ záměn sousedících řádků. Potom j-tý řádek původní matice, který je nyní $(j-1)$-tý, přesuneme na i-té místo; k tomu potřebujeme $(j-1)-i$ záměn sousedících řádků. Celkový počet požadovaných záměn sousedících řádků je

$$j - i + (j-1) - i = 2(j-i) - 1 \;\in\; 2\mathbb{N}^* - 1\,.$$

Opakovaným užitím Tvrzení 6.3 tedy dostáváme

$$\det \tilde{A} = (-1)^{2(j-i)-1} \det A = -\det A\,,$$

což jsme chtěli ukázat. □

Důsledek 6.5. *Má-li matice A dva řádky stejné, platí* $\det A = 0$.

Důkaz. Označme symbolem $\tilde{A}$ matici, kterou dostaneme z matice A prohozením těchto dvou stejných řádků. Podle předešlého Tvrzení 6.4 bude platit $\det \tilde{A} = -\det A$. Poněvadž se však jedná o *stejné* řádky, platí $\tilde{A} = A$, a tudíž $\det \tilde{A} = \det A$. Nakonec tedy dostáváme $\det A = -\det A$, z čehož plyne $\det A = 0$. □

6.5 Rozklad podle řádků

Připomeňme, že značením A_{1k} jsme označili matici, jíž dostaneme z matice A vyškrtnutím 1. řádku a k-tého sloupce. Obecněji budeme značit symbolem A_{jk} matici, jíž dostaneme z matice A vyškrtnutím j-tého řádku a k-tého sloupce.

Definice 6.6. *Kofaktorová matice* odpovídající matici $A = (a_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$ je matice

$$\operatorname{cof} A := (a^{jk})_{j,k=1,\dots,n}\,, \qquad \text{kde} \qquad a^{jk} := (-1)^{j+k} \det A_{jk}\,.$$

Číslo a^{jk} se nazývá *kofaktorem* (nebo též *algebraickým doplňkem*) prvku a_{jk} matice A. Číslo $\det A_{jk}$ se nazývá *minorem* prvku a_{jk} matice A.

Příklad 6.7. Pro matici 2×2 zřejmě máme

$$\operatorname{cof} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

◊

Věta 6.8 (Rozklad determinantu podle řádků)**.**

$$\forall j = 1, \dots, n, \qquad \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, a^{jk}\,.$$

Důkaz. Pro $j = 1$ to je přímo Definice 6.2. Nechť $j \geq 2$. Označme $\tilde{A}$ matici, kterou dostaneme z A záměnou 1. a j-tého řádku. Pak platí (Tvrzení 6.4)

$$\det \tilde{A} = -\det A\,. \tag{6.22}$$

Podle Definice 6.2 máme

$$\det \tilde{A} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\, a_{jk}\, \det \tilde{A}_{1k}\,. \tag{6.23}$$

Avšak dílčí matice A_{jk} se od $\tilde{A}_{1k}$ liší pouze tím, že 1. řádek v A_{jk} je $(j-1)$-tým řádkem v $\tilde{A}_{1k}$. Matici A_{jk} tedy dostaneme z $\tilde{A}_{1k}$ tak, že $(j-1)$-tý řádek přemístíme na 1. místo, což se dá uskutečnit $(j-2)$-ma záměnami sousedících řádků. Podle Tvrzení 6.3 tedy máme

$$\det \tilde{A}_{1k} = (-1)^{j}\, \det A_{jk}\,.$$

Dosazením tohoto vztahu do (6.23) a užitím (6.22) dostáváme

$$\det A = -\sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k+1}\, a_{jk}\, \det A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k}\, a_{jk}\, \det A_{jk}\,,$$

což je požadované tvrzení užitím definice kofaktoru. □

Z Věty 6.8 dostáváme následující zřejmé důsledky.

Důsledek 6.9. *Má-li matice A jeden řádek nulový, platí* $\det A = 0$. *Tedy*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = 0\,.$$

Důsledek 6.10. *Označíme-li symbolem $\tilde{A}$ matici, kterou dostaneme z matice A tak, že jeden řádek přenásobíme číslem $\alpha \in \mathbb{K}$, pak platí* $\det \tilde{A} = \alpha \det A$. *Tedy*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{j1} & \dots & \alpha a_{jk} & \dots & \alpha a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jk} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Důsledek 6.11. *Je-li j-tý řádek matice C tvaru $a_{j1} + b_{j1}, \dots, a_{jn} + b_{jn}$, matice A má j-tý řádek rovný $a_{j1}, \dots, a_{jn}$, matice B má j-tý řádek rovný $b_{j1}, \dots, b_{jn}$, zatímco ostatní řádky* *matic A a B jsou stejné jako matice C, pak platí* $\det C = \det A + \det B$. *Tedy*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+b_{j1} & \dots & a_{jk}+b_{jk} & \dots & a_{jn}+b_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jk} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & \dots & b_{jk} & \dots & b_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

6.6 Lineární závislost řádků

Uvědomte si, že na prvky $a_{jk} \in \mathbb{K}$ j-tého řádku matice, $k = 1, \dots, n$, lze nahlížet jako na složky vektoru

$$a_j := a_{j1}e_1 + \dots + a_{jn}e_n$$

v souřadnicovém prostoru $\mathbb{K}^n$ vůči kanonické bázi $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{K}^n$. Matici A můžeme tedy schematicky zapsat ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

V tomto smyslu nadále rozumíme pojmy *lineární kombinace* a *lineární závislosti* řádků matice. Obdobně lze nahlížet i na prvky sloupců matice.

Lemma 6.12. *Přidáme-li k jednomu řádku matice lineární kombinaci ostatních řádků, pak se determinant nezmění.*

Důkaz. Toto tvrzení plyne z předchozích důsledků. Důkaz stačí provést pro případ, kdy lineární kombinace je násobek jednoho z ostatních řádků. Obecný případ dostaneme, použijeme-li $(n-1)$ krát tento speciální případ.

Uvažujme tedy matici, kterou dostaneme z matice A tak, že k j-tému řádku přidáme α

násobek i-tého řádku, kde $\alpha \in \mathbb{K}$. Pro tento speciální případ však dostáváme

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j + \alpha a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det A + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ \alpha a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det A + \alpha \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det A \, .$$

Zde první rovnost plyne z Důsledku 6.11, druhá rovnost plyne z Důsledku 6.10 a třetí rovnost plyne z Důsledku 6.5 (matice má dva řádky stejné). □

Tvrzení 6.13. *Platí tato implikace:*

$$\text{\textit{řádky matice A jsou lineárně závislé}} \qquad \Longrightarrow \qquad \det A = 0 \, .$$

Důkaz. Nechť například j-tý řádek matice A je lineární kombinací ostatních řádků, tedy

$$a_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \alpha_i \, a_i \, , \qquad \text{kde} \qquad \alpha_i \in \mathbb{K} \, .$$

Definujme matici $\tilde{A}$, kterou obdržíme z matice A, odečteme-li od j-tého řádku lineární kombinaci ostatních řádků, tedy

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \alpha_i \, a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} .$$

Z Lemmatu 6.12 dostáváme $\det \tilde{A} = \det A$, zatímco Důsledek 6.9 dává $\det \tilde{A} = 0$ (j-tý řádek je nulový). Tedy $\det A = \det \tilde{A} = 0$. □

6.7 Rozklad podle sloupců

Podívejme se nyní, jaký je vztah mezi determinanty matice a její transpozice (viz Definice 5.17). Připomeňme, že transponovaná matice ke čtvercové matici je opět čtvercová matice.

Věta 6.14. *Pro libovolnou matici A platí*

$$\det A^T = \det A \, .$$

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí podle stupně n matice A. Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé. Nechť věta platí pro $n-1$ s $n \geq 2$ a dokažme ji pro n. Z Věty 6.8 dostáváme (pro všechna $k = 1, \dots, n$)

$$\det A^T = \sum_{k=1}^{n} a^T_{jk}\, a^{T\,jk}\,, \qquad \text{kde} \qquad a^{T\,jk} = (-1)^{j+k} \det(A^T)_{jk}$$

a matici $(A^T)_{jk}$ dostaneme z matice A^T vyškrtnutím j-tého řádku a k-tého sloupce. Poněvadž platí (podle definice transpozice)

$$(A^T)_{jk} = (A_{kj})^T$$

a matice A_{kj} je stupně n, z indukčního předpokladu plyne

$$\det(A^T)_{jk} = \det(A_{kj})^T = \det A_{kj}\,.$$

Užitím této identity dostáváme

$$\begin{aligned}
n \det A^T &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a^T_{jk}\, a^{T\,jk} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a^T_{jk}\, a^{T\,jk} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k}\, a^T_{jk} \det(A^T)_{jk} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k}\, a_{kj} \det A_{kj} \right) \\
&= n \det A\,,
\end{aligned}$$

z čehož plyne požadované tvrzení. □

Z předchozí věty a Věty 6.8 plyne duální tvrzení.

Věta 6.15 (Rozklad determinantu podle sloupců)**.**

$$\forall k = 1, \dots, n, \qquad \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{jk}\, a^{jk}\,.$$

Z této věty pak plynou analogické duální důsledky.

Důsledek 6.16. *Tvrzení 6.3 a 6.4, Důsledek 6.5, 6.9, 6.10 a 6.11, Lemma 6.12 a Tvrzení 6.13. zůstanou v platnosti, nahradíme-li slovo "řádek" slovem "sloupec".*

6.8 Kritéria pro invertibilitu a lineární nezávislost

Nyní se dostáváme k jedné z nejdůležitějších aplikací determinantů. Následující věta nám dává velice užitečné kritérium pro rozhodnutí, zda (i) matice je invertibilní; (ii) sada vektorů na souřadnicovém prostoru lineárně nezávislá. Stačí spočítat determinant.

Věta 6.17. *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *matice A je invertibilní;*

(ii) *sloupce matice A jsou lineárně nezávislé;*

(iii) *řádky matice A jsou lineárně nezávislé;*

(iv) $\det A \neq 0$.

Důkaz. Dokažme jednotlivé ekvivalence.

$\boxed{\text{(i)} \Leftrightarrow \text{(ii)}}$ Matice A je invertibilní tehdy a jen tehdy, pokud zobrazení T_A definované v (6.1) je invertibilní (viz text pod Definicí 6.1). Podle abstraktní Věty 3.44 platí, že T_A je invertibilní tehdy a jen tehdy, pokud T_A je surjektivní. Avšak obor hodnot zobrazení T_A je roven lineárnímu obalu sloupců matice A (viz text nad Definicí 5.14), tedy T_A je surjektivní tehdy a jen tehdy, pokud tento lineární obal generuje celý prostor $\mathbb{K}^n$. Poněvadž víme, že tento prostor je n-dimenzionální, dostáváme podle Tvrzení 2.34, že lineární obal sloupců matice A generuje celý prostor $\mathbb{K}^n$ tehdy a jen tehdy, pokud tyto sloupce jsou lineárně nezávislé.

$\boxed{\text{(ii)} \Leftrightarrow \text{(iii)}}$ Toto tvrzení plyne přímo z rovnosti $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T$ (viz Věta 5.21(ii)).

$\boxed{\text{(iii)} \Leftrightarrow \text{(iv)}}$ Implikace (iv) $\Rightarrow$ (iii) je pouhá obměna Tvrzení 6.13. Zbývá tedy dokázat opačnou implikaci (iii) $\Rightarrow$ (iv). Budeme postupovat indukcí podle stupně n matice A. Pro $n = 1$ je implikace zřejmá. Je-li to pravda pro $n \geq 1$, dokažme implikaci i pro $n+1$.

Poněvadž řádky matice $A = (a_{jk})_{j,k=1,\dots,n+1}$ stupně $n+1$ jsou lineárně nezávislé, je v prvním řádku alespoň jeden nenulový prvek a_{1p}, $p \in \{1,\dots,n+1\}$. Přidáme-li ke každému k-tému sloupci matice A pro $k = 1,\dots,n+1$, $k \neq p$, $-a_{1k}/a_{1p}$ násobek p-tého sloupce, dostaneme matici $B = (b_{jk})_{j,k=1,\dots,n+1}$, jež má v prvním řádku jediný nenulový prvek, a to $b_{1p} = a_{1p}$. Rozvineme-li $\det B$ podle prvního řádku, dostaneme

$$\det B = (-1)^{1+p}\, a_{1p} \det B_{1p}\,,$$

kde matici B_{1p} dostaneme z matice B vyškrtnutím 1. řádku a p-tého sloupce. K zakončení důkazu stačí dokázat, že řádky matice B_{1p} stupně n jsou lineárně nezávislé, a použít indukční předpoklad.

Kdyby byly řádky matice B_{1p} lineárně závislé, pak jsou i její sloupce lineárně závislé (ekvivalence (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)). Poněvadž však v prvním řádku matice B jsou kromě p-tého místa samé nuly, byly by sloupce matice B lineárně závislé, a tudíž i její řádky lineárně závislé. Poněvadž způsob, jakým byla matice B z A vytvořena, zachovává lineární nezávislost řádků (přesvědčte se o tom), dostáváme spor s lineární nezávislostí řádků matice A. Tedy řádky matice B_{1p} jsou lineárně závislé. □

6.9 Obecné Cramerovo pravidlo

Nyní se dostáváme do pozice, v níž jsme schopni použít pojem determinantu pro konstrukci inverzní matice libovolného stupně.

Věta 6.18. $A\,(\operatorname{cof} A)^T = (\operatorname{cof} A)^T A = (\det A)\, I\,.$

Důkaz. Požadované tvrzení je ekvivalentní rovnostem

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} a^{ki} = \delta_{jk} \, \det A \qquad \text{a} \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ik} a^{ij} = \delta_{jk} \, \det A\,.$$

Pro $j = k$ první rovnost plyne z Věty 6.8 (rozklad determinantu podle řádků) a druhá rovnost plyne z Věty 6.15 (rozklad determinantu podle sloupců). Pro $j \neq k$ máme (rozklad determinantu podle řádků)

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} a^{ki} = \det \tilde{A}\,,$$

kde $\tilde{A}$ je matice, kterou dostaneme z A tak, že k-tý řádek nahradíme j-tým řádkem. Matice $\tilde{A}$ má tedy dva řádky stejné, a tudíž $\det \tilde{A} = 0$ (Důsledek 6.5). Obdobně (užitím rozkladu determinantu podle sloupců) ukážeme, že i druhá sume je rovna nule pro $j \neq k$. □

Důsledek 6.19. *Nechť matice A je invertibilní. Potom platí*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,(\operatorname{cof} A)^T.$$

Tento vzoreček mechanizuje řešení operátorové rovnice $Ax = y$. Skutečně, pokud A je invertibilní, máme jednoznačně dané řešení $x = A^{-1}y$.

6.10 Determinant součinu je součin determinantů

Věta 6.20. *Nechť $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Potom platí*

$$\det(AB) = \det A \;\, \det B\,.$$

Důkaz. Jako první věc si uvědomme, že stačí ukázat následující:

$$\forall A \in \mathbb{K}^{n\times n},\ \exists \gamma_A \in \mathbb{K},\ \forall B \in \mathbb{K}^{n\times n}, \qquad \det(AB) = \gamma_A \, \det B\,. \tag{6.24}$$

Skutečně, pro speciální volbu $B := I$ dostaneme $\det A = \gamma_A$. Dokažme tedy toto tvrzení.

Již víme, že řádky matice $C := AB$ jsou lineární kombinace řádků matice B; přesněji (podle definice součinu matic) platí

$$c_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_k\,,$$

kde c_j je označení pro řádky matice C a b_j je označení pro řádky matice B, $j = 1, \dots, n$. Užitím Důsledků 6.11 a 6.10 dostáváme

$$\begin{aligned}
\det C = \det \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} \sum_{k_1=1}^{n} a_{1k_1} b_{k_1} \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k_1=1}^{n} a_{1k_1} \det \begin{pmatrix} b_{k_1} \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k_1=1}^{n} a_{1k_1} \sum_{k_2=1}^{n} a_{2k_2} \det \begin{pmatrix} b_{k_1} \\ b_{k_2} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \\
&= \dots \\
&= \sum_{k_1,k_2,\dots,k_n=1}^{n} a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n} \det \begin{pmatrix} b_{k_1} \\ b_{k_2} \\ \vdots \\ b_{k_n} \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Pro determinant vystupující na posledním řádku platí

$$\det \begin{pmatrix} b_{k_1} \\ b_{k_2} \\ \vdots \\ b_{k_n} \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad \exists i,l \in \{1,\dots,n\},\ i \neq l, \quad k_i = k_l\,, \\ \varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_n} \det B & \Leftrightarrow \quad \forall i,l \in \{1,\dots,n\},\ i \neq l, \quad k_i \neq k_l\,, \end{cases}$$

kde symbol $\varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_n}$ (pro navzájem různá čísla $k_1, k_2, \dots, k_n \in \{1, \dots, n\}$) je buď $+1$, nebo -1 (podle hodnot čísel $k_1, k_2, \dots, k_n$). Dostáváme tedy požadované tvrzení (6.24) s

$$\gamma_A := \sum_{\substack{k_1,k_2,\dots,k_n=1 \\ \forall i,l \in \{1,\dots,n\},\ i \neq l,\ k_i \neq k_l}}^{n} a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n}\, \varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_n}\,,$$

čímž je důkaz u konce. □

Poznámka 6.21. *Permutací* uspořádané n-tice přirozených čísel $(1, 2, \dots, n)$ nazveme jakoukoli n-tici $(k_1, k_2, \dots, k_n)$, kde $1 \leq k_j \leq n$ pro všechna $j \in \{1, \dots, n\}$ a $k_i \neq k_j$ pro všechna $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$. Řekneme, že permutace je *sudá*, musíme-li provést sudý počet výměn dvou sousedních prvků n-tice $(k_1, k_2, \dots, k_n)$, abychom dostali n-tici $(1, 2, \dots, n)$; naopak řekneme, že permutace je *lichá*, je-li tento pořebný počet lichý. Potom pro symbol $\varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_n}$ vystupující v předchozím důkazu platí

$$\varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_n} = \begin{cases} +1 & \Leftrightarrow \quad (k_1, k_2, \dots, k_n) \quad \text{je sudá permutace,} \\ -1 & \Leftrightarrow \quad (k_1, k_2, \dots, k_n) \quad \text{je lichá permutace.} \end{cases}$$

Definujeme-li navíc, že $\varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_n} = 0$, jakmile existují dva ruzné indexy $i, l \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $k_i = k_l$, pak z předchozího důkazu plyne vztah

$$\det A = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n = 1}^{n} \varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_n} \, a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n} \, ,$$

pro libovolnou matici $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Tato rovnost se obyčejně bere za definici determinantu matice A. Objekt $\varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_n}$ se nazývá *Levi-Civitův symbol*.

6.11 Změna báze

Čtvercovou matici stupně n můžeme chápat jako matici nějakého lineárního zobrazení T z n-dimenzionálního vektorového prostoru $\mathcal{V}$ do toho samého prostoru. Avšak matice zobrazení závisí na volbě báze v prostoru $\mathcal{V}$; dvě rozdílné báze můžou dát odlišné matice zobrazení T. Nyní se podíváme na to, jak tyto matice spolu souvisí. Za chvíli rovněž pochopíme, proč se touto souvislostí zabýváme zrovna v kapitolce o determinantech.

Připomeňme, že matici lineárního zobrazení $T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ vzhledem k bázím $(u_1, \dots, u_p)$ v $\mathcal{U}$ a $(v_1, \dots, v_n)$ ve $\mathcal{V}$ jsme značili symbolem

$$\mathsf{M}\big(T, (u_1, \dots, u_p), (v_1, \dots, v_n)\big) \, .$$

V případě lineárního zobrazení $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, kdy výchozí a cílový prostor je ten samý, a pokud zvolíme stejnou bázi $v_1, \dots, v_n$ jak ve výchozím, tak cílovém prostoru, má smysl značení matice T zkracovat na

$$\mathsf{M}\big(T, (v_1, \dots, v_n)\big) := \mathsf{M}\big(T, (v_1, \dots, v_n), (v_1, \dots, v_n)\big) \, .$$

Navíc, pokud bude volba báze zřejmá z kontextu, budeme značení opět zkracovat na $\mathsf{M}(T)$.

Podívejme se nejdříve na identické zobrazení $I : \mathcal{V} \to \mathcal{V} : \{v \mapsto v\}$. Pokud zvolíme stejnou bázi $(v_1, \dots, v_n)$ ve výchozím i cílovém prostoru (což je v obou případech ten samý prostor $\mathcal{V}$), dostaneme identickou matici (na diagonále samé nuly a všechny ostatní prvky jsou rovny nule)

$$\mathsf{M}\big(I, (v_1, \dots, v_n), (v_1, \dots, v_n)\big) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \, , \tag{6.25}$$

a to pro *libovolnou* volbu báze $(v_1, \dots, v_n)$. (Připomeňme, že tuto matici jsme opět značili schismatickým symbolem I, viz (6.3).) Následující tvrzení souvisí s otázkou, jak vypadá matice identického zobrazení, pokud zvolíme odlišné báze pro výchozí a cílový prostor.

Tvrzení 6.22. *Nechť $(u_1, \dots, u_n)$ a $(v_1, \dots, v_n)$ jsou libovolné báze ve $\mathcal{V}$. Vzhledem k těmto bázím je matice $\mathsf{M}\big(I, (u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n)\big)$ invertibilní a platí vztah*

$$\mathsf{M}\big(I, (u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n)\big)^{-1} = \mathsf{M}\big(I, (v_1, \dots, v_n), (u_1, \dots, u_n)\big) \, .$$

Důkaz. Připomeňme nejdříve, jak souvisí násobení matic se skládáním lineárních zobrazení. Za tímto účelem uvažujme tři vektorové prostory $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ a jejich báze $(u_1, \dots, u_p)$, $(v_1, \dots, v_n)$ a $(w_1, \dots, w_m)$. Nechť $T \in \mathscr{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ a $S \in \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Složené zobrazení ST je lineární zobrazení z $\mathcal{U}$ do $\mathcal{W}$. Máme tedy takovýto diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & \overset{\dim \mathcal{V}=n}{\mathcal{V}} \arrow[dr, "S"] & \\
\underset{\dim \mathcal{U}=p}{\mathcal{U}} \arrow[ur, "T"] \arrow[rr, "ST"'] & & \underset{\dim \mathcal{W}=m}{\mathcal{W}}
\end{tikzcd}$$

Pro matice těchto zobrazení vzhledem k uvedeným bázím platí vztah

$$\begin{aligned}
&\mathsf{M}\big(ST, (u_1, \dots, u_p), (w_1, \dots, w_m)\big) \\
&\qquad = \mathsf{M}\big(S, (v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_m)\big)\, \mathsf{M}\big(T, (u_1, \dots, u_p), (v_1, \dots, v_n)\big). \qquad (6.26)
\end{aligned}$$

Užitím tohoto obecného vztahu pro speciální volbu $\mathcal{U} := \mathcal{V}$, $\mathcal{W} := \mathcal{V}$, $S := I$, $T := I$ a $w_j := u_j$ a připomenutím (6.25) dostaneme

$$I = \mathsf{M}\big(I, (v_1, \dots, v_n), (u_1, \dots, u_n)\big)\, \mathsf{M}\big(I, (u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n)\big).$$

Záměnou rolí u a v pak dostaneme také vztah

$$I = \mathsf{M}\big(I, (u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n)\big)\, \mathsf{M}\big(I, (v_1, \dots, v_n), (u_1, \dots, u_n)\big).$$

Tyto dvě rovnice dávají požadovaný vztah. $\square$

Příklad 6.23. Jako aplikaci předchozího tvrzení uvažujme v $\mathbb{K}^2$ dvě báze $\left(\left(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}5\\3\end{smallmatrix}\right)\right)$ a $\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\right)$. Poněvadž druhá báze je kanonická, snadno ověříme rovnost

$$\mathsf{M}\Big(I, \left(\left(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}5\\3\end{smallmatrix}\right)\right), \left(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\right)\Big) = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Spočtením inverze matice, jež vystupuje na pravé straně (například užitím vztahu (6.10)) a užitím Tvrzení 6.22 dostaneme

$$\mathsf{M}\Big(I, \left(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\right), \left(\left(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}5\\3\end{smallmatrix}\right)\right)\Big) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$

aniž bychom vektory kanonické báze museli pracně rozkládat do báze $\left(\left(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}5\\3\end{smallmatrix}\right)\right)$. $\diamondsuit$

Následující věta zodpovídá otázku, jak se matice zobrazení mění při změně báze.

Věta 6.24. *Nechť $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$ a uvažujme ve $\mathcal{V}$ dvě báze $(u_1, \dots, u_n)$ a $(v_1, \dots, v_n)$. Potom platí*

$$\mathsf{M}\big(T, (u_1, \dots, u_n)\big) = Q^{-1}\, \mathsf{M}\big(T, (v_1, \dots, v_n)\big)\, Q\,,$$

kde

$$Q := \mathsf{M}\big(I, (u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n)\big)\,.$$

Důkaz. Užitím obecného vztahu (6.26) pro speciální volbu $\mathcal{U} := \mathcal{V}$, $\mathcal{W} := \mathcal{V}$, $S := T$, $T := I$ a $w_j := v_j$ dostaneme

$$\mathsf{M}\big(T,(u_1,\dots,u_n),(v_1,\dots,v_n)\big) = \mathsf{M}\big(T,(v_1,\dots,v_n)\big)\,\underbrace{\mathsf{M}\big(I,(u_1,\dots,u_n),(v_1,\dots,v_n)\big)}_{Q}\,.$$

Zároveň, užitím (6.26) pro speciální volbu $\mathcal{U} := \mathcal{V}$, $\mathcal{W} := \mathcal{V}$, $S := I$ a $w_j := u_j$, máme

$$\mathsf{M}\big(T,(u_1,\dots,u_n)\big) = \underbrace{\mathsf{M}\big(I,(v_1,\dots,v_n),(u_1,\dots,u_n)\big)}_{Q^{-1}}\,\mathsf{M}\big(T,(u_1,\dots,u_n),(v_1,\dots,v_n)\big).$$

Kombinací těchto dvou vztahů dostaneme požadované tvrzení. □

Matici Q říkáme *matice přechodu* od staré báze $(v_1,\dots,v_n)$ k nové bázi $(u_1,\dots,u_n)$. Ve sloupcích má matice Q zapsány souřadnice vektorů nové báze vůči staré bázi.

6.12 Invarianty

Invariantem lineárního zobrazení $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$ nazveme takovou charakteristiku jeho matice, jež nezávisí na volbě báze ve $\mathcal{V}$, vzhledem k níž je matice zkonstruována. Takovouto charakteristiku pak můžeme vztáhnout i na samotné zobrazení T.

Už víme, že hodnost matice je právě takovým invariantem. Na to jsme přišli tak (viz Tvrzení 5.15), že hodnost matice zobrazení (viz Definice 5.14) vzhledem k jakékoli bázi byla rovna dříve zavedenému pojmu hodnosti zobrazení (viz definice pod Větou 3.35), jež samozřejmě na volbě báze nezávisí.

Z Věty 3.35 pak rovnou vidíme, že dimenze jádra matice (coby zobrazení na souřadnicovém prostoru) je dalším takovým invariantem.

V této kapitolce jsme se zabývali determinanty čtvercových matic. Každou takovou matici můžeme chápat jako matici nějakého abstraktního lineárního zobrazení $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$ vzhledem k nějaké bázi ve $\mathcal{V}$. Změníme-li bázi, dostaneme obecně jinou matici, avšak determinant se nezmění díky Větám 6.20 a 6.24. Determinant matice je tedy invariantem a má smysl zavést pojem determinantu lineárního zobrazení (coby determinant jeho matice vzhledem k libovolně zvolené bázi).

Na závěr si představme ještě jednu důležitou charakteristiku čtvercové matice.

Definice 6.25. *Stopa* matice $A = (a_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$ je číslo

$$\operatorname{tr} A = a_{11} + \cdots + a_{nn}\,.$$

Stopa matice je tedy součet jejích prvků ležících na diagonále.

Následující tvrzení se občas nazývá “cykličnost” stopy.

Tvrzení 6.26. *$\forall A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$,*

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)\,.$$

Důkaz. Nechť $A = (a_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$ a $B = (b_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$. Podle definice stopy a součinu matic máme

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} a_{jr}b_{rj} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{rj}a_{jr} = \mathrm{tr}(BA)\,,$$

kde jsme pouze zaměnili pořadí sumace. □

V důsledku tohoto tvrzení a Věty 6.24 dostáváme, že stopa matice je invariantem a opět má smysl zavést pojem stopy lineárního zobrazení.

V následující kapitolce se seznámíme s dalšími invarianty lineárního zobrazení.

6.13 Cvičení

1. Spočtěte determinant následujících matic (značme si každou z nich jednotným symbolem A) a najděte jejich transponovanou, sdruženou a kofaktorovou matici. Rozhodněte, zda jsou matice invertibilní a pokud ano, spočtěte inverzní matici.

(a) (b) (c) (d) (e) (f)

$$\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&-i\\2i&2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&i\\2i&2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&-1&0\\2&-2&0\\0&1&-3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-2&0\\0&1&-3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}i&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&1&-2&0\\0&0&1&-3\end{pmatrix}.$$

[(a) $\det A = 2$, $A^T = A^* = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\3&2\end{smallmatrix}\right)$, $\operatorname{cof} A = \left(\begin{smallmatrix}2&0\\-3&1\end{smallmatrix}\right)$, $A^{-1} = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix}2&-3\\0&1\end{smallmatrix}\right)$;
(b) $\det A = 0$, $A^T = \left(\begin{smallmatrix}1&2i\\-i&2\end{smallmatrix}\right)$, $A^* = \left(\begin{smallmatrix}1&-2i\\i&2\end{smallmatrix}\right)$, $\operatorname{cof} A = \left(\begin{smallmatrix}2&-2i\\i&1\end{smallmatrix}\right)$, A^{-1} neexistuje;
(c) $\det A = 4$, $A^T = \left(\begin{smallmatrix}1&2i\\i&2\end{smallmatrix}\right)$, $A^* = \left(\begin{smallmatrix}1&-2i\\-i&2\end{smallmatrix}\right)$, $\operatorname{cof} A = \left(\begin{smallmatrix}2&-2i\\-i&1\end{smallmatrix}\right)$, $A^{-1} = \frac{1}{4}\left(\begin{smallmatrix}2&-i\\-2i&1\end{smallmatrix}\right)$;
(d) $\det A = 0$, $A^T = A^* = \left(\begin{smallmatrix}1&2&0\\-1&-2&1\\0&0&-3\end{smallmatrix}\right)$, $\operatorname{cof} A = \left(\begin{smallmatrix}6&6&2\\-3&-3&-1\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)$, A^{-1} neexistuje;
(e) $\det A = 3$, $A^T = A^* = \left(\begin{smallmatrix}1&1&0\\-1&-2&1\\0&0&-3\end{smallmatrix}\right)$, $\operatorname{cof} A = \left(\begin{smallmatrix}6&3&1\\-3&-3&-1\\0&0&-1\end{smallmatrix}\right)$, $A^{-1} = \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}6&-3&0\\3&-3&0\\1&-1&-1\end{smallmatrix}\right)$;
(f) $\operatorname{cof} A = \left(\begin{smallmatrix}3&0&0&0\\0&6i&3i&i\\0&-3i&-3i&-i\\0&0&0&-i\end{smallmatrix}\right)$, pro zbytek užijte blokový tvar matice a výsledky v (e).]

2. Vyřešte soustavu lineárních algebraických rovnic

$$Ax = y\,, \qquad \text{kde} \qquad A := \begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}, \quad y := \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

a $x \in \mathbb{R}^3$ je hledaný vektor: (a) přímým výpočtem; (b) spočtením inverzní matice.

[(b) $A^{-1} = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix}1&1&0\\-2&2&2\\-1&1&2\end{smallmatrix}\right)$, $x = A^{-1}y = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$.]

3. V trojrozměrném reálném souřadnicovém prostoru definujme *vektorový součin* předpisem

$$\underbrace{\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}}_{u} \times \underbrace{\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}}_{v} := \underbrace{\begin{pmatrix}u_2v_3 - u_3v_2\\u_3v_1 - u_1v_3\\u_1v_2 - u_2v_1\end{pmatrix}}_{u\times v},$$

kde $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$.

(a) Ukažte, že *formálně* platí snadno zapamatovatelný vzorec ($\forall u, v \in \mathbb{R}^3$)

$$u \times v = \det \begin{pmatrix}e_1&e_2&e_3\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{pmatrix},$$

kde e_1, e_2, e_3 je kanonická báze v $\mathbb{R}^3$.

(b) Ukažte, že platí vztah ($\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3$)

$$\langle u, (v \times w)\rangle = \det \begin{pmatrix}u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\\w_1&w_2&w_3\end{pmatrix}.$$

(c) Dokažte následující vlastnosti ($\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3$):

(i) $u \times v = -v \times u\,;$ (antikomutativita)

(ii) $u \times (v + w) = u \times v + u \times w\,;$ (distributivita)

(iii) $u \times (v \times w) \;= v\,\langle u, w\rangle - w\,\langle u, v\rangle\,;$ (bac−cab)

(iv) $u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0\,;$ (Jacobiho identita)

(v) $\langle u, (v \times w)\rangle = \langle v, (w \times u)\rangle = \langle w, (u \times v)\rangle\,.$ (cykličnost)

(d) Interpretujte vektorový součin geometricky:

(i) $\|u \times v\| = \|u\|\|v\| \sin\varphi$, kde φ je úhel mezi vektory u a v;

[*Hint:* Použijte vlastnosti (v) a (iii) výše a Cvičení 4.9.2.]

(ii) $|\langle u, (v \times w)\rangle| =$ objem rovnoběžnostěnu tvořeného vektory u, v, w.

4. V tomto cvičení si ukážeme další motivaci pro zavedení determinantu, jak tento pojem úzce souvisí s objemem těles (ve vyšším kurzu upotřebíte při substituci ve vícerozměrných integrálech). Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená otevřená množina v n-rozměrném eukleidovském prostoru a uvažujme libovolné lineární zobrazení $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Zapůsobíme-li zobrazením T na každý bod množiny Ω (body interpretujeme jako vektory v $\mathbb{R}^n$), dostaneme přetransformovanou množinu

$$T(\Omega) := \{Tx : x \in \Omega\}\,.$$

Platí obecné tvrzení

$$|T(\Omega)| = |\det T|\,|\Omega|$$

kde stejným symbolem $|\cdot|$ značíme jak objem tělesa, tak absolutní hodnotu.

(a) Dokažte tvrzení pro krychli $\Omega = (0,1)^n$ v libovolné dimenzi $n \in \mathbb{N}^*$ a T diagonální, t.j.

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ jsou libovolná čísla. Jaký je geometrický význam zdeformované krychle $T(\Omega)$?

(b) Dokažte tvrzení pro čtverec $\Omega = (0,1)^2$ v rovině a T libovolné, t.j.

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

kde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$ jsou libovolná čísla. Jaký je geometrický význam zdeformovaného čtverce $T(\Omega)$?

[(a) $T(\Omega) = (0, \lambda_1) \times \cdots \times (0, \lambda_n)$ je obecný kvádr.
(b) $T(\Omega)$ je rovnoběžník.
Obecně platí $|\det(v_1, \dots, v_n)| =$ objem rovnoběžnostěnu tvořeného vektory $v_1, \dots, v_n$.]

7 Spektrum

V kapitolce 3 jsme se zabývali lineárními zobrazeními z jednoho vektorového prostoru do jiného vektorového prostoru. Nyní se zaměříme na lineární zobrazení z jednoho vektorového prostoru do toho samého vektorového prostoru, kterým budeme příležitostně říkat *operátory*. Studium takovýchto zobrazení představuje nejhlubší část lineární algebry, s mnoha aplikacemi ve fyzice i jinde.

Poněvadž většina klíčových výsledků z této přednášky neplatí na nekonečně dimenzionálních vektorových prostorech, budeme se výhradně zabývat konečně dimenzionálními vektorovými prostory. Abychom se vyhnuli obtěžujícím trivialitám, vypustíme ze všech úvah nulový prostor $\{0\}$. V této kapitolce tudíž předpokládáme následující:

$\mathcal{V}$:= konečně dimenzionální, nenulový vektorový prostor nad $\mathbb{K}$.

7.1 Motivace 1: Diferenciální rovnice

Pro daný operátor $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ a vektor $u_0 \in \mathcal{V}$, uvažujme Cauchyho úlohu

$$\begin{cases} u'(t) = Tu(t)\,, \qquad t \in [0,\infty)\,, \\ u(0) = u_0\,, \end{cases} \tag{7.1}$$

kde $u : [0,\infty) \to \mathcal{V}$ je vektorová funkce, kterou hledáme. První řádek v (7.1) je diferenciální operátorová rovnice a druhý řádek je počáteční podmínka. Pokud parametr t chápeme jako čas, operátoru T se říká *generátor* časového vývoje. Derivace vektorových veličin se zavádí stejným způsobem jako derivace skalárních funkcí:

$$u'(t) := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{u(t+\varepsilon)-u(t)}{\varepsilon}\,, \tag{7.2}$$

kde však pro vektory $v_\varepsilon, v_0 \in \mathcal{V}$ definujeme

$$\lim_{\varepsilon\to 0} v_\varepsilon = v_0 \quad :\Longleftrightarrow \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \|v_\varepsilon - v_0\| = 0$$

pomocí *jakékoli* normy $\|\cdot\|$ na prostoru $\mathcal{V}$ (například pomocí normy definované skalárním součinem, pokud je $\mathcal{V}$ vektorový prostor se skalárním součinem).

Mnoho fyzikálních úloh vede diferenciálním rovnicím typu (7.1). V případě nekonečně dimenzionálních vektorových prostorů sem spadají i fundamentální rovnice vedení tepla, vlnová a Schrödingerova. Uveďme si významnou třídu příkladů z klasické mechaniky.

Příklad 7.1 (Newtonův pohybový zákon)**.** Uvažujme pohyb tělesa (hmotného bodu) o hmotnosti m po přímce $\mathbb{R}$, na nějž působí síla F. V čase t je poloha a rychlost tělesa popsána vektory $x(t), v(t) \in \mathbb{R}$. Podle druhého Newtonova pohybového zákona (zákon síly) rychlost tělesa v splňuje Cauchyho úlohu

$$\begin{cases} m\,v'(t) = F(t)\,, \\ \quad v(0) = v_0\,, \end{cases} \tag{7.3}$$

kde $v_0 \in \mathbb{R}$ je počáteční rychlost (rychlost tělesa v čase nula). Poněvadž rychlost je (podle definice) změna polohy za infinitezimální změnu času, poloha tělesa x splňuje Cauchyho úlohu

$$\begin{cases} x'(t) = v(t)\,, \\ x(0) = x_0\,, \end{cases} \tag{7.4}$$

kde $x_0 \in \mathbb{R}$ je počáteční poloha (poloha tělesa v čase nula). Chápeme-li polohu x a rychlost v částice coby souřadnice vektoru v dvojdimenzionálním (fázovém) prostoru $\mathbb{R}^2$, můžeme diferenciální rovnice s počátečními podmínkami (7.3) a (7.4) zapsat v elegantním maticovém tvaru

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ \frac{F}{m} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{7.5}$$

kde pro přehlednost vynecháváme psaní argumentu s t. Zde derivaci eukleidovského vektoru chápeme po složkách, což je konzistentní s obecnou definicí (7.2). Předpokládejme nyní, že síla F závisí na čase pouze skrze časový vývoj polohy a rychlosti pohybující se částice, t.j. $F(t) = f(x(t), v(t))$ pro nějakou danou funkci f. Navíc předpokládejme, že tato závislost je lineární, tedy že existují čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ taková, že

$$f(x, v) = \alpha x + \beta v\,. \tag{7.6}$$

Za tohoto předpokladu je (7.5) ekvivalentní Cauchyho úloze

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\alpha}{m} & \frac{\beta}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{7.7}$$

což je speciální případ abstraktního problému (7.1).

Linearita (7.6) je vskutku silný předpoklad o charakteru působící síly. Na druhou stranu tento vzorec obsahuje pohybové zákony, které dobře znáte:

1. $\boxed{\alpha = 0,\ \beta = 0}$ *Rovnoměrný přímočarý pohyb*: na těleso nepůsobí žádná síla.
2. $\boxed{\alpha = 0,\ \beta < 0}$ *Pohyb tělesa v odporujícím prostředí*: čím větší rychlost, tím větší odpor prostředí (síla těleso brzdí, proto působí proti směru pohybu tělesa); β je konstanta charakterizující odpor prostředí pro dané těleso.
3. $\boxed{\alpha < 0,\ \beta = 0}$ *Harmonický oscilátor*: čím větší výchylka, tím větší síla působící proti směru pohybu kuličky na pružině; α je konstanta charakterizující tuhost pružiny. Pro $\alpha < 0$, $\beta < 0$ dostáváme *tlumený harmonický oscilátor*; β je konstanta úměrná koeficientu odporu (například prostředí, v němž oscilátor kmitá).

Kromě těchto kanonických pohybových zákonů lze (7.6) chápat jako lineární aproximaci obecné síly $f = f(x, v)$ působící na těleso. ♢

Zamysleme se nyní nad tím, jak operátorovou rovnici (7.1) vyřešit. Zkusme se nejdříve podívat po existenci "stacionárních" řešení

$$u(t) = e^{\lambda t}\, u_0\,, \tag{7.8}$$

kde $\lambda \in \mathbb{K}$ a $u_0 \in \mathcal{V}$. Kvůli splnění počáteční podmínky v (7.1) je jasné, že zde vystupující vektor u_0 musí být právě počáteční vektor z časově závislé úlohy (7.1). Hledáme tedy neznámá čísla λ a vektory u_0 takové, že stacionární Ansatz (7.8) řeší (7.1). Dosazením (7.8) do diferenciální rovnice z prvního řádku úlohy (7.1) dostaneme časově nezávislou rovnici

$$Tu_0 = \lambda u_0\,. \tag{7.9}$$

Vyřešením této rovnice (v níž jak čísla λ, tak vektory u_0 jsou neznámé!) tedy dostaneme alespoň speciální řešení (7.8) rovnice (7.1). Na konci tohoto kurzu uvidíme pozoruhodnou věc, že znalost všech řešení stacionárního problému (7.9) stačí k úplnému vyřešení časově závislé úlohy (7.1) (v tomto kurzu alespoň pro speciální třídu operátorů T).

Pro nulový vektor $u_0 = 0$ je řešením rovnice (7.9) libovolné číslo λ, a to bez ohledu na tvar operátoru T. Z tohoto důvodu je rozumné se v problému (7.9) omezit na netriviální řešení (odpovídající nenulovým vektorům u_0).

7.2 Motivace 2: Invariantní podprostory

Uvažujme lineární zobrazení
$$T : \mathcal{V} \to \mathcal{V} : \{v \mapsto Tv\}$$
a připomeňme značení $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$. Předpokládejme, že máme direktní rozklad
$$\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_m \,,$$
kde $\mathcal{U}_j \subset\subset \mathcal{V}$, $j = 1, \dots, m$. Pak k pochopení zobrazení T stačí chápat *zúžená zobrazení*
$$T\restriction_{\mathcal{U}_j} : \mathcal{U}_j \to \mathcal{V} : \{v \mapsto Tv\} \,,$$
jež by měla být jednodušší, protože $\mathcal{U}_j$ je obecně menší než $\mathcal{V}$. Důležitá situace nastává, pokud $T\restriction_{\mathcal{U}_j}$ zobrazuje výchozí prostor $\mathcal{U}_j$ opět na $\mathcal{U}_j$, tedy pokud $T\restriction_{\mathcal{U}_j} \in \mathscr{L}(\mathcal{U}_j)$. Tato situace je tak důležitá, že jí dáme jméno.

Definice 7.2. Nechť $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$ a $\mathcal{U} \subset\subset \mathcal{V}$. Řekneme, že $\mathcal{U}$ je *invariantní* podprostor vůči T, pokud platí:
$$\forall u \in \mathcal{V}, \qquad u \in \mathcal{U} \quad \Longrightarrow \quad Tu \in \mathcal{U} \,.$$

Jinými slovy, $\mathcal{U}$ je invariantní podprostor vůči T tehdy a jen tehdy, pokud $T\restriction_{\mathcal{U}} \in \mathscr{L}(\mathcal{U})$.

Příklad 7.3. $\{0\} \subset\subset \mathcal{V}$ je invariantní podprostor vůči T. ◊

Příklad 7.4. $\mathcal{V} \subset\subset \mathcal{V}$ je invariantní podprostor vůči T. ◊

Příklad 7.5. $\ker T \subset\subset \mathcal{V}$ je invariantní podprostor vůči T ($u \in \ker T \Rightarrow Tu = 0 \in \ker T$). ◊

Příklad 7.6. $\operatorname{ran} T \subset\subset \mathcal{V}$ je invariantní podprostor vůči T (podle definice $\operatorname{ran} T$). ◊

Příklad 7.7. Uvažujme operátor derivace na prostoru všech polynomů nejvýše stupně $m \geq 1$,
$$D : \mathcal{P}_m \to \mathcal{P}_m : \{p \mapsto p'\} \,.$$
Pak podprostor $\mathcal{P}_{m-1} \subset\subset \mathcal{P}_m$ je invariantní vůči D, protože derivace polynomu nejvýše stupně $m-1$ je polynom nejvýše stupně $m-1$ (ve skutečnosti je to polynom nejvýše stupně $m-2$). ◊

Podívejme se nyní na nejjednodušší možné invariantní podprostory, a to invariantní podprostory dimenze 1.

Snadno nahlédneme, že $\mathcal{U}$ je jednodimenzionální podprostor ve $\mathcal{V}$ tehdy a jen tehdy, pokud existuje nenulový vektor $u \in \mathcal{V}$ takový, že

$$\mathcal{U} = \operatorname{span}(u) = \{\alpha u : \alpha \in \mathbb{K}\} . \tag{7.10}$$

Podprostor $\mathcal{U}$ je tedy určen všemi násobky vektoru u.

Pokud je $\mathcal{U}$ z (7.10) invariantní podprostor vůči zobrazení $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$, pak $Tu \in \mathcal{U}$, což znamená, že existuje číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ takové, že

$$Tu = \lambda u . \tag{7.11}$$

Naopak, pokud $u \in \mathcal{V}$ je nenulový vektor splňující (7.11) pro nějaké číslo $\lambda \in \mathbb{K}$, pak podprostor $\mathcal{U}$ definovaný v (7.10) je invariantní vůči T.

7.3 Definice

Úvahy předchozích, motivačních podkapitolek (viz (7.9) a (7.11)) nás přivádějí k nejdůležitější definici lineární algebry.

Definice 7.8. *Spektrum* operátoru $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$ je množina

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \ \exists u \in \mathcal{V}, \ u \neq 0, \qquad Tu = \lambda u\} .$$

Prvky λ množiny $\sigma(T)$ se nazývají *vlastní čísla* operátoru T. Nenulový vektor $u \in \mathcal{V}$ splňující $Tu = \lambda u$ se nazývá *vlastní vektor* operátoru T odpovídající vlastnímu číslu $\lambda \in \sigma(T)$.

Místo vlastní číslo budeme příležitostně používat alternativní termín *vlastní hodnota*.

V této definici je nutné vyžadovat, že vektor u je nenulový, poněvadž s nulovým vektorem u je rovnice $Tu = \lambda u$ splněna pro všechna čísla $\lambda \in \mathbb{K}$, a to bez ohledu na tvar T, což by činilo spektrální úlohu triviální.

Množina všech vlastních vektorů operátoru T odpovídajících vlastnímu číslu $\lambda \in \sigma(T)$ je zřejmě rovna $\ker(T - \lambda I) \setminus \{0\}$. Speciálně tedy máme, že celkový počet lineárně nezávislých vlastních vektorů operátoru T odpovídajících vlastnímu číslu λ se rovná

$$m_g(\lambda) := \dim \ker(T - \lambda I) .$$

Číslu $m_g(\lambda)$ říkáme *geometrická násobnost* vlastní hodnoty $\lambda \in \sigma(T)$. Pokud $\lambda \in \sigma(T)$ a $m_g(\lambda) = 1$, řekneme, že λ je *geometricky jednoduchá* vlastní hodnota a v opačném případě řekneme, že se jedná o vlastní hodnotu *degenerovanou*.

Z kapitolky 7.1 je zřejmé, že Cauchyho úloha (7.1) s generátorem T má netriviální stacionární řešení tehdy a jen tehdy, pokud spektrum T je neprázdné a počáteční podmínka v (7.1) je právě vlastní vektor operátoru T. Obdobně, z kapitolky 7.2 je zřejmé, že jednodimenzionální invariantní podprostor vůči zobrazení T existuje tehdy a jen tehdy, pokud spektrum T je neprázdné.

Obrázek na titulní stránce (absorpční spektrum Slunce) odpovídá spektru lineárního operátoru (ovšem na nekonečně dimenzionálním vektorovém prostoru), jenž v kvantové teorii reprezentuje energii atomů (z nichž se Slunce skládá).

7.4 Příklady vlastních hodnot a vektorů

Podívejme se nyní na pár základních příkladů vlastních hodnot a vektorů.

Příklad 7.9 (Operátor násobení)**.** Pro libovolné číslo $\alpha \in \mathbb{K}$ má zobrazení αI na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ pouze jednu vlastní hodnotu, a to α, tedy

$$\sigma(\alpha I) = \{\alpha\}\,.$$

Každý nenulový vektor je vlastním vektorem odpovídajícím vlastní hodnotě α, poněvadž $\ker(\alpha I - \alpha I) = \ker(0) = \mathcal{V}$. Geometrická násobnost vlastní hodnoty α je zřejmě rovna dimenzi celého prostoru,

$$m_g(\alpha) = \dim \mathcal{V}\,.$$

$\diamondsuit$

Příklad 7.10 (Rotace)**.** Pro složitější příklad uvažujme zobrazení

$$T : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2 : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}.$$

Pro volbu $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ má zobrazení hezkou geometrickou interpretaci: T otočí vektor v rovině $\mathbb{R}^2$ o $90°$ kolem počátku proti směru hodinových ručiček (viz Cvičení 3.7.4 pro $\varphi = \pi/2$). Lineární zobrazení má vlastní hodnotu tehdy a jen tehdy, pokud existuje nenulový vektor, jenž je zobrazen na skalární násobek sebe samého. Pootočením vektoru o $90°$ v $\mathbb{R}^2$ zřejmě nemůžeme dostat násobek toho samého vektoru. Závěr: pokud $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, operátor T nemá vlastní hodnoty, tedy $\sigma(T) = \varnothing$.

Pro volbu $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ je však závěr zcela odlišný. Abychom našli vlastní hodnoty operátoru T, musíme najít čísla $\lambda \in \mathbb{C}$ taková, že operátorová rovnice

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

má jiná řešení než $x = y = 0$. V našem případě tomu odpovídá systém lineárních algebraických rovnic

$$\begin{aligned} -y &= \lambda x\,, \\ x &= \lambda y\,. \end{aligned}$$

Dosazením druhé rovnice do první rovnice dostaneme

$$-y = \lambda^2 y\,,$$

jež je ekvivalentní (poněvadž y nemůže být nula, aniž by zároveň x bylo nula) číselné rovnosti

$$-1 = \lambda^2\,,$$

jejímž řešením jsou čísla $\pm i$. Dostáváme tudíž výsledek, že T má dvě vlastní hodnoty:

$$\sigma(T) = \{i, -i\}\,.$$

Vlastní vektory odpovídající vlastnímu číslu i mají tvar

$$u_{(i)} := \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad \text{kde} \qquad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,,$$

a vlastní vektory odpovídající vlastnímu číslu $-i$ mají tvar

$$u_{(-i)} := \beta \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad \text{kde} \qquad \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,.$$

Všimněte si, že vlastní vektory $u_{(i)}$ a $u_{(-i)}$ jsou lineárně nezávislé. Následně uvidíme, že toto je zcela obecná vlastnost pro vlastní vektory odpovídající *různým* vlastním hodnotám. Pro geometrické násobnosti vlastních hodnot $\pm i$ zřejmě platí

$$m_g(i) = 1 = m_g(-i)\,,$$

jedná se tedy o jednoduché vlastní hodnoty. $\diamondsuit$

Příklad 7.11. Nechť $C^\infty(\mathbb{R})$ je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ tvořený spojitými funkcemi, jejichž všechny derivace jsou rovněž spojité:

$$C^\infty(\mathbb{R}) := \left\{\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \psi^{(k)} \text{ spojitá}\right\}$$

a uvažujme operátor derivace

$$D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}) : \{\psi \mapsto \psi'\} .$$

Poněvadž exponenciální funkce $\psi_\lambda(z) := e^{\lambda x}$ zjevně splňují $\psi'_\lambda = \lambda\psi_\lambda$ pro všechna $\lambda \in \mathbb{C}$, platí

$$\sigma(D) = \mathbb{C} .$$

Nyní uvažujme tu samou operaci derivace, avšak na restriktivnějším prostoru funkcí

$$C_0^\infty(\mathbb{R}) := \{\psi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \ \operatorname{supp}\psi \text{ kompaktní}\} ,$$

kde $\operatorname{supp}\psi \subset \mathbb{R}$ značí uzávěr množiny bodů, kde ψ je nenulová (kompaktnost je v tomto případě ekvivalentní omezenosti). Nechť

$$D_0 : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to C_0^\infty(\mathbb{R}) : \{\psi \mapsto \psi'\} .$$

Poněvadž exponenciální funkce $\psi_\lambda(z) := e^{\lambda x}$, jež jsou jediným řešením diferenciální rovnice $\psi'_\lambda = \lambda\psi_\lambda$, nejsou nikde v $\mathbb{R}$ nula, máme $\psi_\lambda \notin C_0^\infty(\mathbb{R})$, a tudíž

$$\sigma(D_0) = \varnothing .$$

U tohoto příkladu je však naprosto nezbytné poznamenat, že prostory funkcí $C^\infty(\mathbb{R})$ a $C_0^\infty(\mathbb{R})$ jsou nekonečně dimenzionální vektorové prostory, pro něž je potřeba spektrum definovat jinak. Při této správné definici (již zde nebudeme zmiňovat) je i spektrum D_0 rovno celé komplexní rovině. Naší Definici 7.8 se v případě nekonečně dimenzionálních vektorových prostorů říká *bodové spektrum* a výsledky tohoto příkladu ve skutečnosti říkají, že spektrum operátoru D je čistě bodové a tvořené celou komplexní rovinou, zatímco bodové spektrum operátoru D_0 je skutečně prázdné. $\diamondsuit$

7.5 Lineární nezávislost vlastních vektorů

Věta 7.12. *Nechť $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$. Pokud $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ jsou navzájem odlišné vlastní hodnoty operátoru T a $v_1, \dots, v_m$ jsou odpovídající vlastní vektory, potom platí:*

$$v_1, \dots, v_m \quad \textit{jsou lineárně nezávislé.}$$

Důkaz. Postupujme sporem. Nechť $v_1, \dots, v_m$ jsou lineárně závislé. Nechť $k \in \mathbb{N}^*$ je nejmenší index, pro nějž platí

$$v_k \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_{k-1}) .$$

To znamená, že existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{K}$ taková, že

$$v_k = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k-1} v_{k-1} . \tag{7.12}$$

Zapůsobením zobrazení T na obě strany této rovnosti dostaneme

$$\lambda_k v_k = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1} .$$

Zároveň, vynásobením rovnice (7.12) dostaneme

$$\lambda_k v_k = \alpha_1 \lambda_k v_1 + \dots + \alpha_{k-1} \lambda_k v_{k-1} .$$

Odečtením těchto dvou rovnic nakonec dostaneme vztah

$$0 = \alpha_1(\lambda_k - \lambda_1)v_1 + \cdots + \alpha_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1})v_{k-1} .$$

Poněvadž vektory $v_1, \ldots, v_{k-1}$ jsou lineárně nezávislé (podle definice indexu k) a $\lambda_k \neq \lambda_j$ pro všechna $j = 1, \ldots, k-1$ (podle předpokladu věty), dostáváme výsledek

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0 .$$

To však znamená (viz (7.12)), že $v_k = 0$, což je ve sporu s předpokladem věty. □

Následující důsledek předchozí věty říká, že lineární zobrazení nemůže mít více odlišných vlastních hodnot než je dimenze vektorového prostoru, na kterém funguje.

Důsledek 7.13. *Každý operátor na* $\mathcal{V}$ *má nejvíce* $\dim \mathcal{V}$ *různých vlastních hodnot.*

Důkaz. Nechť $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$. Pokud $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ jsou navzájem odlišné vlastní hodnoty zobrazení T a $v_1, \ldots, v_m$ jsou odpovídající vlastní vektory, potom platí, že $v_1, \ldots, v_m$ jsou lineárně nezávislé (viz předchozí Věta 7.12). Tedy $m \leq \dim \mathcal{V}$ (viz Steinitzova Věta 2.19). □

7.6 Existence spektra

V Příkladu 7.10 jsme viděli, že existují operátory (na reálném vektorovém prostoru), jež mají prázdné spektrum. V této kapitolce si ukážeme, že spektrum operátorů na (konečně dimenzionálních, nenulových) *komplexních* vektorových prostorech je však vždy netriviální. Za tímto účelem si nejdříve ukažme vztah mezi spektrem a determinantem operátoru.

Věta 7.14. *Nechť* $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$. *Potom platí*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \det(T - \lambda I) = 0\} . \tag{7.13}$$

Důkaz. Tvrzení plyne z těchto ekvivalencí:

$$\lambda \in \sigma(T) \qquad \Longleftrightarrow \qquad T - \lambda I \text{ není injektivní} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \det(T - \lambda I) = 0 ,$$

kde první ekvivalence plyne přímo z Definice 7.8, zatímco druhá ekvivalence je jedno z kritérií Věty 6.17. Připomeňme, že injektivita a invertibilita jsou ekvivalentní pojmy a že determinant operátoru je invariant ($\det(T - \lambda I)$ můžeme spočítat jako $\det \mathsf{M}(T - \lambda I)$ pro libovolnou volbu báze). □

Uvědomme si dobře platnost rovností

$$\det(T - \lambda I) = \det \mathsf{M}(T - \lambda I) = \det \big(\mathsf{M}(T) - \lambda\, \mathsf{M}(I)\big) ,$$

kde první rovnost byla zmíněna už na konci předchozího důkazu a druhá platí díky linearitě izomorfismu M. Z vlastností determinantu matice je pak zřejmé, že

$$\det(T - \lambda I) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 , \tag{7.14}$$

kde $\alpha_n, \dots, \alpha_0 \in \mathbb{K}$, je polynom v proměnné λ, jemuž se říká *charakteristický polynom* zobrazení T. Pro krajní čísla vystupující v polynomu (7.14) zřejmě platí

$$\alpha_n = (-1)^n \,, \qquad \alpha_0 = \det T \,,$$

kde n je dimenze uvažovaného vektorového prostoru. Z prvního vztahu vidíme, že stupeň charakteristického polynomu je roven právě dimenzi vektorového prostoru. Rovnici

$$\det(T - \lambda I) = 0 \tag{7.15}$$

jež vystupuje v (7.13), se říká *charakteristická rovnice* zobrazení T. Věta 7.14 tedy redukuje výpočet spektra na řešení algebraické rovnice (7.15).

Věta 7.15. *Každý operátor na komplexním vektorovém prostoru má alespoň jedno vlastní číslo.*

Důkaz. Nechť T je operátor na vektorovém prostoru dimenze $n \geq 1$. Věta 7.14 redukuje výpočet spektra operátoru T na hledání kořenů polynomu (7.14), jehož stupeň je právě n. Základní věta algebry (viz např. [3, Thm. 4.7]) nám říká, že každý polynom stupně $n \geq 1$ má alespoň jeden komplexní kořen. $\square$

Z důkazu předchozí věty je jasné, že můžeme říct mnohem více. Nechť T je operátor na komplexním vektorovém prostoru dimenze $n \geq 1$ a nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ jsou jeho navzájem odlišné vlastní hodnoty ($m \geq 1$). Pro každé $k \in \{1, \dots, m\}$, nechť $m_a(\lambda_k)$ značí násobnost λ_k coby kořene polynomiální rovnice (7.15) a nazvěme toto přirozené nenulové číslo *algebraickou násobností* vlastní hodnoty $\lambda_k \in \sigma(T)$. Pak platí

$$m_a(\lambda_1) + \dots + m_a(\lambda_m) = n \,.$$

Skutečně, toto plyne z faktorizace polynomu

$$\det(T - \lambda I) = c\,(\lambda - \lambda_1)^{m_a(\lambda_1)} \dots (\lambda - \lambda_m)^{m_a(\lambda_m)} \,,$$

jež je důsledkem základní věta algebry. Z tohoto důvodu bývá ve spektrální teorii zvykem ve výčtu vlastních hodnot operátoru každou vlastní hodnotu zopakovat tolikrát, kolik je její algebraická násobnost. S touto konvencí můžeme přeformulovat Větu 7.15 tak, že každý operátor na komplexním vektorovém prostoru dimenze $n \geq 1$ má právě n vlastních čísel.

Student si snadno ověří, že v Příkladech 7.9 a 7.10 jsou si geometrické a algebraické násobnosti vlastních hodnot rovny. Obecně tomu však není, jak ukazuje následující příklad. (Obecně platí nerovnost $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.)

Příklad 7.16. Uvažujme matici

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a odpovídající zobrazení $T_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \{x \mapsto Ax\}$. Snadno ověříme, že

$$\sigma(T_A) = \{0\} \,.$$

Této nulové vlastní hodnotě odpovídá pouze jeden vlastní vektor $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ či přesněji

$$\ker(T_A) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) .$$

V důsledku toho víme, že $m_g(0) = 1$. Avšak

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 ,$$

z čehož vidíme, že $m_a(0) = 2$. $\diamondsuit$

Z důkazu Věty 7.15 je rovněž jasné, proč situace kolem existence vlastních hodnot operátorů na reálných vektorových prostorech je zcela odlišná (polynom nemusí mít žádný reálný kořen).

7.7 Jednoduché matice

V 5. kapitolce jsme diskutovali matici lineárního zobrazení z jednoho vektorového prostoru do jiného vektorového prostoru. Tato matice závisela na volbě báze v každém z těchto vektorových prostorů. Nyní, kdy se zabýváme operátory (tedy lineárními zobrazeními z jednoho vektorového prostoru do toho samého prostoru), vystačíme pouze s jednou bází. Navíc výsledná matice bude čtvercová.

Abychom byli specifičtější, nechť $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$ a nechť $(v_1, \dots, v_n)$ je báze ve $\mathcal{V}$. Potom

$$\mathsf{M}\big(T, (v_1, \dots, v_n)\big) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} ,$$

kde prvky matice jsou (jednoznačně) určeny rozklady

$$Tv_k = a_{1k}v_1 + \dots + a_{nk}v_n , \qquad k = 1, \dots, n .$$

Čísla z tohoto rozkladu tvoří k-tý sloupec matice.

Pokud je T operátor na souřadnicovém prostoru $\mathbb{K}^n$ a báze není specifikována, budeme vždy implicitně předpokládat, že volíme bázi kanonickou. Pak dostaneme k-tý sloupec matice operátoru T aplikací na k-tý bazický vektor.

Cílem lineární algebry je ukázat, že pro každý daný operátor $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$ existuje báze ve $\mathcal{V}$, vzhledem k níž má matice $\mathsf{M}(T)$ "jednoduchý tvar". Jednoduchostí budeme rozumět, že "mnoho" prvků matice je nulových. Co je myšleno mnohostí, ukazuje například tato definice.

Definice 7.17.

- *Horní trojúhelníková matice* je matice, jež má všechny prvky pod diagonálou nulové.
- *Dolní trojúhelníková matice* je matice, jež má všechny prvky nad diagonálou nulové.
- *Diagonální matice* je matice, jež má všechny prvky kromě diagonály nulové.

Horní trojúhelníková matice tedy vypadá nějak takto (diagonála je vyznačena modře):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Připomeňme, že diagonálou čtvercové matice rozumíme prvky, jež leží na šikmé čáře, jež jde z levého horního rohu do pravého dolního rohu matice. Diagonální matice je tedy matice, jež je zároveň horní i dolní trojúhelníková matice. Transpozice horní trojúhelníkové matice je dolní trojúhelníková matice a naopak.

Je-li matice horní trojúhelníková matice, budeme rovněž říkat, že matice je *horního trojúhelníkového tvaru*. A obdobně pro dolní trojúhelníkovou matici a diagonální matici.

Následující tvrzení demonstruje užitečné spojení mezi horními trojúhelníkovými maticemi a invariantními podprostory.

Tvrzení 7.18. *Nechť $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$ a $(v_1, \dots, v_n)$ je báze ve $\mathcal{V}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\mathsf{M}\big(T, (v_1, \dots, v_n)\big)$ *je horní trojúhelníková matice;*

(ii) $\forall k = 1, \dots, n, \qquad Tv_k \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_k)$*;*

(iii) $\forall k = 1, \dots, n, \qquad \operatorname{span}(v_1, \dots, v_k)$ *je invariantní vůči T.*

Důkaz. Ekvivalence (i)⇔(ii) plyne přímo z definice. Implikace (iii)⇒(ii) je rovněž zřejmá. Zbývá tedy ukázat implikaci (ii)⇒(iii).

Předpokládejme tedy, že platí (ii). Zvolme $k \in \{1, \dots, n\}$. Z platnosti (ii) víme, že platí

$$\begin{aligned}
&Tv_1 \in \operatorname{span}(v_1) \subset \operatorname{span}(v_1, \dots, v_k)\,, \\
&Tv_2 \in \operatorname{span}(v_1, v_2) \subset \operatorname{span}(v_1, \dots, v_k)\,, \\
&\quad\vdots \\
&Tv_k \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_k)\,.
\end{aligned}$$

V důsledku toho máme implikaci

$$v \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_k) \qquad \Longrightarrow \qquad Tv \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_k)\,,$$

což znamená, že $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_k)$ je invariantní vůči T. □

Nyní můžeme ukázat, že pro každý operátor na komplexním vektorovém prostoru existuje báze, vzhledem k níž je matice operátoru jednoduchá ve smyslu samých nul pod diagonálou.

Věta 7.19. *Nechť $\mathcal{V}$ je komplexní vektorový prostor a $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$. Potom existuje báze ve $\mathcal{V}$, vzhledem k níž je $\mathsf{M}(T)$ horní trojúhelníková matice.*

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí podle dimenze prostoru $\mathcal{V}$. Tvrzení zřejmě platí, pokud $\dim \mathcal{V} = 1$. Předpokládejme nyní, že $\dim \mathcal{V} \geq 2$ a požadované tvrzení platí pro všechny vektorové prostory, jejichž dimenze je menší než $\dim \mathcal{V}$.

Nechť $\lambda \in \sigma(T)$ je libovolné vlastní číslo operátoru T (Věta 7.15 zaručuje, že T má alespoň jedno vlastní číslo). Nechť

$$\mathcal{U} := \operatorname{ran}(T - \lambda I)\,.$$

Poněvadž $T - \lambda I$ není surjektivní (viz Věta 3.44), platí striktní nerovnost $m := \dim \mathcal{U} < \dim \mathcal{V}$. Navíc platí, že $\mathcal{U}$ je invariantní vůči T. Abychom to dokázali, nechť $u \in \mathcal{U}$. Potom

$$Tu = (T - \lambda I)u + \lambda u \,.$$

Zřejmě $(T - \lambda I)u \in \mathcal{U}$ (z definice podprostoru $\mathcal{U}$) a $\lambda u \in \mathcal{U}$. Tedy skutečně platí, že $\mathcal{U}$ je invariantní vůči T.

Zúžené zobrazení $T \restriction_{\mathcal{U}}$ je tedy operátor na $\mathcal{U}$ (jinými slovy $T \restriction_{\mathcal{U}} \in \mathscr{L}(\mathcal{U})$). Díky naší indukční hypotéze víme, že existuje báze $(u_1, \dots, u_m)$ v $\mathcal{U}$, vzhledem k níž ma zúžený operátor matici horního trojúhelníkového tvaru. Pro každé $j = 1, \dots, m$ tedy platí (viz Tvrzení 7.18)

$$Tu_j = (T \restriction_{\mathcal{U}})(u_j) \in \operatorname{span}(u_1, \dots, u_j) \,. \tag{7.16}$$

Rozšiřme nyní $u_1, \dots, u_m \in \mathcal{U} \subset\subset \mathcal{V}$ na bázi $(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_r)$ ve $\mathcal{V}$. Pro každé $k = 1, \dots, r$ máme

$$Tv_k = (T - \lambda I)v_k + \lambda v_k \,. \tag{7.17}$$

Definice podprostoru $\mathcal{U}$ zaručuje, že $(T - \lambda I)v_k \in \mathcal{U} = \operatorname{span}(u_1, \dots, u_m)$. Ze vztahu (7.17) tudíž dostáváme

$$Tv_k \in \operatorname{span}(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k) \,. \tag{7.18}$$

Užijme nakonec Tvrzení 7.18, abychom ze vztahů (7.16) a (7.18) odvodili, že T má matici horního trojúhelníkového tvaru vzhledem k bázi $(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_r)$. □

V této větě je naprosto kruciální, že uvažujeme operátor na komplexním vektorovém prostoru. Pro operátory na reálném vektorovém prostoru tvrzení obecně neplatí, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 7.20. Uvažujme operátor rotace

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\}$$

z Příkladu 7.10. Předpokládejme, že existuje báze v, w v $\mathbb{R}^2$, vůči níž má T horní trojúhelníkovou matici, tedy

$$\mathsf{M}\big(T, (v, w)\big) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix},$$

kde $a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbb{R}$. Podle definice matice zobrazení (viz Definice 5.2) to znamená, že vektory v, w splňují rovnice

$$\begin{aligned} Tv &= a_{11} v \,, \\ Tw &= a_{12} v + a_{22} w \,. \end{aligned}$$

Dosazením akce operátoru T je první rovnice ekvivalentní skalární soustavě

$$\begin{aligned} -v_2 &= a_{11} v_1 \,, \\ v_1 &= a_{11} v_2 \,, \end{aligned}$$

kde $v =: \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$. Dosazením druhé rovnice do první dostaneme vztah $(1 + a_{11}^2)v_2 = 0$, z něhož plyne, že $v_2 = 0$ (zde je důležité, že a_{11} musí být reálné), a z druhé rovnice pak plyne, že i $v_1 = 0$. Tedy v je nulový vektor, což je ve sporu s předpokladem, že v, w jsou lineárně nezávislé (coby vektory báze). Dokázali jsme, že neexistuje báze, vůči níž má operátor T horní trojúhelníkovou matici.

Jedna osvětlující poznámka na závěr. Když v této kapitolce mluvíme o matici operátoru $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, vždy bereme stejnou bázi ve výchozím i cílovém prostoru. Kdybychom povolili možnost volby různých bází ve $\mathcal{V}$, pak i pro operátor z právě uvažovaného příkladu existují báze, vzhledem k níž má matice operátoru (vzhledem ke dvěma různým bázím!) horní trojúhelníkový tvar, například

$$\mathsf{M}\big(T,(e_1,e_2),(e_2,e_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

◊

Následující tvrzení platí jak na komplexním, tak na reálném vektorovém prostoru, avšak na reálném vektorovém prostoru není předpoklad splněn pro všechny operátory.

Tvrzení 7.21. *Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor se skalárním součinem a $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$. Má-li operátor T matici horního trojúhelníkového tvaru vzhledem k nějaké bázi ve $\mathcal{V}$, pak má rovněž matici horního trojúhelníkového tvaru vzhledem k nějaké ortonormální bázi ve $\mathcal{V}$.*

Důkaz. Nechť operátor T má matici horního trojúhelníkového tvaru vzhledem k nějaké bázi $(v_1,\dots,v_n)$ ve $\mathcal{V}$. Pak $\operatorname{span}(v_1,\dots,v_j)$ je invariantní vhledem k T pro všechna $j=1,\dots,n$ (viz Tvrzení 7.18). Aplikací Gram–Schmidtova ortogonalizačního procesu (viz Věta 4.18) dostaneme z $(v_1,\dots,v_n)$ ortonormální bázi $(w_1,\dots,w_n)$ splňující

$$\forall j \in \{1,\dots,n\}, \qquad \operatorname{span}(w_1,\dots,w_j) = \operatorname{span}(w_1,\dots,w_j)\,.$$

Tedy rovněž $\operatorname{span}(w_1,\dots,w_j)$ je invariantní vhledem k T pro všechna $j=1,\dots,n$. Užitím Tvrzení 7.18 dostáváme, že T má matici horního trojúhelníkového tvaru vzhledem k ortonormální bázi $(w_1,\dots,w_n)$ ve $\mathcal{V}$. □

7.8 Spektrum jednoduchých matic

Nejdříve si ukažme, že matice z Definice 7.17 jsou vskutku jednoduché v tom smyslu, že jejich determinant je snadné spočíst.

Tvrzení 7.22. *Nechť $A = (a_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$ je horní trojúhelníková (nebo dolní trojúhelníková nebo diagonální) matice. Potom platí:*

$$\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}\,.$$

Důkaz. Opakvaným užitím rozkladu determinantu podle prvního sloupce (viz Věta 6.15), dostaneme nakonec požadované tvrzení

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} a_{22} \det \begin{pmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$= a_{11} a_{22} \dots a_{nn} ,$$

poněvadž každá dílčí matice je opět horní trojúhelníková. □

Jak zjistit pohledem na matici operátoru, zda je operátor invertibilní? Pokud máme štěstí a máme k dispozici bázi, vzhledem k níž je matice operátoru horního trojúhelníkového tvaru, pak tento problém má jednoduché řešení, jak ukazuje následující tvrzení.

Tvrzení 7.23. *Nechť $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$ má matici $\mathsf{M}(T) =: (a_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$ horního trojúhelníkového tvaru vzhledem k nějaké bázi ve $\mathcal{V}$. Potom platí, že T je invertibilní tehdy a jen tehdy, pokud všechny prvky na diagonále této matice jsou nenulové:*

$$T \text{ je invertibilní} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall j = 1, \dots, n, \qquad a_{jj} \neq 0 .$$

Důkaz. Nejdříve si uvědomme tyto obecné ekvivalence:

$$T \text{ je invertibilní} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathsf{M}(T) \text{ je invertibilní} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \det \mathsf{M}(T) \neq 0 ,$$

kde první ekvivalence platí díky izomorfnosti zobrazení M a druhá ekvivalence je jedno z kritérií Věty 6.17. Poslední vlastnost je však ekvivalentní dokazovanému kritériu, poněvadž $\det \mathsf{M}(T) = a_{11} \dots a_{nn}$ (viz Tvrzení 7.22). □

Jak zjistit pohledem na matici operátoru, jak vypadá jeho spektrum? Tento problém má opět jednoduché řešení pro matice horního trojúhelníkového tvaru.

Tvrzení 7.24. *Nechť $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$ má matici $\mathsf{M}(T) =: (a_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$ horního trojúhelníkového tvaru vzhledem k nějaké bázi ve $\mathcal{V}$. Potom platí, že vlastní hodnoty operátoru T jsou rovny diagonálním prvkům této matice:*

$$\sigma(T) = \{a_{11}, \dots, a_{nn}\} .$$

Důkaz. Nechť $(v_1, \dots, v_n)$ je báze ve $\mathcal{V}$, vzhledem k níž má T matici horního trojúhelníkového tvaru:

$$\mathsf{M}\big(T, (v_1, \dots, v_n)\big) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Potom máme

$$\mathsf{M}\big(T - \lambda I, (v_1, \dots, v_n)\big) = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} - \lambda & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix},$$

kde $\lambda \in \mathbb{K}$ je libovolné číslo. Podle Tvrzení 7.23 víme, že $T - \lambda I$ není invertibilní tehdy a jen tehdy, když λ je rovno jednomu z čísel $a_{11}, \dots, a_{nn}$. Avšak podle Definice 7.8 platí, že λ je vlastní číslo operátoru T tehdy a jen tehdy, když $T - \lambda I$ není invertibilní. □

Spektrum jsme prozatím definovali pouze pro operátory. Nyní si zaveďme vhodnou definici pro matice.

Definice 7.25. Vlastné čísla a vlastní vektory matice $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ definujeme coby vlastní čísla a vlastní vektory zobrazení

$$T_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n : \{x \mapsto Ax\}.$$

Zde je důležité, že operátor T_A generovaný maticí A uvažujeme na komplexním souřadnicovém prostoru $\mathbb{C}^n$, a to i když $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Spektrum matice je tedy vždy neprázdné.

Z Věty 7.19 a Tvrzení 7.22 a 7.24 této kapitolky dostáváme zajímavé pozorování, že determinant matice můžeme spočíst také tak, že nelezneme vlastní čísla této matice a pronásobíme je mezi sebou. Toto pozorování je konzistentní s dříve diskutovaným pojmem invariantů, poněvadž jak spektrum operátoru, tak determinant matice jsou objekty nezávislé na volbě báze. Obdobně stopu matice dostaneme coby součet vlastních čísel této matice. Pro důležitost tohoto pozorování si to shrňme.

Tvrzení 7.26. *Nechť $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ jsou navzájem odlišné vlastní hodnoty A. Potom platí:*

(i) $\det A = \lambda_1^{m_a(\lambda_1)} \dots \lambda_m^{m_a(\lambda_m)}$;

(ii) $\operatorname{tr} A = m_a(\lambda_1)\,\lambda_1 + \dots + m_a(\lambda_m)\,\lambda_m$;

kde $m_a(\lambda_j)$ je algebraická násobnost vlastní hodnoty λ_j.

Důkaz. Podle Věty 7.19 existuje báze, vzhledem k níž má matice operátoru T_A horní trojúhelníkový tvar. Jinými slovy (viz Věta 6.24),

$$B = Q^{-1}AQ\,,$$

kde $B = (b_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$ je horní trojúhelníková matice a Q je matice přechodu od staré báze k nové. Už víme, že $\det B = \det A$ (viz Věta 6.20) a $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$ (viz Tvrzení 6.26). Avšak determinant horní trojúhelníkové matice se spočte snadno a stopa jako obvykle:

$$\det B = b_{11} \dots b_{nn} \qquad \text{a} \qquad \operatorname{tr} B = b_{11} + \dots + b_{nn}\,. \tag{7.19}$$

Z Tvrzení 7.24 víme, že každé z čísel $b_{11}, \dots, b_{nn}$ je rovno nějaké z navzájem odlišných vlastních hodnot $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ zobrazení T_A, avšak je možné, že hned několik (stejných) čísel z $b_{11}, \dots, b_{nn}$ je rovno té samé vlastní hodnotě. Poněvadž podle Věty 6.20 a Tvrzení 7.22 rovněž platí

$$\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I) = (b_{11} - \lambda) \dots (b_{nn} - \lambda)\,,$$

vidíme, že číslo b_{jj} se v (7.19) opakuje právě tolikrát, kolik je jeho násobnost coby kořene polynomiální rovnice (7.15). □

Rovněž invertibilita operátoru je vlastnost nezávislá na volbě báze. Podle Věty 7.19 a Tvrzení 7.24 lze tuto důležitou vlastnost pro operátory na komplexních prostorech redukovat na výpočet a prozkoumání spektra *libovolné* odpovídající matice.

Už z těchto pozorování tušíme, že spektrum je klíč k porozumění vlastností lineárních zobrazení.

7.9 Diagonalizovatelnost

Definice 7.27. Operátor $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$ je *diagonalizovatelný*, pokud má diagonální matici vzhledem k nějaké bázi ve $\mathcal{V}$,

Místo toho, že operátor je diagonalizovatelný, budeme rovněž říkat, že operátor *lze diagonalizovat.*

Podle definice je operátor $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$ diagonalizovatelný, existuje-li ve $\mathcal{V}$ báze $(v_1, \dots, v_n)$ taková, že

$$\mathsf{M}\big(T, (v_1, \dots, v_n)\big) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ jsou nějaká čísla. Podle Definice 5.2 pro matici lineárního zobrazení lze operátor T diagonalizovat tehdy a jen tehdy, pokud prvky báze $(v_1, \dots, v_n)$ splňují rovnosti

$$\begin{aligned} Tv_1 &= \lambda_1 v_1\,, \\ &\vdots \\ Tv_n &= \lambda_n v_n\,. \end{aligned}$$

Operátor T má tedy diagonální matici vzhledem k nějaké bázi ve $\mathcal{V}$ tehdy a jen tehdy, pokud je tato báze složena z vlastních vektorů operátoru T. Prvky této diagonální matice jsou pak právě vlastní hodnoty operátoru T (viz Tvrzení 7.24).

Naneštěstí však ne každý operátor má diagonální matici vzhledem k nějaké bázi. Pro operátory na reálných vektorových prostorech to už víme (viz Příklad 7.10, kde v reálném případě vlastní hodnoty a vlastní vektory ani neexistují). Tato smutná skutečnost však platí i pro komplexní vektorové prostory, pro něž vždy nějaké vlastní vektory existují (viz Věta 7.15), ale nemusí jich být dostatek pro konstrukci báze, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 7.28. Uvažujme operátor (viz Příklad 7.16)

$$T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 : \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\}.$$

V Příkladu 7.16 jsme již viděli, že T má právě jedno vlastní číslo, a to nulu,

$$\sigma(T) = \{0\},$$

jemuž odpovídá množina vlastních vektorů z jednodimenzionálního podprostoru

$$\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Operátor T tedy nemá dostatek vlastních vektorů, abychom z nich zkonstruovali bázi ve dvojdimenzionálním vektorovém prostoru $\mathbb{C}^2$. V důsledku toho neexistuje báze v $\mathbb{C}^2$, vzhledem k níž by měl operátor T diagonální matici. $\diamondsuit$

Následující tvrzení ukazuje, že operátor lze diagonalizovat, pokud má tolik různých vlastních čísel, kolik je dimenze vektorového prostoru.

Tvrzení 7.29. *Nechť $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$. Potom platí:*

$$T \text{ má } \dim \mathcal{V} \text{ různých vlastních hodnot} \qquad \Longrightarrow \qquad T \text{ je diagonalizovatelný.}$$

Důkaz. Nechť T má $\dim \mathcal{V}$ různých vlastních hodnot $\lambda_1, \dots, \lambda_{\dim \mathcal{V}}$ a nechť $v_1, \dots, v_{\dim \mathcal{V}}$ značí odpovídající vlastní vektory. Podle Věty 7.12 jsou tyto vektory lineárně nezávislé a poněvadž jich je právě tolik, kolik je dimenze prostoru, tvoří bázi (viz Tvrzení 2.34). Zbývá připomenout, že operátor je diagonalizovatelný tehdy a jen tehdy, pokud jeho vlastní vektory tvoří bázi (viz začátek této kapitolky). $\square$

Následující příklad ukazuje, že se jedná jen o postačující podmínku.

Příklad 7.30. Uvažujme operátor

$$T : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3 : \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x_1 \\ 4x_2 \\ 5x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Snadno ověříme, že T má pouze dvě vlastní čísla (4 a 5),

$$\sigma(T) = \{4, 5\},$$

avšak jeho matice vzhledem ke kanonické bázi je diagonální,

$$\mathsf{M}\big(T, (e_1, e_2, e_3)\big) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$\diamondsuit$

Zakončeme tyto úvahy sadou *ekvivalentních* podmínek pro diagonalizovatelnost operátoru.

Tvrzení 7.31. *Nechť $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ označují jeho odlišné vlastní hodnoty. Potom následující vlastnosti jsou ekvivalentní:*

(i) *T je diagonalizovatelný;*

(ii) *ve $\mathcal{V}$ existuje báze tvořená vlastními vektory operátoru T;*

(iii) *existují jednodimenzionální podprostory $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n \subset\subset \mathcal{V}$, jež jsou invariantní vzhledem k T a splňují*
$$\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_n\,;$$

(iv) *$\mathcal{V} = \ker(T - \lambda_1 I) \oplus \cdots \oplus \ker(T - \lambda_m I)$;*

(v) *$\dim \mathcal{V} = \dim\ker(T - \lambda_1 I) \oplus \cdots \oplus \dim\ker(T - \lambda_m I)$.*

Důkaz. Ekvivalenci $\boxed{\text{(i)}\Leftrightarrow\text{(ii)}}$ jsme si už ukázali.

$\boxed{\text{(ii)}\Rightarrow\text{(iii)}}$ Nechť $v_1, \dots, v_n$ značí vlastní vektory operátoru T, jež podle předpokladu tvoří bázi v prostoru $\mathcal{V}$. Pro všechna $j = 1, \dots, n$ položme
$$\mathcal{U}_j := \operatorname{span}(v_j)\,.$$
Je zřejmé, že každé $\mathcal{U}_j$ je jednodimenzionální podprostor ve $\mathcal{V}$, jež je invariantní vzhledem k T (poněvadž každé v_j je vlastním vektorem T). Jelikož $(v_1, \dots, v_n)$ je báze, každý vektor z $\mathcal{V}$ lze jednoznačně zapsat jako lineární kombinaci vektorů $v_1, \dots, v_n$:
$$\forall v \in \mathcal{V}, \quad \exists!\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}, \qquad v = \underbrace{\alpha_1 v_1}_{\in \mathcal{U}_1} + \cdots + \underbrace{\alpha_n v_n}_{\in \mathcal{U}_n}\,.$$
Jinými slovy, $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_n$.

$\boxed{\text{(iii)}\Rightarrow\text{(ii)}}$ Pro dané $j = 1, \dots, n$, nechť v_j je nenulový vektor z $\mathcal{U}_j$. Pak ovšem každý v_j je vlastním vektorem operátoru T (poněvadž $\mathcal{U}_j$ jsou jednodimenzionální invariantní podprostory podle předpokladu). Jelikož platí (podle předpokladu)
$$\forall v \in \mathcal{V}, \quad \exists! u_1 \in \mathcal{U}_1, \dots, u_n \in \mathcal{U}_n \qquad v = u_1 + \cdots + u_n\,.$$
a každý z vektorů u_j je skalárním násobkem v_j, vidíme, že $(v_1, \dots, v_n)$ je báze ve $\mathcal{V}$.

$\boxed{\text{(ii)}\Rightarrow\text{(iv)}}$ Poněvadž každý vektor z $\mathcal{V}$ můžeme jednoznačně napsat jako lineární kombinaci vlastních vektorů operátoru T (poněvadž vlastní vektory tvoří bázi), platí
$$\mathcal{V} = \ker(T - \lambda_1 I) + \cdots + \ker(T - \lambda_m I)$$
(nejedná se *a priori* o direktní součet, jelikož $\ker(T - \lambda_j I)$ může obsahovat dva různé vlastní vektory). Abychom ukázali, že se ve skutečnosti jedná o direktní součet, položme (plánujeme užít Větu 1.25)
$$0 = u_1 + \cdots + u_m\,, \tag{7.20}$$

kde $u_j \in \ker(T - \lambda_j I)$, $j = 1, \dots, m$. Jelikož vektory $u_1, \dots, u_m$ jsou lineárně nezávislé (viz Věta 7.12), dostáváme z (7.20), že každý vektor $u_j = 0$. Podle Věty 1.25 se tedy jedná o direktní součet.

$\boxed{\text{(iv)}\Rightarrow\text{(v)}}$ Tato implikace plyne z Věty 2.36(ii).

$\boxed{\text{(v)}\Rightarrow\text{(ii)}}$ Zvolme bázi v každém z podprostorů $\ker(T - \lambda_j I)$, $j = 1, \dots, m$, a tyto báze dejme dohromady takovým způsobem, že dostaneme soubor vektorů $(v_1, \dots, v_n)$ ve $\mathcal{V}$. Podle konstrukce se jedná o vlastní vektory operátoru T a díky předpokladu skutečně platí $n = \dim \mathcal{V}$. Abychom ukázali, že tyto vektory jsou lineárně nezávislé, položme

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0\,,$$

kde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Pro každý index $j = 1, \dots, m$, nechť u_j označuje součet všech členů $\alpha_k v_k$ takových, že $v_k \in \ker(T - \lambda_j I)$. Tedy každý u_j je vlastní vektor operátoru T odpovídající vlastnímu číslu λ_j a

$$u_1 + \cdots + u_m = 0\,. \tag{7.21}$$

Poněvadž $u_1, \dots, u_m$ jsou vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům, jsou podle Věty 7.12 lineárně nezávislé, a tudíž (7.21) implikuje, že každý vektor $u_j = 0$. Jelikož každý u_j je součet členů $\alpha_k v_k$, kde vektory v_k byly zvoleny tak, že tvořily bázi v $\ker(T - \lambda_j I)$, dostáváme, že všechna čísla α_k jsou rovna nule. Tudíž vektory $v_1, \dots, v_n$ jsou lineárně nezávislé a poněvadž jejich počet odpovídá dimenzi prostoru $\mathcal{V}$, jedná se podle Tvrzení 2.34 o bázi. □

7.10 Samosdruženost

Už jsme se smířili s tím, že ne každý operátor je diagonalizovatelný. Podívejme se nyní na speciální třídu operátorů, jež, jak později uvidíme, jsou vždy diagonalizovatelné. Jelikož tato třída operátorů je definována skrze sdruženost, předpokládejme po zbytek této kapitolky existenci skalárního součinu:

$\mathcal{V}$:= konečně dimenzionální, nenulový vektorový prostor *se skalárním součinem* nad $\mathbb{K}$.

Definice 7.32. Operátor $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$ je *samosdružený*, pokud $T^* = T$.

Na konečně dimenzionálních prostorech je pojem samosdružený operátor identický s alternativními terminologiemi *hermitovský* či *symetrický*. My se však budeme striktně držet termínu samosdružený, jenž je výstižný a konzistentní s analogickým zobecněním na nekonečně dimenzionální vektorové prostory se skalárním součinem (tzv. Hilbertovy prostory).

Samosdružené operátory hrají klíčovou roli v kvantové mechanice, kde reprezentují fyzikální pozorovatelné (např. energie, poloha, hybnost atd.). Spektrum takovéhoto operátoru má pak přímou fyzikální interpretaci coby výsledky měření dané veličiny na studovaném systému. Obrázek na titulní stránce je absorpční spektrum slunečního záření, tedy spektrum operátoru, jenž reprezentuje energii atomů Slunce.

Příklad 7.33. Nechť T je operátor na $\mathbb{K}^2$, jehož matice (vzhledem ke kanonické bázi) má tvar

$$\mathsf{M}(T) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

kde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{K}$. Poněvadž (viz Tvrzení 5.20)

$$\mathsf{M}(T^*) = \mathsf{M}(T)^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} \end{pmatrix},$$

dostáváme následující ekvivalenci pro samosdruženost:

$$T^* = T \qquad \Longleftrightarrow \qquad (a_{11}, a_{22} \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \overline{a_{21}} = a_{12})\,.$$

(V reálném případě $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tedy dostáváme pouze jednu podmínku na symetrii $a_{21} = a_{12}$.) ♢

Operace sdružení operátoru je vlastnost analogická operaci komplexního sdružení čísla. Komplexní číslo z, jež je rovno svému sdruženému číslu $\overline{z}$ (tedy máme "samosdruženou" vlastnost $\overline{z} = z$), je nezbytně reálné. V případě samosdružených operátorů dostáváme reálnost spektra, jak ukazuje následující tvrzení.

Tvrzení 7.34. *Každý samosdružený operátor má reálné spektrum, tedy:*

$$T^* = T \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma(T) \subset \mathbb{R}\,.$$

Důkaz. Pokud $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, pak každá vlastní hodnota je reálná, tvrzení je tudíž netriviální pouze v komplexním případě $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Nechť $\lambda \in \sigma(T) \subset \mathbb{C}$ je vlastní hodnota operátoru T a nechť $v \in \mathcal{V}$ je odpovídající vlastní vektor, tedy $Tv = \lambda v$. Potom platí

$$\lambda \|v\|^2 = \langle v, \lambda v\rangle = \langle v, Tv\rangle = \langle T^* v, v\rangle = \langle Tv, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \overline{\lambda}\, \|v\|^2\,.$$

Poněvadž v je podle definice nenulový, dostáváme $\lambda = \overline{\lambda}$, a tudíž $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Opačná implikace samozřejmě neplatí, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 7.35. Nechť T je operátor na $\mathbb{C}^2$, jehož matice (vzhledem ke kanonické bázi) má tvar

$$\mathsf{M}(T) = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Snadno ověříme, že spektrum je reálné,

$$\sigma(T) = \{1, 2\}\,,$$

avšak T je zřejmě nesamosdružený. ♢

Tvrzení 7.36. *Nechť $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$ je samosdružený. Vlastní vektory operátoru T odpovídající různým vlastním číslům jsou ortogonální.*

Důkaz. Nechť $\lambda_1 \neq \lambda_2$ jsou odlišná vlastní čísla operátoru T a nechť v_1, v_2 jsou odpovídající vlastní vektory, tedy

$$Tv_1 = \lambda_1 v_1 \qquad \text{a} \qquad Tv_2 = \lambda_2 v_2 \,.$$

Potom platí

$$\begin{aligned}(\lambda_1 - \lambda_2)\langle v_1, v_2\rangle &= \langle \lambda_1 v_1, v_2\rangle - \langle v_1, \lambda_2 v_2\rangle \\ &= \langle Tv_1, v_2\rangle - \langle v_1, Tv_2\rangle \\ &= \langle Tv_1, v_2\rangle - \langle T^* v_1, v_2\rangle \\ &= 0\,,\end{aligned}$$

kde první rovnost využívá reálnosti spektra samosdruženého operátoru (viz Tvrzení 7.34) a poslední rovnost platí opět díky samosdruženosti. Poněvadž $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ podle předpokladu, dostáváme požadované tvrzení $\langle v_1, v_2\rangle = 0$. □

7.11 Spektrální teorém

Nyní se dostáváme k hlavnímu a naprosto fundamentálnímu výsledku lineární algebry, s mnoha aplikacemi zvláště v kvantové teorii.

Připomeňme, že operátor $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$ je diagonalizovatelný tehdy a jen tehdy, pokud v prostoru $\mathcal{V}$ existuje báze tvořená vlastními vektory operátoru T (viz Tvrzení 7.31). Následující výsledek nám říká, že toto je vždy případ samosdružených operátorů a že se navíc jedná o ortonormální bázi (což je ta nejhezčí možná).

Věta 7.37 (Spektrální teorém)**.** *Nechť $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$ je samosdružený. Potom ve $\mathcal{V}$ existuje ortonormální báze tvořená vlastními vektory operátoru T.*

Důkaz. Věta platí v této obecnosti, avšak my si ji dokážeme pouze v komplexním případě $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Poněvadž jsme na komplexním vektorovém prostoru, existuje ortonormální báze $(v_1, \ldots, v_n)$ ve $\mathcal{V}$, vzhledem k níž je matice T horního trojúhelníkového tvaru (viz Věta 7.19 a Tvrzení 7.21):

$$\mathsf{M}\big(T, (v_1, \ldots, v_n)\big) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Jelikož T je samosdružený, musí být všechny nediagonální prvky této matice rovny nule (aby platilo $\mathsf{M}(T, (v_1, \ldots, v_n)) = \mathsf{M}(T, (v_1, \ldots, v_n))^*$.) Tedy tato matice je ve skutečnosti diagonální, což znamená, že $(v_1, \ldots, v_n)$ je ortonormální báze tvořená vlastními vektory operátoru T. □

Důsledek 7.38. *Nechť $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$ je samosdružený a $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ označují jeho odlišné vlastní hodnoty. Potom platí:*

(i) $\mathcal{V} = \ker(T - \lambda_1 I) \oplus \cdots \oplus \ker(T - \lambda_m I)$;

(ii) *každý vektor z $\ker(T - \lambda_j I)$ je ortogonální ke všem vektorům z ostatních podprostorů tohoto rozkladu.*

Důkaz. Věta 7.37 zaručuje, že v prostoru $\mathcal{V}$ existuje ortonormální báze tvořena vlastními vektory operátoru T. Vlastnost (i) pak plyne z Tvrzení 7.31, zatímco (ii) je důsledkem Tvrzení 7.36. □

Tento důsledek nám dává ten nejhezčí možný rozklad vektorového prostoru $\mathcal{V}$ pro operátor T: na každém podprostoru $\ker(T - \lambda_j I)$ je akcí T pouze násobení číslem λ_j.

7.12 Polynom operátoru

Jeden z důvodů, proč existuje bohatší teorie pro zobrazení z jednoho vektorového prostoru do toho samého, je možnost definice jejich mocnin. V této kapitolce zavedeme tento pojem a dokonce definujeme polynom coby zobrazení na prostoru lineárních zobrazení.

Pokud $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$, pak složené zobrazení $TT =: T^2$ má smysl a je to opět zobrazení z prostoru $\mathscr{L}(\mathcal{V})$. Obecněji, pokud $m \in \mathbb{N}^*$, pak m-tou *mocninu* zobrazení T definujeme předpisem

$$T^m := \underbrace{T \dots T}_{m\text{-krát}}.$$

Je výhodné rovněž definovat nultou mocninu $T^0 := I$ (identita na $\mathcal{V}$).

Pro invertibilní lineární zobrazení T můžeme navíc definovat zápornou mocninu předpisem

$$T^{-m} := (T^{-1})^m .$$

(Připomeňme, že T^{-1} označuje inverzní zobrazení k zobrazení T, jež je dobře definováno, jakmile T je invertibilní.)

Student si snadno dokáže následující tvrzení.

Tvrzení 7.39. *$\forall T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad T^m T^n = T^{m+n} , \\ &\text{(ii)} \quad (T^m)^n = T^{mn} . \end{aligned}$$

Pokud je T invertibilní, vztahy platí i pro $m, n \in \mathbb{Z}$.

Uvažujme nyní polynom $p \in \mathcal{P}$, jenž zapíšeme ve tvaru

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_m x^m ,$$

kde $x \in \mathbb{K}$ a $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$. Potom definujeme *polynom operátoru* $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$ předpisem

$$p(T) := \alpha_0 I + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \dots + \alpha_m T^m . \tag{7.22}$$

Pokud zafixujeme zobrazení $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$, potom zobrazení

$$\mathcal{P} \to \mathscr{L}(\mathcal{V}) : \{p \mapsto p(T)\}$$

je lineární, jak snadno ověříte.

Student si rovněž snadno dokáže následující pěkná tvrzení.

Tvrzení 7.40. $\forall T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$, $\forall p, q \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad (pq)(T) = p(T)q(T)\,, \\ &\text{(ii)} \quad [p,q](T) = 0\,. \end{aligned}$$

7.13 Exponenciála operátoru

V předchozí kapitolce jsme zavedli pojem polynomu operátoru $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$ přirozeným předpisem (7.22). Zvídavějšího studenta samozřejmě napadne, že kdybychom vzali takovýto polynomiální součet až do nekonečna, mohli bychom definovat funkci operátoru, tak jak jsme zvyklí definovat skalární funkce pomocí nekonečných řad (viz Taylorův vzorec). Následující definice reprezentuje jeden velice důležitý příklad funkce operátoru, kdy to funguje.

Definice 7.41. *Exponenciála operátoru* $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V})$ je lineární operátor definovaný předpisem

$$e^T := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}\,. \tag{7.23}$$

Zde pravou stranu chápeme jako limitu částečných součtů. Abychom si ukázali, že tato limita konverguje, zaveďme *normu operátoru* předpisem

$$\|T\| := \sup_{\substack{v \in \mathcal{V} \\ v \neq 0}} \frac{\|Tv\|}{\|v\|}\,. \tag{7.24}$$

Na pravé straně této definice vystupují normy vektorů, jejichž definici známe pro vektorové prostory se skalárním součinem (připomeňme, že předpokládáme, že $\mathcal{V}$ je takový prostor). Pro rozdíl částečných součtů dostáváme

$$\left\| \sum_{k=0}^{N} \frac{T^k}{k!} - \sum_{k=0}^{M} \frac{T^k}{k!} \right\| = \left\| \sum_{k=N+1}^{M} \frac{T^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=N+1}^{M} \frac{\|T^n\|}{n!} \leq \sum_{k=N+1}^{M} \frac{\|T\|^k}{k!}\,,$$

kde nerovnosti plynou z vlastností normy (7.24). Tím jsme se dostali zpět do skalárního případu, odkud víme, že pravá strana jde k nule pro $N, M \to \infty$, a to stejnoměrně pro všechny matice A, jejichž norma $\|A\|$ je menší než nějaká daná konstanta.

Příklad 7.42. Uvažujme matice (viz Příklad 3.11)

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

jež můžeme chápat jako operátory na souřadnicovém prostoru $\mathbb{R}^2$. Snadno se ověří, že $A^2 = 0$ a $B^2 = 0$, tudíž přímo Definice 7.41 dává

$$e^A = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad e^B = I + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poněvadž
$$e^A e^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad e^B e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$
nemůžeme obecně očekávat platnost vzorečku
$$e^{A+B} = e^A e^B\,, \tag{7.25}$$
jenž známe ze skalárního případu. Neplatnost tohoto vzorečku pro naše matice je zřejmá z toho, že bychom zároveň museli mít $e^{A+B} = e^B e^A$ (poněvadž vlevo $A+B = B+A$), avšak výše jsme si ukázali, že $e^A e^B \neq e^B e^A$.

Alternativně můžeme rovněž přímo spočíst exponenciálu součtu těchto matic
$$e^{A+B} = \begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix},$$
pokud využijeme vztahů
$$(A+B)^k = \begin{cases} I & \Leftrightarrow \ k \text{ je sudé}\,, \\ A+B & \Leftrightarrow \ k \text{ je liché}\,, \end{cases}$$
a Taylorova rozvoje funkcí cosh a sinh.

Na závěr poznamenejme, že vzoreček (7.25) platí pro komutující matice A, B (libovolného stupně), tedy splňující $[A,B] = 0$. ♢

Derivováním řady (7.23) člen po členu dostaneme
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{tT} = e^{tT} T = T e^{tT}\,.$$
Díky tomuto vztahu můžeme řešení Cauchyho operátorové úlohy
$$\begin{cases} u' = Tu\,, & t \in [0,\infty)\,, \\ u(0) = u_0 \in \mathcal{V}\,, \end{cases} \tag{7.26}$$
kterou jsme naše spektrální úvahy motivovali v Kapitole 7.1, najít ve tvaru
$$u(t) = e^{tT} u_0\,.$$
Poněvadž mnoho fyzikálních úloh vede diferenciálním rovnicím typu (7.26) (připomeňme si sadu úloh z Příkladu 7.1 motivovaných druhým Newtonovým zákonem), je exponenciála operátoru velice důležitým matematickým objektem. Ukažme si, jak pomocí exponenciály matice vyřešit dva vám dobře známé příklady z klasické mechaniky.

Příklad 7.43 (Rovnoměrný přímočarý pohyb)**.** Uvažujme jednorozměrný pohyb tělesa o hmotnosti m, na nějž nepůsobí žádné síly. Z obecného vztahu (7.7) víme, že polohu x a rychlost v částice, coby souřadnice vektoru v dvojdimenzionálním (fázovém) prostoru $\mathbb{R}^2$, najdeme jako řešení Cauchyho úlohy
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$
To je speciální případ obecné soustavy (7.26), kde $T := A$ je matice z Příkladu 7.42 (chápána jako zobrazení z $\mathbb{C}^2$ do $\mathbb{C}^2$). Aplikací exponenciály
$$e^{tA} = I + tA = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

na vektor $\binom{x_0}{v_0}$ obdržíme

$$\forall t \geq 0, \qquad x(t) = x_0 + v_0 t\,, \qquad v(t) = v_0\,,$$

což jsou vztahy pro rovnoměrný přímočarý pohyb, jež dobře znáte ze základní školy. $\diamondsuit$

Příklad 7.44 (Pohyb tělesa v odporujícím prostředí)**.** Uvažujme nyní jednorozměrný pohyb tělesa o hmotnosti m, na nějž působí odporová síla prostředí $F_D = -av$ (čím větší rychlost, tím větší odpor prostředí), kde a je kladná konstanta charakterizující odpor prostředí pro dané těleso. Gravitační ani jiné síly neuvažujeme. Užitím obecného vztahu (7.7) můžeme dynamické rovnice zapsat ve tvaru

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

kde zkracujeme $c := a/m$. Tuto soustavu diferenciálních rovnic s počátečními podmínkami můžeme najít řešením jednotlivých rovnic, podívejme se však na řešení skrze exponenciálu matice $A := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -c \end{smallmatrix}\right)$. Snadno ověříme, že platí

$$\forall k \geq 1, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -c \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 0 & (-c)^{k-1} \\ 0 & (-c)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (-c)^{-1}(-c)^k \\ 0 & (-c)^k \end{pmatrix}.$$

Užitím Definice 7.41 tedy dostáváme

$$e^{tA} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & (-c)^{-1}\dfrac{(-ct)^k}{k!} \\ 0 & \dfrac{(-ct)^k}{k!} \end{pmatrix} = I + \begin{pmatrix} 0 & (-c)^{-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-ct)^k}{k!} \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-ct)^k}{k!} \end{pmatrix} = I + \begin{pmatrix} 0 & (-c)^{-1}(e^{-ct}-1) \\ 0 & (e^{-ct}-1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & (-c)^{-1}(e^{-ct}-1) \\ 0 & e^{-ct}-1 \end{pmatrix}.$$

Aplikací tohoto výsledku na vektor počátečních podmínek $\binom{x_0}{v_0}$ nakonec obdržíme

$$\forall t \geq 0, \qquad x(t) = x_0 + \frac{v_0}{c}\,(1 - e^{-ct})\,, \qquad v(t) = v_0\, e^{-ct}\,.$$

Vidíme, že těleso se zastaví až v nekonečném čase a celková dráha, kterou od času nula urazí, je rovna

$$\lim_{t\to\infty}[x(t) - x_0] = \frac{v_0}{c} = \frac{mv_0}{a}\,.$$

Jak bychom intuitivně očekávali, čím větší počáteční hybnost tělesa, tím větší uražená dráha. $\diamondsuit$

Jak spočíst exponenciálu matice? V Příkladě 7.42 se nám exponenciálu konkrétních matic podařilo spočíst přímo z Definice 7.41, poněvadž buď jejich určitá mocnina byla nulová (matice A, B), tudíž i vyšší mocniny byly nulové a nekonečná řada (7.23) se tak redukuje na (konečný) polynom operátoru, nebo jejich mocniny splňovaly určitá pravidla (matice $A+B$), díky nimž jsme vypočet exponenciály matice redukovali na skalární problém (viz rovněž Příklad 7.44).

Další třídou matic, pro něž umíme exponenciálu spočíst, jsou diagonální matice:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}. \tag{7.27}$$

To plyne přímo z Definice 7.41, pokud si uvědomíme, že libovolnou mocninu diagonální matice je snadné spočíst:

$$\forall k \geq 0, \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Obecná matice, se kterou se v životě setkáme (například u zkoušky) však nebude ani diagonální, ani její mocniny nebudou splňovat nějaká zřejmá pravidla. Přesto se exponenciálu matice naučíme spočíst pro další velkou třídu matic, a to pro samosdružené matice $A = A^*$. Zde totiž můžeme využít spektrálního teorému (Věta 7.37), jenž nám zaručuje, že matice A je diagonalizovatelná, a to vzhledem k bázi tvořené vlastními vektory matice A, o nichž navíc víme, že jsou ortogonální. Máme tudíž vztah

$$A = QDQ^{-1}, \tag{7.28}$$

kde D je diagonální matice, na jejíž diagonále leží vlastní čísla matice A, a sloupce matice Q jsou odpovídající vlastní vektory (viz Věta 6.24). Poněvadž $A^k = QD^kQ^{-1}$ pro všechna $k \geq 0$, z Definice 7.41 a (7.28) pak rovnou dostáváme

$$e^A = Q\, e^D\, Q^{-1}, \tag{7.29}$$

kde e^D umíme spočíst podle (7.27).

Problém nalezení exponenciály samosdružené matice A se tedy redukuje na spočtení jejích vlastních čísel a vlastních vektorů. Jinými slovy, řešení Cauchyho úlohy (7.26) se redukuje na spektrální analýzu operátoru T.

Příklad 7.45. Spočtěme výše uvedeným postupem exponenciálu samosdružené matice

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

jež vystupuje v Příkladu 7.42 ($C = A + B$). Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní hodnota matice C tehdy a jen tehdy, pokud $C - \lambda I$ není invertibilní, což je ekvivalentní podmínce

$$\det(C - \lambda I) = \lambda^2 - 1 = 0$$

(zde první rovnost je pouhý výpočet determinantu). Z toho dostáváme dvě vlastní čísla $\lambda_1 := -1$ a $\lambda_2 := 1$, a tedy

$$\sigma(C) = \{-1, 1\}.$$

Odpovídající vlastní vektory jsou například

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

což plyne z ověření vztahů $(C - \lambda_1 I)v_1 = 0$ a $(C - \lambda_2 I)v_2 = 0$. Dostáváme tedy

$$C = QDQ^{-1}, \qquad \text{kde} \qquad D := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad Q := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

kde matice D má na diagonále vlastní čísla matice C a matice přechodu Q od kanonické báze k bázi tvořené vlastními vektory matice C má ve sloupcích odpovídající vlastní vektory. Zbývá spočíst exponenciálu diagonální matice D podle vztahu (7.27) a inverzní matici ke Q:

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}, \qquad Q^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

a dosadit do vzorečku (7.29):

$$e^C = Q\,e^D\,Q^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme tudíž ten samý výsledek jako v Příkladu 7.42. ♢

Příklad 7.46 (Harmonický oscilátor)**.** Jak uvedeno v Příkladu 7.1, fyzikální problém harmonického oscilátoru (bez tlumení) vede na hledání exponenciály matice

$$H := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix},$$

kde $\omega > 0$ má význam tuhosti pružiny. Poněvadž $\det(H - \lambda I) = \lambda^2 + \omega^2$, máme

$$\sigma(H) = \{-i\omega, i\omega\}.$$

Poněvadž je spektrum tvořeno dvěma různými vlastními čísly, víme, že matice H je diagonalizovatelná (i když není samosdružená). Řešením rovnic $Hv = \mp i\omega v$ snadno najdeme odpovídající vlastní vektory, například

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix}.$$

Pro libovolnou hodnotu parametru $t \geq 0$ (čas) tedy dostáváme

$$H = QDQ^{-1}, \qquad \text{kde} \qquad D := \begin{pmatrix} -i\omega & 0 \\ 0 & i\omega \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad Q := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i\omega & i\omega \end{pmatrix},$$

kde matice D má na diagonále vlastní čísla matice H a matice přechodu Q od kanonické báze k bázi tvořené vlastními vektory matice H má ve sloupcích odpovídající vlastní vektory. Pro libovolnou hodnotu parametru $t \geq 0$ (čas) tedy máme

$$tH = Q(tD)Q^{-1}.$$

Zbývá spočíst exponenciálu diagonální matice D podle vztahu (7.27) a inverzní matici ke Q:

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t} \end{pmatrix}, \qquad Q^{-1} = \frac{1}{2i\omega} \begin{pmatrix} i\omega & -1 \\ i\omega & 1 \end{pmatrix},$$

a dosadit do vzorečku (7.29):

$$e^{tH} = Q\,e^{tD}\,Q^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \omega^{-1}\sin(\omega t) \\ -\omega\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Aplikací tohoto výsledku na vektor počátečních podmínek $\binom{x_0}{v_0}$ nakonec obdržíme

$$\forall t \geq 0, \qquad x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t), \qquad v(t) = -x_0\omega\sin(\omega t) + v_0\cos(\omega t),$$

což jsou dobře známé periodické kmity harmonického oscilátoru.

Zkuste si obdobně spočítat časový vývoj tlumeného oscilátoru. ♢

Rozlučme se pravděpodobně nejhezčím tvrzením lineární algebry.

Věta 7.47. *$\forall A \in \mathbb{K}^{n\times n}$,*

$$\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}.$$

Důkaz. Věta platí v plné obecnosti, dokažme si ji však pouze pro samosdružené matice,

$A = A^*$. Pak máme

$$\det e^A = \det(Q\, e^D\, Q^{-1}) = \det e^D = e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} = e^{\operatorname{tr} D} = e^{\operatorname{tr}(QDQ^{-1})} = e^{\operatorname{tr} A}\,,$$

kde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ značí prvky na diagonále diagonální matice D. Zde první rovnost plyne z (7.29), druhá rovnost platí díky Větě 6.20, třetí rovnost plyne ze (7.27) a Tvrzení 7.22, čtvrtá rovnost je elementární, pátá rovnost plyne přímo z definice stopy matice, šestá rovnost platí díky Tvrzení 6.26 a poslední rovnost je diagonalizační vztah (7.28). □

7.14 Cvičení

1. Najděte spektrum následujících matic (značme si každou z nich jednotným symbolem A). Určete geometrické a algebraické násobnosti vlastních hodnot. V případě existence dostatečného počtu vlastních vektorů, najděte matici $\tilde{A}$ zobrazení $x \mapsto Ax$ vzhledem k bázi tvořené vlastními vektory. V případě nedostatečného počtu vlastních vektorů, doplňte vlastní vektory na bázi a najděte matici $\tilde{A}$ vzhledem k této bázi.

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, (e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

(f) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, (g) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, (h) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, (i) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$, (j) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(k) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (l) $\begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -10 & 3 & 6 \\ 1 & -9 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, (m) $\begin{pmatrix} 10 & -9 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 8 & -9 & 1 & 0 \\ 8 & -9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[(a) $\sigma(A) = \{0\}$, $m_g(0) = m_a(0) = 2$, $u_{(0)}^{(1)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $u_{(0)}^{(2)} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\tilde{A} = A$;
(b) $\sigma(A) = \{0\}$, $m_g(0) = 1$, $m_a(0) = 2$, $u_{(0)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\tilde{A} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ vzhledem k $(u_{(0)}, e_2)$;
(c) $\sigma(A) = \{i, -i\}$, $m_a(i) = m_a(-i) = 1$, $u_{(i)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -i \end{smallmatrix}\right)$, $u_{(-i)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ i \end{smallmatrix}\right)$, $\tilde{A} = \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)$;
(d) $\sigma(A) = \{0, 2\}$, $m_a(0) = m_a(2) = 1$, $u_{(0)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $u_{(2)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\tilde{A} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$;
(e) $\sigma(A) = \{-1, 1\}$, $m_a(-1) = m_a(1) = 1$, $u_{(-1)} = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $u_{(1)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\tilde{A} = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$;
(f) $\sigma(A) = \{1, 2\}$, $m_g(1) = 1$, $m_a(1) = 2$, $m_a(2) = 1$, $u_{(1)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $u_{(2)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$,
$\tilde{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ vzhledem k $(u_{(1)}, u_{(2)}, e_{(3)})$;
(g) $\sigma(A) = \{0, -1, -3\}$, $u_{(0)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, $u_{(-1)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $u_{(-3)} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\tilde{A} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{smallmatrix}\right)$;
(h) $\sigma(A) = \{2\}$, $m_g(2) = 2$, $m_a(2) = 3$, $u_{(2)}^{(1)} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $u_{(2)}^{(2)} = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$,
$\tilde{A} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ vzhledem k $(u_{(2)}^{(1)}, u_{(2)}^{(2)}, e_3)$;
(i) $\sigma(A) = \{1, 2, 3\}$, $u_{(1)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $u_{(2)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $u_{(3)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\tilde{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$;
(j) $\sigma(A) = \{1, 1-i, 1+i\}$, $u_{(1)} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $u_{(1-i)} = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $u_{(1+i)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\tilde{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{smallmatrix}\right)$;
(k) $\sigma(A) = \{2, 0, 1, 7\}$, $u_{(2)} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $u_{(0)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $u_{(1)} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $u_{(7)} = \left(\begin{smallmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
(l) $\sigma(A) = \{2, 0, 1, 8\}$, $u_{(2)} = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $u_{(0)} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $u_{(1)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $u_{(8)} \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.
(m) $\sigma(A) = \{2, 0, 1, 9\}$, $u_{(2)} = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $u_{(0)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $u_{(1)} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $u_{(9)} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.]

2. Spočtěte exponenciálu matic (a), (b), (c), (d) a (g) z předchozího cvičení.

[(a) $e^A = I$;
(b) $e^A = I + A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$; *Hint:* Spočtěte A^2;
(c) $e^A = \left(\begin{smallmatrix} \cos 1 & -\sin 1 \\ \sin 1 & \cos 1 \end{smallmatrix}\right)$;

(d) $e^A = e\begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix}$;
(g) $e^A = \begin{pmatrix} 2-e^{-1} & -1+e^{-1} & 0 \\ 2-e^{-1} & -1+e^{-1} & 0 \\ \frac{1}{3}(2+e^{-3}-3e^{-1}) & \frac{1}{3}(-1-2e^{-3}+3e^{-1}) & e^{-3} \end{pmatrix}$.]

3. Na trojrozměrném souřadnicovém prostoru definujme operátor

$$T : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K} : \{u \to a \times u\},$$

kde křížek značí vektorový součin (který definujeme stejně jako na reálném prostoru, viz Cvičení 6.13.3) a $a \in \mathbb{K}$ je daný nenulový vektor. Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory operátoru T, a to jak v případě reálného, tak komplexního prostoru. V reálném případě interpretujte geometricky.

[Pro $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\sigma(T) = \{0\}$, $u_{(0)} = a$ (vektor $a \times u$ musí být ortogonální k a i u).
Pro $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\sigma(T) = \{0, \pm i\|a\|\}$, $u_{(0)} = a$, $u_{(\pm i\|a\|)} = \begin{pmatrix} \pm a_1 a_2 - a_3 i\|a\| \\ \mp(a_1^2 + a_3^2) \\ \pm a_2 a_3 + a_1 i\|a\| \end{pmatrix}$.]

4. Na prostoru matic stupně dva definujme zobrazení

$$L : \mathbb{C}^{2\times 2} \to \mathbb{C}^{2\times 2} : \{A \mapsto -A^T\}.$$

(a) Dokažte, že se jedná o lineární zobrazení.

(b) Nalezněte vlastní hodnoty a vlastní vektory operátoru L.

(c) Vybavme prostor $\mathbb{C}^{2\times 2}$ skalárním součinem $\langle A, B\rangle := \operatorname{tr}(A^* B)$. Rozhodněte, zda L je samosdružený.

(d) Spočtěte exponenciálu operátoru L.

(e) Spočtěte determinant a stopu operátoru L.

(f) Spočtěte determinant a stopu operátoru e^L. Ověřte platnost tvrzení $\det e^L = e^{\operatorname{tr} L}$.

[(b) $\sigma(L) = \{-1, -1, -1, 1\}$,
$\ker[L - (-1)I] = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\ker[L - 1I] = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.
(c) Ano.
(d) $e^L = \cosh 1\, I + \sinh 1\, L$; *Hint:* Spočtěte L^2.
(e) $\det L = (-1)(-1)(-1)1 = -1$, $\operatorname{tr} L = (-1) + (-1) + (-1) + 1 = -2$.
(f) $\det e^L = e^{-1}e^{-1}e^{-1}e^1 = e^{-2}$, $\operatorname{tr} e^L = e^{-1} + e^{-1} + e^{-1} + e^1 = 3e^{-1} + e$.
(Stopu lze také spočíst přímým výpočtem.)]

8 Formy

Na závěr tohoto kurzu stručně zmíníme ještě jednu strukturu na vektorových prostorech, která se vám bude hodit v navazujících přednáškách. V této kapitolce čerpáme z odpovídajících částí knih od Kato [7] a Weidmanna [10]. Nejdříve náš vektorový prostor nijak neomezujeme:

$$\boxed{\mathcal{V} := \text{vektorový prostor nad } \mathbb{K}.}$$

8.1 Sesquilineární a kvadratické formy

Definice 8.1. *Sesquilineární forma* na $\mathcal{V}$ je funkce $t : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{K} : \{(u,v) \mapsto t(u,v)\}$ splňující následující axiomy:

(1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \; u, v, w \in \mathcal{V}, \qquad t(u, \alpha v + \beta w) = \alpha\, t(u,v) + \beta\, t(u,w);$

(2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \; u, v, w \in \mathcal{V}, \qquad t(\alpha u + \beta v, w) = \overline{\alpha}\, t(u,w) + \overline{\beta}\, t(v,w).$

Pro každý daný vektor $u \in \mathcal{V}$ nám tedy předpis $v \mapsto t(u,v)$ definuje lineární zobrazení, zatímco $u \mapsto t(u,v)$ pro daný vektor $v \in \mathcal{V}$ je zobrazení *antilineární* (či *semilineární*). Latinská předpona *sēsqui* je zkonstruována ze slov *semi* (= "půl") a *que* (= "také") a její význam je "jeden a půl", tedy:

$$\text{sesqui} = 1\tfrac{1}{2}.$$

Funkci $t : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{K}$, jež je lineární v obou argumentech, se říká *bilineární forma*. Speciálně, každá sesquilineární forma na reálném vektorovém prostoru je bilineární forma.

Definice 8.2. *Kvadratická forma* na $\mathcal{V}$ je funkce $t : \mathcal{V} \to \mathbb{K} : \{u \mapsto t[u]\}$ definovaná předpisem

$$t[u] := t(u,u)$$

pro libovolný vektor $u \in \mathcal{V}$, kde vpravo vystupuje sesquilineární forma na $\mathcal{V}$.

Kvadratickou formu odpovídající sesquilineární formě t tedy značíme opět stejným písmenkem t a rozdíl mezi těmito dvěma (skutečně rozdílnými!) objekty naznačujeme pouze typem závorek kolem argumentů. Toto na první pohled hrozivé schisma není nakonec tak závažné, alespoň na komplexních vektorových prostorech. Za prvé, kvadratická forma je (zřejmě) vždy jednoznačně určena sesquilineární formou. Za druhé, pokud $\mathcal{V}$ je komplexní, pak sesquilineární forma je (překvapivě) jednoznačně určena kvadratickou formou, jak ukazuje následující tvrzení.

Tvrzení 8.3 (Polarizační identita, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)**.** *Nechť t je sesquilineární forma na komplexním vektorovém prostoru $\mathcal{V}$. Pak platí*

$$\forall u, v \in \mathcal{V}, \qquad t(u,v) = \frac{1}{4}\Big(t[u+v] - t(u-v) + i\,t[u-iv] - i\,t[u+iv]\Big).$$

Důkaz tohoto tvrzení se snadno provede výpočtem pravé strany s použitím Definic 8.1 a 8.2. Důležité je si uvědomit, že platnost polarizační identity úzce souvisí s existencí skaláru i; na reálných vektorových prostorech není pravda, že by sesquilineární forma byla jednoznačně určena kvadratickou formou, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 8.4. Na reálném souřadnicovém prostoru $\mathbb{R}^2$ uvažujme seskvilineární formu

$$t\big(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)\big) := x_1 y_2 - x_2 y_1 \,. \tag{8.1}$$

Odpovídající kvadratická forma splňuje

$$t\big[\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)\big] = 0\,,$$

a to pro libovolnou volbu čísel $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Kvadratická forma je identicky rovna nule, zatímco sesquilineární forma je zřejmě netriviální. Na reálných vektorových prostorech tedy neexistuje předpis typu Tvrzení 8.3, jenž by umožnil zkonstruovat sesquilineární formu z kvadratické formy. (Všimněte si, že (8.1) nedefinuje sesquilineární formu na komplexním prostoru $\mathbb{C}^2$, poněvadž x-ové složky nejsou opruhované.) $\diamondsuit$

Důležité je si uvědomit, že kvadratická forma není lineární zobrazení; platí

$$\forall \alpha \in \mathbb{K},\ u \in \mathcal{V}, \qquad t[\alpha u] = |\alpha|^2\, t[u]\,.$$

Na vektorovém prostoru se skalárním součinem je typickým představitelem sesquilineární formy skalární součin, zatímco odpovídající kvadratická forma je kvadrát normy. Tento kanonický příklad vysvětluje terminologii následujícího tvrzení (součet čtverců délek stran rovnoběžníku se rovná součtu čtverců délek jeho diagonál).

Tvrzení 8.5 (Rovnoběžníkové pravidlo)**.** *Nechť t je sesquilineární forma na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$. Pak platí*

$$\forall u, v \in \mathcal{V}\,, \qquad t[u+v] + t[u-v] = 2\Big(t[u] + t[v]\Big)\,.$$

Sesquilineární a kvadratické formy budeme stručně nazývat termínem formy.

8.2 Symetrické formy

Definice 8.6. *Symetrická forma* na $\mathcal{V}$ je sesquilineární forma t na $\mathcal{V}$ splňující navíc

$$\forall u, v \in \mathcal{V}, \qquad t(u,v) = \overline{t(v,u)}\,.$$

Symetrickým formám se též někdy říká *hermitovské formy.* Důvod je ten, že pokud definujeme *sdruženou formu* t^* předpisem

$$t^*(u,v) := \overline{t(v,u)}\,,$$

pak symetrie je ekvivalentní relaci hermitovosti (či samosdruženosti) $t^* = t$.

Příklad 8.7. Sesquilineární forma (8.1) na $\mathbb{R}^2$ z Příkladu 8.4 není symetrická. Pokud bychom však v definici (8.1) psali plus místo minus, pak by se jednalo o symetrickou formu na $\mathbb{R}^2$. $\diamondsuit$

Pokud je sesquilineární forma symetrická, pak je jednoznačně určena svojí kvadratickou formou, a to jak v komplexním, tak reálném případě. V komplexním případě, kde ani nepotřebujeme symetrii, to plyne z Tvrzení 8.3. V reálném případě je to důsledek následujícího tvrzení.

Tvrzení 8.8 (Polarizační identita, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)**.** *Nechť t je* symetrická *sesquilineární forma na reálném vektorovém prostoru $\mathcal{V}$. Pak platí*

$$\forall u, v \in \mathcal{V}, \qquad t(u,v) = \frac{1}{4}\Big(t[u+v] - t[u-v]\Big).$$

Z Definice 8.6 a Tvrzení 8.3 je zřejmé, že sesquilineární forma t na komplexním vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ je symetrická tehdy a jen tehdy, pokud $t[u] \in \mathbb{R}$ pro všechna $u \in \mathcal{V}$. (V reálném případě jsou hodnoty kvadratické formy vždy reálné.) V symetrickém případě má tedy smysl zavést relaci uspořádání $s \leq t$ pro dvě symetrické formy s, t na $\mathcal{V}$ předpisem $s[u] \leq t[u]$ pro všechna $u \in \mathcal{V}$. Porovnání dané symetrické formy t s *nulovou formou* $0[u] := 0$ nás vede k následující definici.

Definice 8.9. Symetrická sesquilineární forma t na $\mathcal{V}$ je

- *pozitivně definitní* $\quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, \underset{u \neq 0}{u \in \mathcal{V}}, \quad t[u] > 0\,;$
- *pozitivně semidefinitní* $\quad :\Longleftrightarrow \quad \forall u \in \mathcal{V}, \quad t[u] \geq 0 \quad \wedge \quad \exists\, \underset{u_0 \neq 0}{u_0 \in \mathcal{V}}, \quad t[u_0] = 0\,;$
- *negativně definitní* $\quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, \underset{u \neq 0}{u \in \mathcal{V}}, \quad t[u] < 0\,;$
- *negativně semidefinitní* $\quad :\Longleftrightarrow \quad \forall u \in \mathcal{V}, \quad t[u] \leq 0 \quad \wedge \quad \exists\, \underset{u_0 \neq 0}{u_0 \in \mathcal{V}}, \quad t[u_0] = 0\,;$
- *indefinitní* $\quad :\Longleftrightarrow \quad \exists u_\pm \in \mathcal{V}, \quad t[u_+] > 0 \ \wedge \ t[u_-] < 0\,.$

Na vektorovém prostoru se skalárním součinem je typickým představitelem pozitivně definitní formy skalární součin.

Příklad 8.10 (Formy generované operátory)**.** Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pro každé lineární zobrazení $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ nám předpis

$$t(u,v) := \langle u, Tv \rangle\,, \qquad u, v \in \mathcal{V}\,,$$

definuje sesquilineární formu na $\mathcal{V}$. Forma t je symetrická tehdy a jen tehdy, pokud operátor T je samosdružený, tedy $T = T^*$. V tomto případě máme následující spektrální charakteristiku definitnosti formy t (viz spektrální teorém, Věta 7.37):

t je pozitivně definitní	$\Longleftrightarrow$	vlastní hodnoty T jsou striktně kladné,
t je negativně definitní	$\Longleftrightarrow$	vlastní hodnoty T jsou striktně záporné,
t je pozitivně semidefinitní	$\Longleftrightarrow$	vlastní hodnoty T jsou nezáporné a alespoň jedna je nulová,
t je negativně semidefinitní	$\Longleftrightarrow$	vlastní hodnoty T jsou nekladné a alespoň jedna je nulová,
t je indefinitní	$\Longleftrightarrow$	T má striktně kladnou a striktně zápornou vlastní hodnotu.

♢

Následující příklady ukazují, že klasifikace Definice 8.9 může být užitečná v praxi.

Příklad 8.11 (Extrémy funkcí)**.** Uvažujme nekonečně hladkou funkci $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Taylorův rozvoj funkce f v bodě $0 \in \mathbb{R}^n$ zní

$$f(x) = f(0) + x^T \, \nabla f(0) + \frac{1}{2!} \, x^T \, \nabla^2 f(0) \, x + R_3(x) \,,$$

kde $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\nabla f := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

je vektor gradientu funkce f,

$$\nabla^2 f := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2}, & \dots, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1}, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, & \dots, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1}, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n x_2}, & \dots, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

je Hessova matice funkce f a $R_3 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je nějaká funkce splňující

$$\lim_{\|x\| \to 0} \frac{R_3(x)}{\|x\|^2} = 0 \,.$$

Na malém okolí nuly lze tedy funkci f aproximovat kvadratickou funkcí

$$f_2(x) := f(0) + x^T \, \nabla f(0) + \frac{1}{2!} \, x^T \, \nabla^2 f(0) \, x \,.$$

Zanedbáme-li poslední člen na pravé straně, dostáváme lineární aproximaci funkce f. Kvadratická aproximace je užitečná v případech, kdy lineární aproximace nepodává dostatečnou informaci. Například pokud je nula kritickým bodem funkce f, tedy $\nabla f(0) = 0$, je to právě symetrická forma

$$t[x] := x^T \, \nabla^2 f(0) \, x \,,$$

jež rozhoduje o extremálních vlastnostech funkce f v bodě nula:

t je pozitivně definitní	$\Longrightarrow$	0 je lokální minimum,
t je negativně definitní	$\Longrightarrow$	0 je lokální maximum,
t je indefinitní	$\Longrightarrow$	0 je sedlový bod.

Pokud je t pozitivně semidefinitní nebo negativně semidefinitní, je kvadratická aproximace f_2 nedostačující pro určení extremálních vlastností funkce f kolem kritického bodu nula. ♢

Příklad 8.12 (Kvadriky a kuželosečky). *Kvadrikou* v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ nazýváme množinu bodů

$$\Sigma := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i + \gamma = 0 \right\},$$

kde $\alpha_{ij}, \beta_i, \gamma \in \mathbb{R}$ jsou daná čísla. Předpokládáme symetrii a netriviálnost matice (α_{ij}):

$$\forall i,j \in \{1,\dots,n\},\ \alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad \wedge \quad \sum_{i,j=1}^{n} |\alpha_{ij}| \neq 0 .$$

Geometrická interpretace množiny Σ je nějaká (nad)plocha v $\mathbb{R}^n$. Pokud $n = 2$, množina Σ se též nazývá *kuželosečka* a její geometrický význam je rovinná křivka, kterou dostaneme jako průnik vhodné roviny s pláštěm rotačního kuželu. Opět je to právě symetrická forma

$$t[x] := \sum_{i,j=1}^{2} \alpha_{ij} x_i x_j ,$$

jež rozhoduje, o jakou kuželosečku se jedná:

t je pozitivně definitní nebo negativně definitní $\iff$ Σ je eliptického tvaru,
t je indefinitní $\iff$ Σ je hyperbolického tvaru,
t je pozitivně semidefinitní nebo negativně semidefinitní $\iff$ Σ je parabolického tvaru.

Důkaz se provede snadno záměnou souřadnic. Podobná (ovšem komplikovanější) klasifikace existuje pro kvadriky ve vyšších dimenzích. Na závěr zmiňme, co se myslí křivkou eliptického, hyperbolického či parabolického typu (ve vhodných souřadnicích):

typ:	eliptický	hyperbolický	parabolický
množina bodů $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ splňující:	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (elipsa)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (hyperbola)	$x^2 - \frac{y}{b} = 0$ (parabola)
	$x^2 + y^2 = 0$ (bod)	$x^2 - \frac{y^2}{c^2} = 0$ (různoběžné přímky)	$x^2 - c = 0$ nebo $x^2 = 0$ (rovnoběžné přímky)
	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ (imaginární elipsa)		$x^2 + c = 0$ (imaginární rovnoběžné přímky)

Zde $a, b, c > 0$ (případ $x^2 = 0$ odpovídá splývajícím rovnoběžkám). Druhý řádek tabulky lze chápat jako degenerovaný případ prvního řádku. Třetí řádek tabulky odpovídá prázdné množině. ♢

8.3 Věta o reprezentaci

V Příkladu 8.10 jsme viděli, že každému lineárnímu zobrazení odpovídá právě jedna sesquilineární forma. Následující věta nám ukazuje, že toto přiřazení funguje i opačně.

Věta 8.13 (O reprezentaci). *Nechť t je sesquilineární forma na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ se skalárním součinem $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Potom existuje právě jedno lineární zobrazení $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ takové, že platí*

$$\forall u, v \in \mathcal{V}, \qquad t(u,v) = \langle u, Tv \rangle . \tag{8.2}$$

Důkaz. Pro každé pevně dané $u \in \mathcal{V}$ nám předpis

$$\phi(v) := t(u,v)\,, \qquad v \in \mathcal{V}\,,$$

definuje lineární funkcionál na $\mathcal{V}$. Podle Rieszovy věty o reprezentaci (Věta 4.30) dostáváme

$$\forall u \in \mathcal{V}, \quad \exists! w_u \in \mathcal{V}, \quad \forall v \in \mathcal{V}, \qquad t(u,v) = \langle w_u, v\rangle\,.$$

Snadno se přesvědčíme, že přiřazení

$$T^* : \mathcal{V} \to \mathcal{V} : \{u \mapsto w_u\}$$

nám definuje zobrazení, jež je lineární (značíme $T^*u := w_u$). V důsledku toho dostáváme, že každé sesquilineární formě t odpovídá právě jeden operátor $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ takový, že platí

$$\forall u,v \in \mathcal{V}, \qquad t(u,v) = \langle T^*u, v\rangle = \langle u, Tv\rangle\,,$$

což jsme chtěli ukázat. $\square$

Vidíme tedy, že platí vzájemně jednoznačné přiřazení mezi formami a operátory, schematicky:

$$\boxed{\text{forma } t \qquad \xleftrightarrow{1-1} \qquad \text{operátor } T}$$

Všimněte si, že forma t je symetrická tehdy a jen tehdy, pokud odpovídající operátor T je samosdružený. Příklad 8.10 nám pak poskytuje spektrální ktitérium pro určení charakteristiky sesquilineární formy Definice 8.9. V konkrétních případech však existuje jednodušší postup (tzv. Lagrangeova metoda čili doplnění na čtverec), jak tuto charakteristiku určit.

Příklad 8.14. Nechť t je kvadratická forma v $\mathbb{C}^2$ daná předpisem

$$t\left[\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)\right] := |x_1|^2 - 2|x_2|^2 + 4\,\mathrm{Re}(\overline{x_1}x_2) = |x_1|^2 - 2|x_2|^2 + 2\overline{x_1}x_2 + 2x_1\overline{x_2}\,.$$

(Možno také uvažovat na $\mathbb{R}^2$, kde bychom nemuseli psát absolutní hodnoty a pruhy.) Podle Tvrzení 8.3 jí odpovídá symetrická sesquilineární forma

$$t\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)\right) = \overline{x_1}y_1 - 2\overline{x_2}y_2 + 2\overline{x_1}y_2 + 2\overline{x_2}y_1 = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right), T\left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)\right\rangle\,,$$

kde

$$T\left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right) := \left(\begin{smallmatrix} y_1 + 2y_2 \\ 2y_1 - 2y_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)\,.$$

Spektrum samosdruženého operátoru T v tomto případě snadno najdeme:

$$\sigma(T) = \{-3, 2\}\,.$$

Poněvadž jedna vlastní hodnota je striktně záporná a druhá striktně kladná, vidíme, že t je indefinitní forma.

Alternativní postup je následující. Pomocí metody doplnění na čtverec přepíšeme formu t do tvaru

$$t\left[\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)\right] = |x_1 + 2x_2|^2 - 4|x_2|^2 - 2|x_2|^2 = |x_1 + 2x_2|^2 - 6|x_2|^2\,,$$

jež je součtem pouze kladných a záporných členů (neobsahuje smíšené výrazy). Z tohoto tvaru je pak zřejmé, že existují vektory $u_\pm \in \mathbb{C}^2$ takové, že $t[u_+] > 0$ a $t[u_-] < 0$; například

$$t\left[\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right] = 1 \qquad \text{a} \qquad t\left[\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right] = -6\,.$$

Tedy opět dostáváme, že se jedná o indefinitní formu. Druhá metoda je obvykle mnohem efektivnější na vektorových prostorech vyšší dimenze. $\diamondsuit$

Příklad 8.15. Nechť t je kvadratická forma v $\mathbb{R}^2$ daná předpisem

$$t\left[\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)\right] := 2x_1x_2 \,.$$

(Možno také uvažovat na $\mathbb{C}^2$, kde bychom museli definovat $t\left[\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)\right] := \overline{x_1}x_2 + x_1\overline{x_2}$.) Odpovídající sesquilineární forma má tvar

$$t\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)\right) = x_1y_2 + x_2y_1 = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right), T\left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)\right\rangle ,$$

kde

$$T\left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right) := \left(\begin{smallmatrix} y_2 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right) .$$

Spektrum samosdruženého operátoru T v tomto případě vypadá takto:

$$\sigma(T) = \{-1, 1\} \,.$$

Poněvadž jedna vlastní hodnota je striktně záporná a druhá striktně kladná, vidíme, že t je opět indefinitní forma.

Jak použít metodu doplnění na čtverec v takovémto degenerovaném případě, kdy akce formy neobsahuje kvadráty složek vektorů? Trik je psát $x_1 = \xi_1 + \xi_2$ a $x_2 = \xi_1 - \xi_2$ a využít vzorečku $x_1x_2 = \xi_1^2 - \xi_2^2$. Užitím inverzních vztahů mezi x a ξ pak dostáváme

$$t\left[\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)\right] = 2\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 .$$

Tedy například

$$t\left[\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right] = 2 \qquad \text{a} \qquad t\left[\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\right] = -2 \,.$$

I tímto způsobem opět dostáváme, že se jedná o indefinitní formu. ♢

8.4 Matice formy

Definice 8.16. *Matice formy* t na $\mathcal{V}$ vzhledem k bázi $(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{V}^n$ je matice

$$\mathsf{M}\big(t, (v_1, \dots, v_n)\big) := \big(t(v_j, v_k)\big)_{j,k=1,\dots,n} \,.$$

Pokud je volba báze zřejmá z kontextu, budeme označení matice formy t zkracovat na $\mathsf{M}(t)$.

Nechť je dána báze $(v_1, \dots, v_n)$ v prostoru $\mathcal{V}$. Z vlastností sesquilineární formy t dostáváme vztah

$$t(u, v) = \sum_{j,k=1}^{n} \overline{a}_j \, t(v_j, v_k) \, b_k \,, \tag{8.3}$$

kde $a_1, \dots, a_n$ a $b_1, \dots, b_n$ jsou souřadnice vektorů u, v vzhledem k dané bázi, tedy

$$u = a_1v_1 + \dots + a_nv_n \,, \qquad v = b_1v_1 + \dots + b_nv_n \,.$$

Připomenutím definice matice vektoru (Definice 5.6) můžeme vztah (8.3) přepsat do maticového tvaru

$$t(u, v) = \mathsf{M}(u)^* \, \mathsf{M}(t) \, \mathsf{M}(v) \,.$$

Tento vztah uskutečňuje vzájemně jednoznačné přiřazení mezi množinou matic stupně n a množinou všech sesquilineárních forem na n-dimenzionálním vektorovém prostoru $\mathcal{V}$.

Věta 8.17. *Ke každé symetrické sesquilineární formě t na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ se skalárním součinem existuje ortonormální báze, vzhledem k níž je matice $\mathsf{M}(t)$ diagonální.*

Důkaz. Podle Věty 8.13 forma t generuje operátor $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, jenž je nezbytně samosdružený, viz Příklad 8.10. Podle spektrálního teorému (Věta 7.37) existuje ve $\mathcal{V}$ ortonormální báze $(v_1, \dots, v_n)$ tvořená vlastními vektory operátoru T. Ze vztahu (8.2) dostáváme

$$\mathsf{M}\big(t, (v_1, \dots, v_n)\big) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní hodnoty operátoru T (každá opakovaná tolikrát, kolik je její násobnost). □

Báze $(v_1, \dots, v_n)$ v prostoru $\mathcal{V}$, vzhledem k níž je matice $\mathsf{M}\big(t, (v_1, \dots, v_n)\big)$ formy t diagonální, se nazývá *polární báze.* Podle Věty 8.17, ke každé symetrické formě existuje polární báze. Skutečně, báze tvořená vlastními vektory odpovídajícího operátoru T je polární báze. Avšak v praxi může být jednodušší najít odlišnou polární bázi jiným způsobem.

Příklad 8.18. Vraťme se k formě t z Příkladu 8.14. Matice formy t vzhledem ke kanonické bázi má tvar

$$\mathsf{M}\left(t, \left(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\2 & -2\end{smallmatrix}\right).$$

Podívejme se po polární bázi (vzhledem k níž je matice formy diagonální), a to dvěma způsoby.

První způsob je založený na spektrální analýze operátoru T. Ta nám umožňuje nalézt rovněž vlastní vektory, jež odpovídají vlastním číslům -3 a 2 (už nalezeným),

$$\ker[T - (-3)I] = \operatorname{span}\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\-2\end{smallmatrix}\right)\right), \qquad \ker[T - 2I] = \operatorname{span}\left(\left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right)\right).$$

Soubor $\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\-2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right)\right)$ je tedy polární báze formy t (viz důkaz Věty 8.17). Odpovídající matice formy t má tvar

$$\mathsf{M}\left(t, \left(\left(\begin{smallmatrix}1\\-2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right)\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix}-15 & 0\\0 & 10\end{smallmatrix}\right).$$

Všimněte si, že na diagonále sedí vlastní číslo přenásobené kvadrátem normy odpovídajícího vlastního vektoru (kdybychom do báze dosadili normalizované vlastní vektory, byly by na diagonále přímo vlastní čísla).

Z alternativního postupu, založeného na metodě doplnění na čtverec, dostáváme jinou polární bázi $\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-2\\1\end{smallmatrix}\right)\right)$ a jí odpovídající diagonální matici

$$\mathsf{M}\left(t, \left(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-2\\1\end{smallmatrix}\right)\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\0 & -6\end{smallmatrix}\right).$$

Samozřejmě existují další volby polárních bází pro formu t. ♢

Příklad 8.19. Podívejme se nyní na formu t z Příkladu 8.15, jež má vzhledem ke kanonické bázi antidiagonální tvar

$$\mathsf{M}\left(t, \left(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{smallmatrix}\right).$$

Vzhledem k (polární) bázi tvořené vlastními vektory však dostáváme diagonální matici

$$\mathsf{M}\left(t, \left(\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix}2 & 0\\0 & -2\end{smallmatrix}\right).$$

To je rovněž matice, jež bychom dostali alternativní metodou typu doplnění na čtverec. $\diamondsuit$

8.5 Cvičení

1. Rozhodněte, zda následující zobrazení $t : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ definuje sesquilineární formu v $\mathbb{C}^3$. Pokud ano, rozhodněte, zda se jedná a symetrickou formu. Vektory v $\mathbb{C}^3$ zapisujeme v obvyklém tvaru $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ a $y = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right)$.

   (a) $t(x, y) := \langle x, y\rangle;$

   (b) $t(x, y) := \langle y, x\rangle;$

   (c) $t(x, y) := 1;$

   (d) $t(x, y) := 0;$

   (e) $t(x, y) := x_2 y_2;$

   (f) $t(x, y) := \overline{x_2} y_3;$

   (g) $t(x, y) := x \times y;$

   (g) $t(x, y) := \|x\|\|y\|.$

   [(a) ano (skalární součin je typickým představitelem symetrické sesquilineární formy);
   (b) ne (složka, vzhledem k níž je skalární součin lineární, je obráceně);
   (c) ne (nesplňuje linearitu);
   (d) ano (nulová forma), symetrická;
   (e) ne (x_2 není opruhované);
   (f) ano, není symetrická (chybí člen $\overline{x_3} y_2$);
   (g) ne (vektorový součin dvou vektorů je vektor, ne číslo);
   (h) ne (nesplňuje linearitu).]

2. Určete charakteristiku následující kvadratické formy t v $\mathbb{R}^3 \ni x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$. (Postupujte technikou doplnění na čtverec, avšak v případě zájmu můžete zkusit i spektrální metodu.)

   (a) $t[x] := x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2;$ (viz Příklad 8.14)

   (b) $t[x] := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2;$

   (c) $t[x] := -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2;$

   (d) $t[x] := 9x_2^2 + 9x_3^2 + 12x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3;$

   (e) $t[x] := -x_3^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3;$

   (f) $t[x] := x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3;$ (viz Příklad 8.15)

   (g) $t[x] := x_3^2.$

   [(a) indefinitní, $\sigma(T) = \{-3, 0, 2\}$;
   (b) pozitivně semidefinitní, $\sigma(T) = \{0, 1, 2\}$;
   (c) negativně semidefinitní, $\sigma(T) = \{-2, -1, 0\}$;
   (d) indefinitní, $\sigma(T) = \{-6, 12, 12\}$;
   (e) indefinitní, $\sigma(T) = \{-\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$;
   (f) indefinitní, $\sigma(T) = \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\}$;
   (g) pozitivně semidefinitní, $\sigma(T) = \{0, 0, 1\}$.]

Reference

[1] *Online etymology dictionary*, http://www.etymonline.com/.

[2] *Oxford dictionaries*, http://www.oxforddictionaries.com/.

[3] S. Axler, *Linear algebra done right*, Springer, New York, 2004, 2nd edition.

[4] ———, *Linear algebra done right*, Springer, New York, 2014, 3rd edition.

[5] ———, *Linear algebra abridged*, 2016, http://linear.axler.net/LinearAbridged.html.

[6] P. R. Halmos, *Finite-dimensional vector spaces*, Springer, New York, 1987.

[7] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[8] J. Kopáček, *Matematika pro fyziky II*, Univerzita Karlova v Praze, Praha, 1989.

[9] P. Lax, *Linear algebra and its applications*, Willey, 2nd edition, New Jersey, 2007.

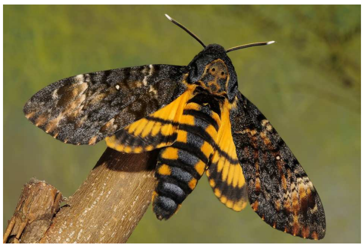
[10] J. Weidmann, *Linear operators in Hilbert spaces*, Springer-Verlag, New York Inc., 1980.

A Pravidla zkoušky

Předpokladem připuštění ke zkoušce je předchozí získání zápočtu.

Všichni studenti začnou zkoušku písemkou, v níž se objeví výpočetní příklady analogické těm, s kterými jsme se setkávali na cvičeních, a v menší míře i teoretická látka z přednášek. Text přednášky a cvičení jsou (zdarma) k dispozici na adrese:

`http://nsa.fjfi.cvut.cz/david/other/la.pdf`



Písemka bude obsahovat jednu povinnou otázku typu **smrtihlav**, jejíž neúspěšné zodpovězení je ohodnoceno zápornou částkou až -100 bodů.

Naopak jedna otázka typu **jasoň** bude nepovinná, avšak při úspěšném zodpovězení je ohodnocena bonusovou částkou až +100 bodů.

Celkový počet bodů, jenž lze získat z povinných otázek (včetně smrtihlava), je 100. Jasoň je tedy jediná možnost, jak neskončit se záporným skóre při neúspěchu u smrtihlava (a navíc umožňuje nabýt většího celkového počtu bodů než 100).

Hodnocení písemky bude probíhat následovně ($n :=$ celkový počet bodů):

C	D	E	F
$n > 75$	$75 \geq n > 50$	$50 \geq n > 25$	$25 \geq n$

Takto získaná známka je konečná známka ze zkoušky (samotnou písemkou tedy nelze získat lepší známku než C).

Výjimkou jsou **studenti se známkou C z písemky**, kteří se mohou rozhodnout buď si známku C ponechat, nebo přistoupit k ústní zkoušce, z níž si mohou následně odnést lepší známku A nebo B (ve výjimečně tragických případech však i známku horší).

Hodně štěstí!

V Praze, 16. září 2024 David Krejčiřík

Příklady smrtihlavů

1. Které z následujících množin (ne)jsou vektorové prostory nad $\mathbb{R}$, a proč (ne)?

   (a) $\left\{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 = 3\right\}$; (b) $\left\{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : -3x_1 + 2x_2 = 0\right\}$;
   (c) $\left\{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : 4x_1x_2 = 0\right\}$; (d) $\left\{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : |x_1|^2 + |x_2|^2 \geq 4\right\}$.

   Interpretujte geometricky.

2. Nechť $v_1, \dots, v_n$ je n vektorů z vektorového prostoru $\mathcal{V}$ nad $\mathbb{C}$. Uveďte definice následujících vlastností či objektů:

   (a) $v_1, \dots, v_n$ jsou lineárně závislé;

   (b) $v_1, \dots, v_n$ jsou lineárně nezávislé;

   (c) v_n je lineární kombinací $v_1, \dots, v_{n-1}$;

   (d) $v_1, \dots, v_n$ tvoří bázi ve $\mathcal{V}$;

   (e) $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_n)$;

   (f) dimenze prostoru $\mathcal{V}$ je m.

3. Které z následujících funkcí (ne)jsou lineární zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, a proč (ne)?

   (a) $f\left(\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right)\right) := \left(\begin{smallmatrix}-x_1+3x_2\\x_1+2x_2\end{smallmatrix}\right)$; (b) $f\left(\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right)\right) := \left(\begin{smallmatrix}-x_1+3x_2\\x_1+2x_2-1\end{smallmatrix}\right)$;
   (c) $f\left(\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right)\right) := \left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right)$; (d) $f\left(\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right)\right) := \left(\begin{smallmatrix}x_1\\-x_2\end{smallmatrix}\right)$.

4. Nechť $T \in \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, kde $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ jsou vektorové prostory nad $\mathbb{C}$. Uveďte definice následujících vlastností či objektů:

   (a) $\ker T$ (jádro); $\operatorname{ran} T$ (obor hodnot); $\operatorname{rank} T$ (hodnost);

   (b) T je injektivní (prosté); T je surjektivní (na); T je bijektivní;

   (c) T je invertibilní; T^{-1}.

   Formulujte univerzální vztah mezi dimenzemi prostoru $\mathcal{V}$, jádra T a oboru hodnot T.

5. Nechť $x, y \in \mathbb{C}^n$. Napište, jak jsou definovány následující vlastnosti či objekty:

   (a) $\|x\|$ (eukleidovká norma vektoru x);

   (b) $\langle x, y\rangle$ (eukleidovký skalární součin vektorů x, y);

   (c) vektory x, y jsou ortogonální;

   (d) vektory x, y jsou ortonormální;

   (e) vektory $x_1, \dots, x_n$ tvoří ortonormální bázi v $\mathbb{C}^n$;

   Formulujte Pythagorovu větu, Schwarzovu nerovnost a trojúhelníkovou nerovnost.

6. Rozhodněte, které z následujících maticových součinů má smysl, a v případě, že smysl má, součin spočítejte.

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\e^i\end{pmatrix}, \qquad \text{(b)}\ \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\end{pmatrix}, \quad \text{(c)}\ \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & -1\\4 & i\end{pmatrix}.$$

7. Uvažujme matici

$$A := \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\2 & -2 & 0\\0 & 1 & -3\end{pmatrix}.$$

Spočtěte:

(a) A^T (transponovaná matice); A^* (sdružená matice);

(b) $\ker A$, $\ker A^T$, $\ker A^*$; $\operatorname{ran} A$, $\operatorname{ran} A^T$, $\operatorname{ran} A^*$;

(c) $\dim\ker A$, $\dim\ker A^T$, $\dim\ker A^*$; $\operatorname{rank} A$; $\operatorname{rank} A^T$; $\operatorname{rank} A^*$;

(d) $\det A$, $\det A^T$, $\det A^*$; $\operatorname{tr} A$, $\operatorname{tr} A^T$, $\operatorname{tr} A^*$;

(e) $\operatorname{cof} A$ (kofaktorová matice);

(f) vlastní čísla a vlastní vektory matice A.

Rozhodněte, zda je matice A invertibilní, a pokud ano, spočtěte její inverzi A^{-1}.

Rozhodněte, zda je matice A diagonalizovatelná, a pokud ano, nalezněte bázi, vzhledem k níž je diagonální, a její diagonální tvar.

8. Uvažujme matici

$$A := \begin{pmatrix}1 & 2i\\-2i & 1\end{pmatrix}.$$

Spočtěte:

(a) A^T; A^*;

(b) $\det A^T$; $\operatorname{tr} A^*$;

(c) $\operatorname{cof} A$ (kofaktorová matice);

(d) $\sigma(A)$ (spektrum = vlastní čísla);

(e) vlastní vektory matice A;

(f) e^A (exponenciála matice);

(g) $\det e^A$;

Rozhodněte, zda je matice A invertibilní, a pokud ano, spočtěte její inverzi A^{-1}.

9. Uvažujme zobrazení

$$t : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \left\{\left(\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{smallmatrix}\right)\right) \mapsto 3x_2y_2 + 2x_1y_3 + 4x_3y_1 - x_3y_3\right\}.$$

Rozhodněte, zda se jedná o symetrickou sesquilineární formu na $\mathbb{R}^3$, a pokud ano, najděte odpovídající kvadratickou formu a určete její charakteristiku.